

Задача нелинейного  
программирования. Условная  
оптимизация. Метод проекции  
градиента

# Метод проекции градиента

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(X) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max f(X) \\ A_0 X \leq b_0 \end{array} \right.$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2 \\ -2x_2 + 4 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

# Шаг 1. Выбор направления

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_0 X_0 - b_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Активные ограничения

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} < 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

Допустимо  
градиентное  
направление

$$K^{(0)} = \nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# Шаг 1. Определение длины шага

$$A_0 K^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ограничения, которые нарушаются при движении в выбранном направлении

Длина шага до нарушаемых ограничений:

$$t_k^{(i)} = \frac{b_k - a_k X_i}{a_k K^{(i)}}$$
$$t_1^{(0)} = \frac{b_1 - a_1 X_0}{a_1 K^{(0)}} = \frac{2 - [-1 \ 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{[-1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}} = \frac{1}{3}$$
$$t_2^{(0)} = \frac{b_2 - a_2 X_0}{a_2 K^{(0)}} = \frac{4 - [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}} = \frac{2}{3}$$

# Шаг 1. Определение длины шага

Максимально возможная длина шага:

$$t_*^{(i)} = -\frac{\nabla^T f(X_i) K^{(i)}}{K^{(i)T} H(X_i) K^{(i)}}$$

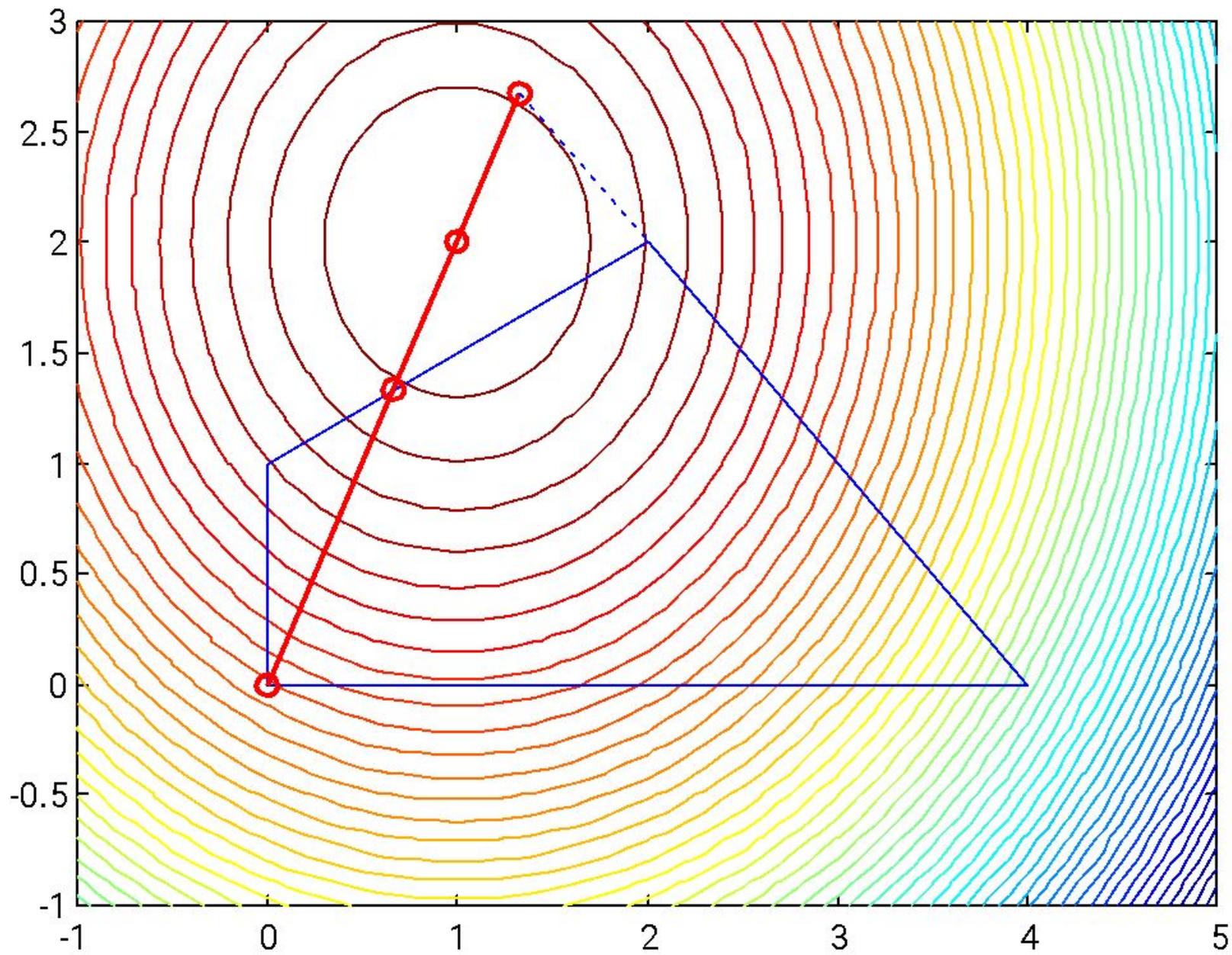
$$t_*^{(0)} = -\frac{\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Итоговая длина шага:

$$t^{(0)} = \min\left(t_*^{(0)}, t_1^{(0)}, t_2^{(0)}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

# Шаг 1. Координаты новой точки

$$X_1 = X_0 + t^{(0)} K^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$



## Шаг 2. Выбор направления

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \quad \nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2 \\ -2x_2 + 4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$A_0 X_1 - b_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Активные} \\ \text{ограничения} \end{array}$$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = 2 > 0 \quad \begin{array}{l} \text{Не допустимо} \\ \text{градиентное} \\ \text{направление} \end{array}$$

# Шаг 2. Выбор направления

Оператор проекции:

$$P = E - A^T (AA^T)^{-1} A$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$K^{(1)} = P \nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/15 \\ 8/15 \end{bmatrix}$$

## Шаг 2. Определение длины шага

$$A_0 K^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16/15 \\ 8/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24/15 \\ -16/15 \\ -8/15 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Нарушаемые} \\ \text{ограничения} \end{array}$$

Длина шага  
до нарушаемых  
ограничений:

$$t_2^{(1)} = \frac{4 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16/15 \\ 8/15 \end{bmatrix}} = \frac{5}{4}$$

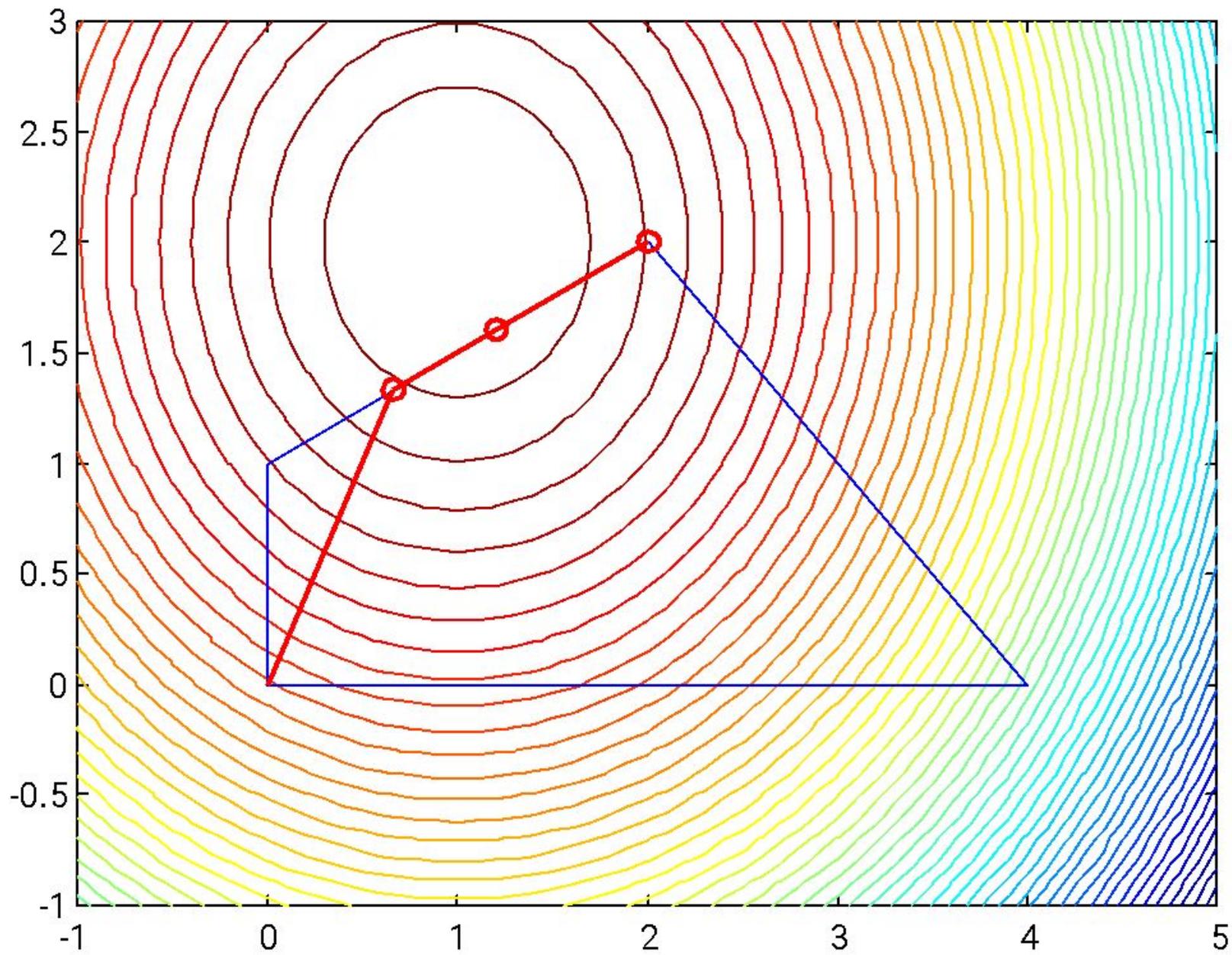
Максимально возможная  
длина шага:

$$t_*^{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$t^{(1)} = \min\left(t_*^{(1)}, t_2^{(1)}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

## Шаг 2. Координаты новой точки

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + t^{(1)} K^{(1)} = \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16/15 \\ 8/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Шаг 3. Выбор направления

$$X_2 = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} \quad \nabla f(X_2) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2 \\ -2x_2 + 4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$A_0 X_2 - b_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ -6/5 \\ -8/5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Активные} \\ \text{ограничения} \end{array}$$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \nabla f(X_2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 2 > 0 \quad \begin{array}{l} \text{Не допустимо} \\ \text{градиентное} \\ \text{направление} \end{array}$$

# Шаг 3. Выбор направления

Оператор проекции:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = P \nabla f(X_2) = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Подозрение на  
оптимальность

# Шаг 3. Проверка останова

$$\begin{aligned}\Lambda &= -\left(AA^T\right)^{-1} A\nabla f\left(X(2)\right)= \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = -\frac{2}{5} < 0\end{aligned}$$

Точка  
оптимальна

$$X^* = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

