

Раздел 2

Введение в теорию конечных элементов

Введение в теорию конечных элементов

| | Стр. |
|--|------|
| Основная концепция метода перемещений | 6 |
| Интерпретация матрицы жесткости элементов $[k_e]$ | 8 |
| Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами | 10 |
| Один элемент: осевое нагружение | 13 |
| Общие требования к исходным данным | 20 |
| Исходные данные для примера с ROD элементом | 23 |
| Глобальная матрица жесткости | 44 |
| Процедура анализа сложной конструкции | 48 |
| Выходные данные MSC.Nastran | 52 |
| Проверка модели | 53 |

Введение в теорию конечных элементов (прод.)

Стр.

| | |
|--|----|
| Некоторые советы по моделированию | 54 |
| Единицы измерения | 56 |
| Обзор процедуры решения методом конечных элементов | 58 |
| Литература по матричному анализу | 59 |
| Литература по МКЭ | 60 |

Введение в теорию конечных элементов (прод.)

| | Стр. |
|--|------|
| Матрица жесткости балочного (BAR) элемента | 61 |
| Элемент CBAR | 63 |
| Описание CBAR элемента | 66 |
| Описание оператора PBAR | 74 |
| Расчет момента инерции J для некоторых сечений | 76 |
| Поперечный сдвиг | 78 |
| Описание CBAR элемента | 81 |
| Описание оператора PBARL | 83 |
| Силы в балочном элементе | 89 |
| Пример применения элемента CBAR | 91 |
| Входной файл MSC.Nastran для данного примера | 93 |

Введение в теорию конечных элементов (прод.)

Стр.

| | |
|---|----|
| Вывод перемещений для данного примера | 94 |
| Вывод сил в элементах для данного примера | 95 |
| Вывод напряжений для данного примера | 96 |

Основная концепция метода перемещений

- Большинство конечноэлементных систем основываются на методе перемещений
- Каждый элемент модели может быть представлен в виде матрицы жесткости, которая в большинстве случаев называется матрицей жесткости элемента
- Матрица жесткости элемента зависит от типа элемента и от его характеристик, которые необходимо смоделировать
- Для одного элемента можно записать уравнение:

$$\{ P \} = [k]_e \{ u \} \quad 2-1$$

Основная концепция метода перемещений (продолжение)

где $\{ P \}$ = известные силы, прикладываемые к модели
 $[k]_e$ = матрица жесткости $[k_{ij}]$, где каждое значение $[k_{ij}]$ есть сила реакции, действующая по координате i при единичном перемещении по координате j при условии, что все остальные перемещения равны 0;

$\{ u \}$ = перемещения полученные решением уравнения 2-1

- Для решения уравнения 2-1 и нахождения $\{ u \}$ должны быть приложены соответствующие граничные условия
- Граничные условия накладываются для устранения перемещений конструкции как твердого тела

Интерпретация матрицы жесткости элемента [ke]

- $[k]_e$ описывает как сила передается через элемент
- Для упругих задач, закон Максвелла требует, чтобы матрица жесткости была симметричной
- Математически это означает, что матрица $[k]_e$ должна быть квадратной и удовлетворять следующему отношению:

$$k_{ij} = k_{ji}$$

Интерпретация матрицы жесткости элемента [ke] (продолжение)

- Это естественно, поскольку для перемещения конца пружины 1 на заданное расстояние при закрепленном конце 2 требуется приложить такую же нагрузку, что и для перемещения конца 2 на то же расстояние при закрепленном конце 1.
- Значение одного элемента матрицы жесткости k_{ij} называется коэффициентом жесткости. k_{ij} имеет размерность нагрузка/перемещение. Размерность k_{ij} для пружины – нагрузка/длина (т.е., фунт/дюйм, Н/м)

Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами

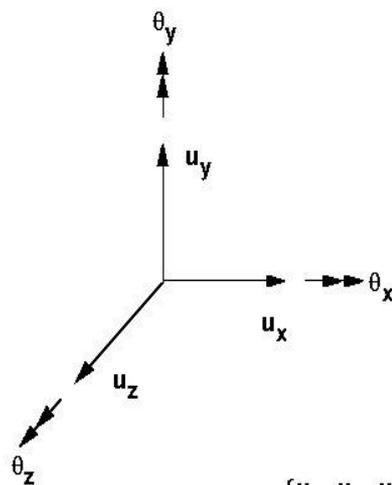
- ❑ Анализ сложных инженерных задач может быть затруднен (или даже невозможен) без некоторых упрощающих допущений
- ❑ Для конечноэлементного анализа, сложная конструкция подразделяется на некоторое число отдельных (конечных) элементов, которые, в совокупности, аппроксимируют поведение всей конструкции
- ❑ Непрерывная конструкция представляется, как набор точек (узлов), соединяемых элементами

Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами (продолжение)

- Каждая узловая точка имеет шесть независимых степеней свободы (DOFs). Степени свободы определяются как независимые компоненты перемещений или поворотов узловой точки.
- Непрерывная конструкция теоретически имеет бесконечное количество степеней свободы
- Идея метода конечных элементов состоит в том, чтобы аппроксимировать поведение конструкции путем сведения бесконечного числа степеней свободы к конечному числу
- Рисунок 2-1 показывает, что перемещение узловой точки определяется с использованием 6-ти степеней свободы

Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами (продолжение)

- "Перемещение" (displacement) - основной термин означающий компонент перемещения или угла поворота.



$\{u_x, u_y, u_z\}$ 3 перемещения:

$\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}$ 3 вращения:

$\{u\}$ вектор перемещений = $\{u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}$

Рисунок 2-1

Один элемент: осевое нагружение

- Рассмотрим упругий стержень (ROD) сечением A и длиной L под действием только осевой нагрузки.

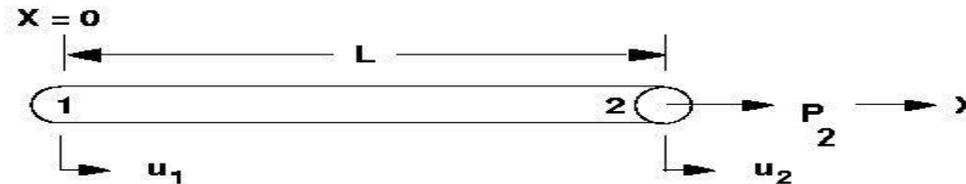


Рисунок 2-2

- Заметим, что MSC.Nastran элемент ROD может также воспринимать кручение, которое в данном примере не рассматривается.

Один элемент: осевое нагружение (продолжение)

- Для этого ROD элемента, выражение 2-1 может быть представлено как:

$$\{P\} = [k]_e \{u\} \quad 2-2$$

или

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad 2-3$$

где $[k]_e = [k_{ij}]$, известная матрица жесткости ROD элемента, размером 2x2

$\{P\}$ = вектор известной приложенной силы

$\{u\}$ = вектор неизвестных перемещений,
определяемый из уравнения 2-2

Один элемент: осевое нагружение (продолжение)

A = Площадь сечения ROD элемента

E = Модуль Юнга

L = Длина ROD элемента

- Известные перемещения, $\{u\}$, в уравнении 2-2 (или 2-3) могут быть найдены следующим образом:

$$\{u\} = [k]_e^{-1} \{P\} \quad 2-4$$

- На самом деле, для большей эффективности, MSC.Nastran использует декомпозицию и прямой-обратный ход (DCMP/FBS) для решения уравнения 2-2 (2-3) вместо обращения матрицы, как это показано в уравнении 2-4.

Один элемент: осевое нагружение (продолжение)

- Для простоты объяснения в этом семинаре мы будем ссылаться на уравнение 2-4.
- Мы пока не можем решить данную задачу с ROD элементом, которая показана на рисунке 2-2, так как матрица $[k]_e^{-1}$ сингулярна.
- Физический смысл сингулярности матрицы состоит в том, что если мы потянем ROD элемент за узел 2, весь элемент начнет перемещаться в осевом направлении, так как ничто не ограничивает его движение (нет закреплений).
- Математически, два уравнения линейно зависят друг от друга

Один элемент: осевое нагружение (продолжение)

- Чтобы проиллюстрировать это, распишем уравнения 2-3 следующим образом:

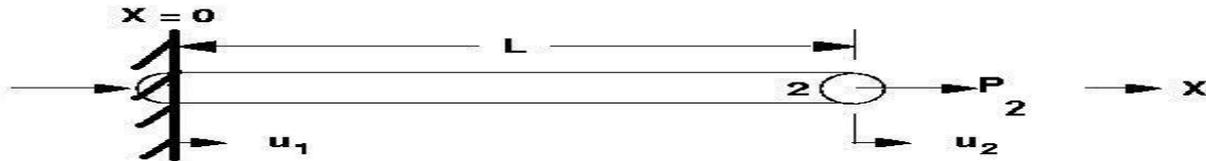
$$P_1 = (AE/L)*u_1 - (AE/L)*u_2 \quad 2-5a$$

$$P_2 = -(AE/L)*u_1 + (AE/L)*u_2 \quad 2-5b$$

- Заметим, что уравнение 2-5a является линейной комбинацией уравнения 2-5b. Поэтому эти два уравнения линейно зависят друг от друга.
- Чтобы стабилизировать модель нужно задать соответствующие граничные условия, и тем самым, при действии нагрузки, исключить ее движение как твердого тела.

Один элемент: осевое нагружение (продолжение)

- Вернемся к рисунку с ROD элементом и закрепим его левый узел:



- Это равносильно вычеркиванию первой строки и первого столбца из уравнения 2-3 перед выполнением инверсии

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad 2-6$$

Один элемент: осевое нагружение (продолжение)

- После закрепления ROD элемента, уравнение 2-6 может быть решено

$$\{u\} = [k]_e^{-1} \{P\}$$

или $u_2 = \{L/(AE)\} * P_2$

для $A = 5.0,$ $L = 100.,$ $E = 29. E6,$ $P = 2.E5$

$$u_2 = \{(100)/(5 * 29E6)\} * 2E5 = 0.13791 \quad (\text{перемещение})$$

$$F_{e2} = \{(A * E)/L\} * u_2 = 2.E5 \quad (\text{сила в элементе})$$

$$\sigma = F_{e2}/A = 2.E5/5. = 4.E4 \quad (\text{напряжение в элементе})$$

Заметим, что $F_{e2} = P_2$, так как в данном случае рассматривался только 1 элемент

Общие требования к исходным данным

□ Какие требования существуют для выполнения конечноэлементного анализа?

□ Геометрия

- Расположение узловых точек (узла 1 и узла 2 в примере с ROD элементом)
- Направление осей координат, в которых будут получены компоненты сил и перемещений

□ Топология

- Типы элементов, которые будет использоваться
- Порядок объединения узловых точек в элементы

□ Свойства элементов

- Например, толщина для оболочечных элементов или площадь сечения для стержневого элемента. Для каждого типа элемента имеется специфический список свойств.

Общие требования к исходным данным (продолжение)

□ Свойства материала

- Какой тип материала использовать: алюминий, сталь, графит, эпоксидная смола и т.д. ?
- Свойствами материала являются модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность и коэффициент температурного расширения и т.д. В MSC.Nastran имеются различные типы материалов и каждый имеет специфический список свойств
- В данном примере использовалось только одно свойство элемента – модуль Юнга

□ Граничные условия (закрепления)

- Закрепления используются для задания граничных условий, условий симметрии и различных других полезных связей. Закрепления необходимы, так как незакрепленная конструкция может перемещаться в пространстве и ее анализ не возможен.
- В данном примере ROD элемент был закреплен с левой стороны (за первый узел)

Общие требования к исходным данным (продолжение)

- **Нагрузки**
 - Приложенные нагрузки
 - Принудительные перемещения
 - Температурные нагрузки
 - Нагрузки могут прикладываться к узловым точкам или к элементам.
 - В данном примере нагрузка P_2 прикладывалась с правой стороны ROD элемента (в узле 2)
- **Что мы хотим получить в результате анализа?**
 - Деформации, силы действующие в элементе, напряжения, силы реакции, и т.д.

Исходные данные для примера с ROD элементом

- Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran? (Те же, что и в общем случае)
 - ▣ Геометрия (запись GRID)
 - Топология элементов
 - Свойства элементов
 - Свойства материалов
 - Граничные условия
 - Нагрузки
 - Что нужно получить в результате анализа?

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Геометрия

- Определяется записью GRID

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|----|-----|------|-----|----|-----|------|----|
| GRID | ID | CP | X1 | X2 | X3 | CD | PS | SEID | |
| GRID | 101 | 0 | 5.0 | 10.0 | 2.0 | 1 | 123 | | |

Поле

Содержимое

| | |
|-------------------|---|
| ID | Идентификационный номер узла |
| CP | Идентификационный номер системы координат относительно которой задается положение узла в пространстве (целое число > 0, по умолчанию используется глобальная система координат) |
| X1, X2, X3 | Координаты узла в координатной системе CP (веществен.) |
| CD | Идентификационный номер системы координат, относительно которой определяются перемещения, закрепления, вектора сил и напряжений (целое число > 0, по умолчанию используется глобальная система координат) |
| PS | Постоянные закрепления, связанные с данным узлом (цифры от 1 до 6, без пробелов) |
| SEID | Номер суперэлемента |

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran?**
 - Геометрия (GRID запись)
 - **Топология**
 - Свойства элементов
 - Свойства материалов
 - Граничные условия
 - Нагрузки
 - Что нужно получить в результате анализа?

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Топология

- В данном примере топология ROD элемента задается записью CROD

CROD

Определяет ROD элемент

Format:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-----|----|----|---|---|---|---|----|
| CROD | EID | PID | G1 | G2 | | | | | |

Example:

| | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|----|--|--|--|--|--|
| CROD | 12 | 13 | 21 | 23 | | | | | |
|------|----|----|----|----|--|--|--|--|--|

Поле

EID

PID

G1, G2

Содержимое

Идентификационный номер элемента (целое число > 0)

Идентификационный номер записи PROD (целое число > 0)

Номера двух узловых точек, входящих в элемент (целое число > 0)

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran?**
 - Геометрия (GRID запись)
 - Топология
 - **Свойства элементов**
 - Свойства материалов
 - Граничные условия
 - Нагрузки
 - Что нужно получить в результате анализа?

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Свойства элементов

- В данном примере свойства ROD элемента определяются с помощью записи PROD

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-----|------|---|---|-----|---|---|----|
| PROD | PID | MID | A | J | C | NSM | | | |
| PROD | 101 | 201 | 0.10 | | | | | | |

Поле

Содержимое

- PID** Идентификационный номер свойства (целое число > 0)
- MID** Идентификационный номер материала (целое число > 0)
- A** Площадь сечения ROD элемента
- J** Полярный момент инерции
- C** Коэффициент для определения напряжений кручения
- NSM** Неконструкционная масса на единицу длины (веществ.)

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran?**
 - Геометрия (GRID запись)
 - Топология
 - Свойства элементов
 - **Свойства материалов**
 - Граничные условия
 - Нагрузки
 - Что нужно получить в результате анализа?

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Свойства материала

- Для данной задачи свойства материала описываются записью MAT1
- Мы можем задать E, G, и ν .
- Из этих величин нужно задать только две, третья автоматически вычисляется из следующего выражения:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- E – Модуль упругости (Юнга) (при растяжении и изгибе)
- G – Модуль сдвига (при кручении и сдвиге)
- ρ - Массовая плотность

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Свойства материала (продолжение)

- α - Коэффициент линейного температурного расширения
- T_{ref} – Начальная температура для расчета дельта-T
- **ST,SC,SS** – Максимальные (предельные) напряжения при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно.

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Свойства материала (продолжение)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-------|---|------|-----|--------|------|---|-----|
| MAT1 | MID | E | G | NU | RHO | A | TREF | | |
| MAT1 | 3 | 2.9+7 | | 0.33 | | 6.5E-6 | 50.0 | | +M1 |

Поле

Содержимое

| | |
|------|--|
| MID | Идентификационный номер материала (целое число > 0) |
| E | Модуль упругости (веществ.) |
| G | Модуль сдвига (веществ.) |
| NU | Коэффициент Пуассона (-1.0 < веществ. ≤ 0.5) |
| RHO | Массовая плотность (веществ.) |
| A | Коэффициент линейного температурного расширения (веществ.) |
| TREF | Исходная температура (веществ.) |

| | ST | SC | SS | | | | | | |
|-----|--------|----|----|--|--|--|--|--|--|
| +M1 | 36000. | | | | | | | | |

ST,SC,SS

Максимальные (предельные) напряжения при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно. (необязательны: используются только для определения запаса прочности)

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran?

- Геометрия (GRID запись)
- Топология
- Свойства элементов
- Свойства материалов
- **Граничные условия**
- Нагрузки
- Что нужно получить в результате анализа?

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

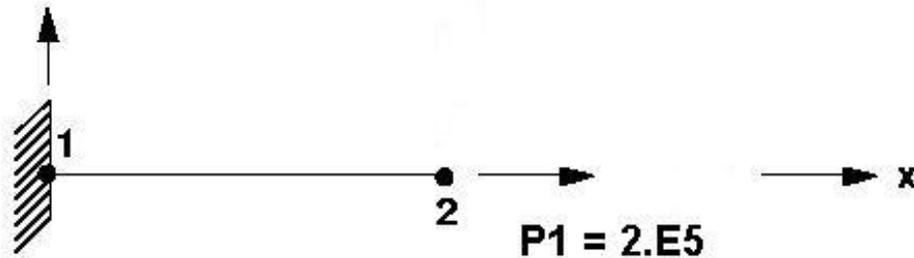
- В MSC.Nastran граничные условия могут определяться с использованием записей SPC и SPC1, и/или в поле 8 записи GRID.
- Для данного примера мы определяем граничные условия в записи GRID (см. страницу 2-24)

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran?
 - Геометрия (GRID запись)
 - Топология
 - Свойства элементов
 - Свойства материалов
 - Граничные условия
 - **Нагрузки**
 - Что нужно получить в результате анализа?

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ В данном примере будем использовать запись FORCE



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-----|---|-----|------|-----|----|----|---|----|
| FORCE | SID | G | CID | F | N1 | N2 | N3 | | |
| FORCE | 10 | 2 | | 2.E5 | 1.0 | | | | |

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ где

| <u>Поле</u> | <u>Содержимое</u> |
|-----------------|--|
| SID | Номер варианта (set) нагрузки (целое число > 0) |
| G | Номер узла, к которому прикладывается нагрузка (целое число > 0) |
| CID | Идентификационный номер координатной системы относительно которой задаются компоненты силовой нагрузки (целое число > 0, по умолчанию используется глобальная система координат) |
| F or M | Масштабный коэффициент (веществ.) |
| N1,N2,N3 | Компоненты вектора силы, определяемые в координатной системе CID (веществ., хотя бы одно значение не должно быть равно нулю) |

$$\vec{f} = F\vec{N}$$

$$\vec{m} = M\vec{N}$$

$$\vec{N} = (N1, N2, N3)$$

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Для данного примера,

- Свойства элемента ($A = 5.0$)
- Свойства материала
($E = 29E+6$ psi, $G = 11. E+6$ psi, $\sigma_y = 36000$ psi)
- Приложенная нагрузка ($P = 2.E+5$ lbs)

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ В результате входной файл выглядит таким образом:

```
begin bulk
$
$   GEOMETRY AND BOUNDARY CONDITION
$
GRID   1           0.    0.    0.    123456
GRID   2          100.    0.    0.    23456
$
$   ELEMENT CONNECTIVITY
$
CROD   100    1    1    2
$
$   ELEMENT PROPERTY
$
PROD   1    201    5.
$
$   MATERIAL PROPERTY
$
MAT1   201    2.9+7    11.+6
+M1    36000.
$
$   LOADING
$
FORCE  1    2           2.E5    1.    0.    0.
$
enddata
```

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

□ Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC.Nastran?

- Геометрия (GRID запись)
- Топология
- Свойства элементов
- Свойства материалов
- Граничные условия
- Нагрузки
- **Что нужно получить в результате анализа?**

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- В данном примере в результате анализа мы хотим получить перемещения, силы действующие в элементе и напряжения
- Для этого необходимо сделать запрос в секции Case Control входного файла (позднее данная секция будет рассмотрена более детально)

```
DISP      = ALL  
FORCE    = ALL  
STRESS   = ALL
```

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

Отрывок выходного файла MSC.Nastran

DISPLACEMENT VECTOR

| POINT ID. | TYPE | T1 | T2 | T3 | R1 | R2 | R3 |
|-----------|------|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | G | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | G | 1.379310E-01 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

$$\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(2.E+5)(100.)}{(5.)(29.E+6)} = 1.37931E-01$$

Ручной счет

FORCES IN ROD ELEMENTS (CROD)

| ELEMENT ID. | AXIAL FORCE | TORQUE | ELEMENT ID. | AXIAL FORCE | TORQUE |
|-------------|--------------|--------|-------------|-------------|--------|
| 100 | 2.000000E+05 | | | | |

Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

Отрывок выходного файла MSC.Nastran

STRESSES IN THE ROD ELEMENTS (CROD)

| ELEMENT ID. | AXIAL STRESS | SAFETY MARGIN | TORSIONAL STRESS | SAFETY MARGIN | ELEMENT ID. | AXIAL STRESS | SAFETY MARGIN | TORSIONAL STRESS | SAFETY MARGIN |
|-------------|--------------|---------------|------------------|---------------|-------------|--------------|---------------|------------------|---------------|
| 100 | 4.000000E+04 | -1.0E-01 | | | | | | | |

Ручной счет

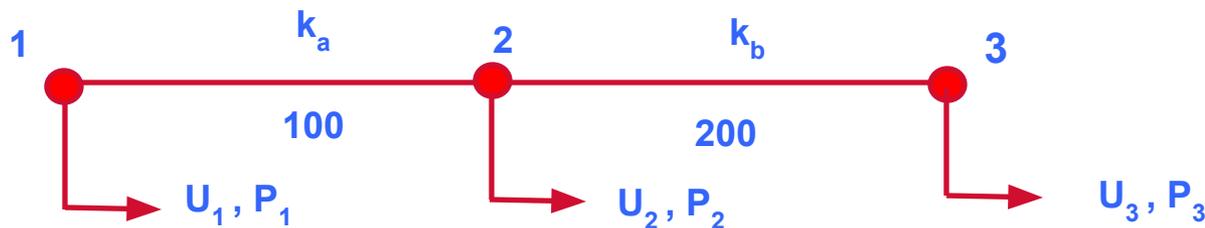
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2.E+5}{5} = 4.0E+4$$

$$M.S. = \frac{\text{Stress}_{\text{allow}}}{\text{Stress}_{\text{actual}}} - 1.0$$

$$M.S._{\text{axial}} = \frac{36000.}{40000.} - 1.0 = -0.1$$

Глобальная матрица жесткости

- До этого рассматривалась матрица жесткости одного элемента. Теперь рассмотрим глобальную матрицу жесткости реальной конструкции
- Реальная конструкция может быть представлена как совокупность отдельных элементов
- Ансамбль матриц жесткости элементов, представляющих конструкцию, называется глобальной матрицей жесткости
- Для следующих двух ROD элементов с осевым нагружением:



Глобальная матрица жесткости (продолжение)

- Матрицы жесткости отдельных элементов с номерами 100 и 200 можно представить следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

- Отсюда глобальная матрица жесткости запишется как ансамбль матриц жесткости элементов:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & (k_a + k_b) & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

Глобальная матрица жесткости (продолжение)

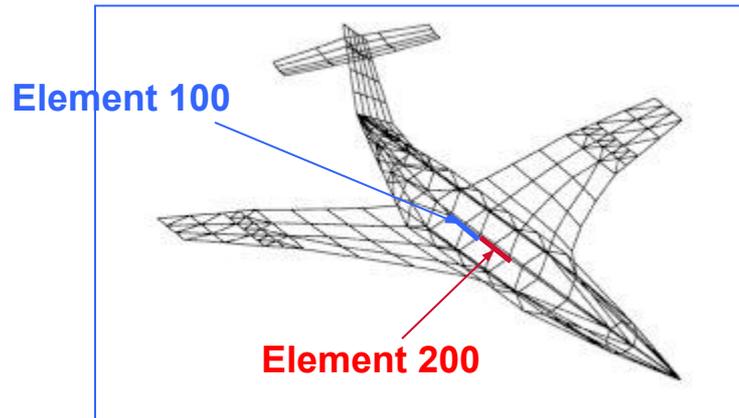
- ❑ Глобальная матрица жесткости определяется суперпозицией матриц жесткости отдельных элементов
- ❑ Прямое определение матрицы жесткости элемента (т.е. вывод формул вручную) ограничено одно- и двумерными элементами с ограниченным числом степеней свободы
- ❑ Для элементов более высокого порядка (балки, пластины, объемные тела) более целесообразно использовать для формирования матрицы жесткости энергетические принципы и так называемые функции форм элементов

Глобальная матрица жесткости (продолжение)

- Собрав глобальную матрицу жесткости так, как показано в уравнении 2-7, можно затем решить это уравнение с использованием той же процедуры, что и с одним элементом
- Эта процедура состоит в следующем:
 - Наложение достаточных граничных условий, путем удаления соответствующих строк и столбцов в уравнении 2-7
 - При исключении движения конструкции как твердого тела, необходимо помнить, что конечноэлементные системы работают в 3-х мерном пространстве. Это значит, что создаваемый вариант граничных условий должен исключить любое перемещение модели как твердого тела в трех измерениях.
 - Решение $\{ u \} = [K]^{-1} \{ P \}$
 - Заметим, что для решения MSC.Nastran использует процедуру DCMP/FBS вместо обращения матрицы жесткости

Процедура анализа сложной конструкции

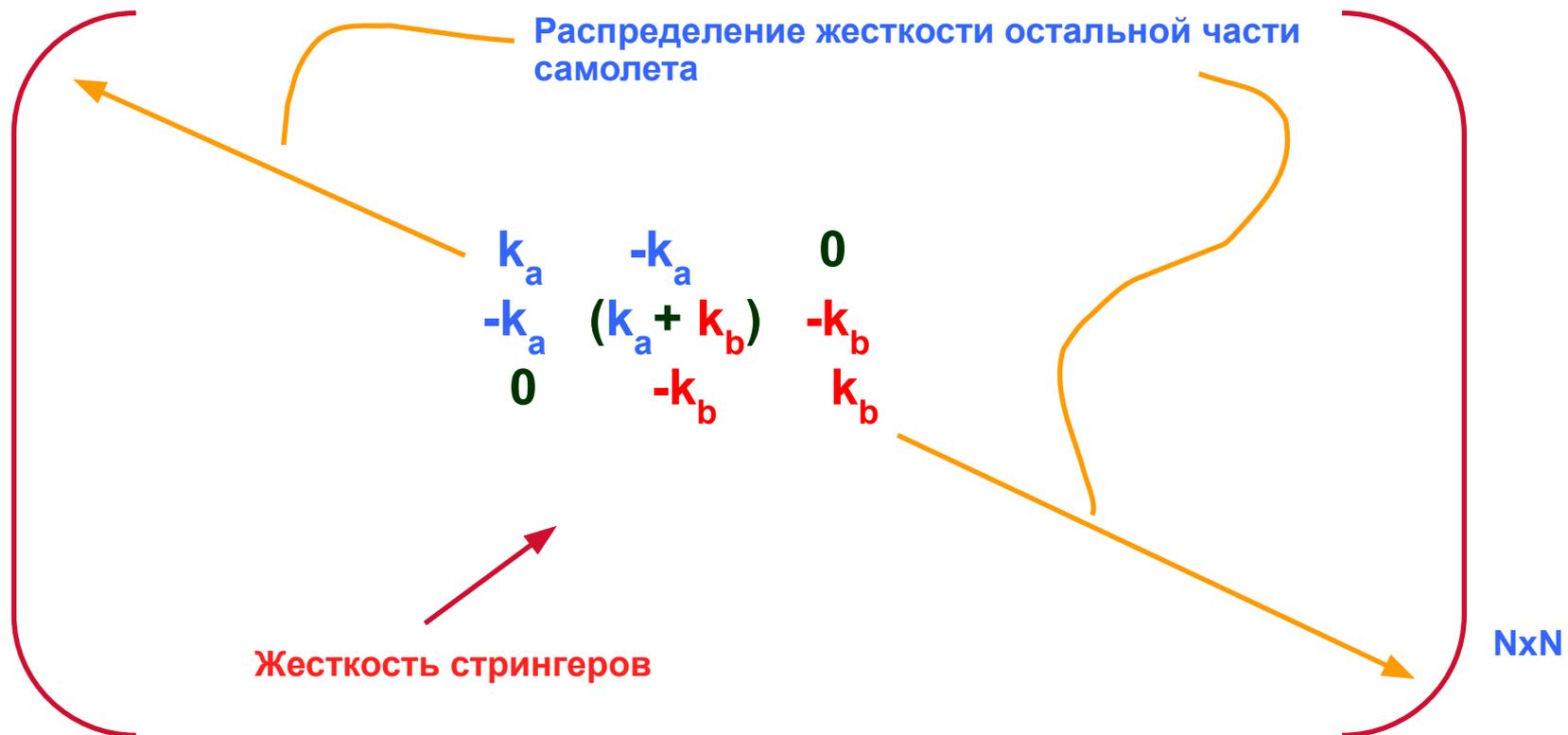
- Процедура использованная для одного элемента и для двух элементов - может быть расширяться для анализа сложной конструкции. Например, при анализе конструкции самолета:



- Два выделенных стрингера могут быть представлены, например, двумя матрицами жесткости ROD элементов, рассмотренных ранее

Процедура анализа сложной конструкции (продолжение)

- Глобальная матрица жесткости размерностью $N \times N$



Процедура анализа сложной конструкции (продолжение)

- ❑ Жесткостные характеристики остальной части самолета находятся составлением ансамбля из отдельных жесткостей элементов, используя тот же самый принцип, рассмотренный для двухэлементной модели
- ❑ Общее поведение конструкции находится с учетом поведения каждого элемента, входящего в нее
- ❑ Пользователь несет ответственность за дискретизацию реальной конструкции на конечные элементы
- ❑ Графический препроцессор MSC.Patran поможет Вам сгенерировать конечноэлементную сетку для самой сложной конструкции
- ❑ В общем случае, более качественная и мелкая сетка увеличивает время решения

Процедура анализа сложной конструкции (продолжение)

- **Ресурсы компьютера (время работы центрального процессора), используемые MSC.Nastran (при размерности модели в N степеней свободы).**
 - **Задержки (\sim постоянные)**
 - **Формирование матрицы жесткости ($\sim N$);**
 - **Решение системы уравнений ($\sim N^2$, постоянно уменьшается с внедрением новых численных методов и применением новых компьютеров);**
 - **Получение требуемых результатов ($\sim N$);**
- **Заметим, что конечноэлементная сетка у рассмотренного самолета была очень грубая. Такая сетка была сделана только для более полного понимания процесса составления глобальной матрицы жесткости**

Выходные данные MSC.Nastran

- При запуске MSC.Nastran Вы можете запросить любую рассчитываемую величину. Вот некоторые из них:
 - Компоненты перемещений узлов
 - Результаты для элементов
 - напряжения
 - деформации
 - энергия деформаций
 - внутренние силы и моменты
 - Результаты для узлов
 - прикладываемые нагрузки
 - силы реакций
 - силы, возникающие в узлах

Проверка модели

- Пользователь должен проверить точность результатов, полученных в результате анализа
- Некоторые виды проверки выполняются так:
 - Графическое отображение модели для визуальной проверки
 - Проверка ответной реакции модели на приложенную нагрузку
 - Проверка баланса входной нагрузки и сил реакции
 - Проведение ручной проверки результатов, когда это возможно
 - Смотри: Proceedings of the 1986 MSC World Users' Conference, "MSC.Nastran Model Checkout" by the Jet Propulsion Laboratory.

Некоторые советы по моделированию

- ❑ Прежде чем начать моделирование необходимо иметь инженерное представление о поведении конструкции
- ❑ Определите все точки приложения нагрузки и закреплений
- ❑ Разложите общую нагрузку на составляющие: изгибающую, крутящую, сдвиговую и осевую
- ❑ Более тщательно разбейте область, где ожидается большой градиент напряжений. Увеличение числа элементов, как правило, дает возможность повысить точность расчета
- ❑ Попробуйте использовать симметрию модели

Некоторые советы по моделированию (продолжение)

- ❑ Обдумайте затраты компьютерных ресурсов - увеличение числа степеней свободы увеличивает загрузку компьютера, время моделирования и время, необходимое для представления результатов моделирования
- ❑ С целью определения соотношений между числом элементов, точностью решения и стоимостью моделирования должны быть проведены расчеты на небольших моделях
- ❑ Используйте небольшие простые тестовые модели для проверки незнакомых методов и технологий моделирования, прежде чем приступить к дорогостоящему реальному моделированию
- ❑ MSC.Nastran ничего не знает о применяемой системе единиц. Физические величины в исходных данных должны задаваться в одной системе единиц

Единицы измерения

□ Пример

| <u>Исходные данные</u> | <u>Система единиц</u> | |
|------------------------|------------------------|--------------------|
| | <u>Английская</u> | <u>Метрическая</u> |
| Геометрия | дюйм | мм |
| Модуль упругости | Фунт/дюйм ² | Н/мм ² |
| Прикладываемые моменты | дюйм*фунт | мм*Н |
| Прикладываемые силы | фунт | Н |

} Должны быть в одной системе единиц

| <u>Результаты расчетов</u> | <u>Система единиц</u> | |
|----------------------------|------------------------|-------------------|
| Перемещения | дюймы | мм |
| Напряжения | Фунт/дюйм ² | Н/мм ² |

Единицы измерения (продолжение)

| Система единиц | Масса | Длина | Время | Сила | g |
|----------------|---|-------|-------|--------|---------------------------|
| Английская | $\frac{\text{Фунт} \cdot \text{с}^2}{\text{фут}}$ | фут | с | фунт | 32.174 фут/с ² |
| Техническая | $\frac{\text{кГс} \cdot \text{с}^2}{\text{см}}$ | см | с | кГс | 981 см/с ² |
| СИ | кг | метр | с | Ньютон | 9.81 м/с ² |

$$F = M a: \quad \text{масса (M)} = \text{вес} / g$$

Примечание: Для динамического анализа требуется массовая плотность (не весовая).

Пример: массовая плотность стали = весовая плотность / g =

$$\frac{0.283 \text{ фунт} / \text{дюйм}^3}{32.174 \frac{\text{фут}}{\text{с}^2} \left(\frac{12 \text{ дюйм}}{1 \text{ фут}} \right)} = 7.324 \text{E} - 4 \frac{\text{фунт} \cdot \text{с}^2}{\text{дюйм}^4}$$

Обзор процедуры решения методом конечных элементов

БЛОК-СХЕМА СТАТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА



Литература по матричному анализу

H. C. Martin
Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis
McGraw-Hill Book Company
1966

J. S. Przemieniecki
Theory of Matrix Structural Analysis
McGraw-Hill Book Company and Dover Publications
1968

M. F. Rubinstein
Matrix Computer Analysis of Structures
Prentice-Hall, Inc.
1966

M. D. Vanderbilt
Matrix Structural Analysis
Quantum Publishers, Inc.
1974

Литература по МКЭ

K. J. Bathe (theoretical)

Finite Element Procedures in Engineering Analysis

Prentice-Hall, Inc.

1982

R. D. Cook (theoretical, applications)

Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd Edition

John Wiley and Sons, Inc.

1981

R. H. Gallagher (applications)

Finite Element Analysis Fundamentals

Prentice-Hall, Inc.

1975

O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor (theoretical)

The Finite Element Method, 4rd Edition

McGraw-Hill Book Company

1989

R. H. MacNeal (theoretical applications)

Finite Elements: Their Design and Performance

Marcel Dekker, Inc.

1994

A. O. Cifuentes (MSC/NASTRAN applications)

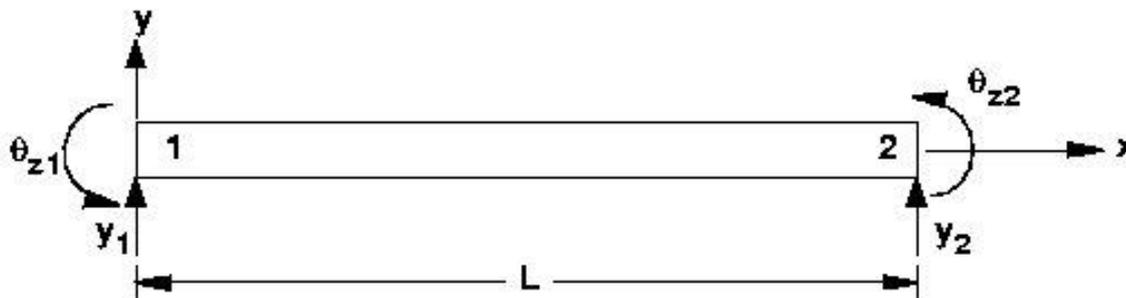
Using MSC/NASTRAN: Statics and Dynamics

Springer-Verlag

1989

Матрица жесткости балочного (BAR) элемента

- Рассмотрим матрицу жесткости BAR элемента.
- В качестве иллюстрации рассмотрим нагружение перерезывающей силой и моментом только в одной плоскости (x-y, 2-D).



Четыре степени свободы

{ 2 вращения вокруг z (θ_{z1}, θ_{z2})
2 перемещения в (y_1, y_2)

На каждом конце элемента прикладываются нагрузки в виде сил P_y и моментов M_z

Матрица жесткости балочного (BAR) элемента (продолжение)

- Матрица жесткости для BAR элемента для двумерной модели, включающей только сдвиг и момент в плоскости x-y:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} P_{y1} \\ M_{z1} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}}_{\{P\}} = \frac{2EI}{L^3} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_{z1} \\ y_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}}_{\{u\}}$$

- Подобный подход может быть использован для трехмерного BAR элемента, для которого размер матрицы будет 12x12.

Элемент СВАР

- ❑ Соединяет две узловые точки.
- ❑ Формулировки получены из классической балочной теории (плоские сечения остаются плоскими после деформации).
- ❑ По умолчанию используется теория Бернулли-Эйлера (дополнительно можно учесть поперечный сдвиг).
- ❑ Компоненты сил
 - ❑ Осевая сила, P
 - ❑ Кручение, T
 - ❑ Изгибающие моменты в двух перпендикулярных плоскостях, M_i
 - ❑ Сдвиг в двух перпендикулярных плоскостях, V_i

Элемент СВАР (продолжение)

- Компоненты перемещения
 - u_i
 - θ_i
- Нейтральная ось может иметь отступ относительно узловых точек (создается внутренняя жесткая связь)
- Возможность задания шарниров используется для представления звеньев и т.п.
- Принципиальные ограничения
 - Постоянная призматическая форма (т.е. свойства не зависят от длины)

Элемент СВАР (продолжение)

- **Принципиальные ограничения (продолжение)**
 - Центр сдвига и нейтральная ось должны совпадать (поэтому не рекомендуется для моделирования швеллеров)
 - Эффект повышения жесткости при кручении за счет коробления поперечных сечений не учитывается
 - Нет крутильного массового момента инерции
- Если вышеуказанные ограничения важны, используйте для моделирования **BEAM** элемент, который этих ограничений не имеет.
- Смотрите: **MSC.Nastran Linear Static Analysis User's Guide** или **MSC.Nastran Reference Manual** для более детального описания **BAR** элемента.

Описание СВАР элемента

□ Топология СВАР элемента

Геометрия

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-----|-----|-----|-------|------|-----|--|-----|
| СВАР | EID | PID | GA | GB | X1,G0 | X2 | X3 |  | |
| СВАР | 2 | 102 | 7 | 8 | | 1.0 | 1.0 | | +B1 |
| | PA | PB | W1A | W2A | W3A | W1B | W2B | W3B | |
| +B1 | | | 0.5 | | 0.5 | -1.2 | | 0.6 | |



Карта продолжения

Поле

Содержимое

EID

Идентификационный номер элемента

PID

Идентификационный номер карты свойств
элемента PVAR

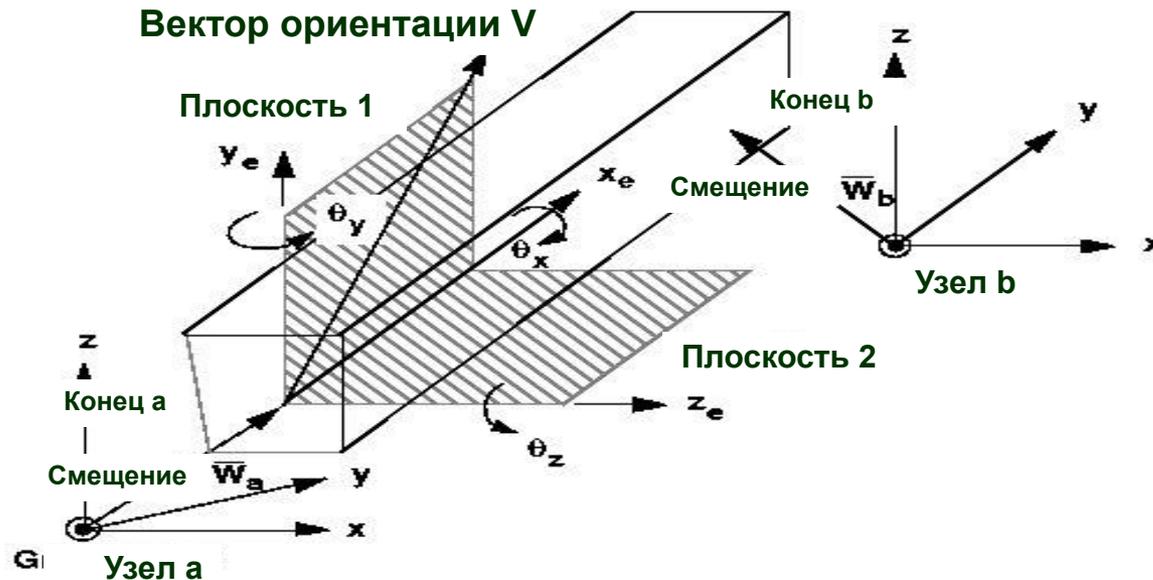
Описание СВАР элемента

| | |
|--|--|
| GA, GB | Идентификационные номера соединяемых узлов |
| X1, X2, X3 | Компоненты вектора V на конце A , задаваемые в системе координат перемещений для узла GA . Используются для ориентации системы координат элемента |
| G0 | Идентификационный номер узла для альтернативного определения $X1, X2, X3$. |
| PA, PB | Флаги шарниров для узлов A и B . Используются для моделирования звеньев и/или рычагов |
| W1A, W2A, W3A W1B, W2B, W3B | Компоненты векторов отступов нейтральной оси w_a и w_b в системе координат перемещений для узлов GA и GB . |

Описание СВАР элемента (продолжение)

□ Система координат СВАР элемента

- Определяется пользователем путем задания вектора V
- Ориентирует свойства сечения
- Ориентирует выходные силы и напряжения



Описание СВАР элемента (продолжение)

Ось X элемента: Всегда совпадает с линией соединяющей A и B.
Положительное направление от A к B.

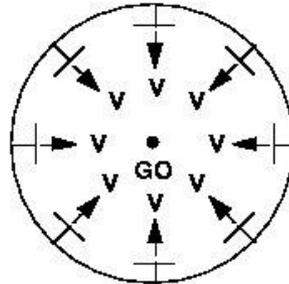
Плоскость X-Y элемента: Определяется вектором \bar{V} , который лежит в плоскости $X_e - Y_e$. Плоскость 1 всегда совпадает с плоскостью $X_e - Y_e$

Ось Z элемента: Результат векторного произведения $X_e * \bar{V}$.
Плоскость 2 всегда совпадает с плоскостью $X_e - Z_e$

Примечание: Плоскости 1 и 2 не обязательно являются главными плоскостями. На совпадение этих плоскостей с главными плоскостями указывает нулевая величина момента инерции (I_{12}) в карте PBAR.

Описание СВАР элемента (продолжение)

- Далее следуют два примера в которых, задается вектор ориентации системы координат элемента СВАР каждым из двух возможных способов ($G0$ или X_1, X_2, X_3).

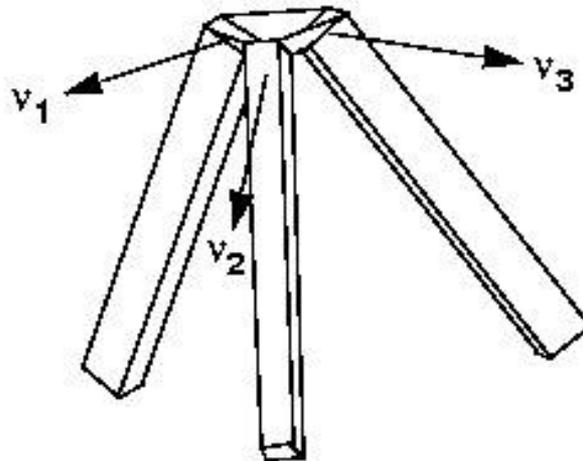


- Если задавать стрингеры фюзеляжа элементами СВАР, при этом используя способ $G0$ для определения вектора ориентации, то это значительно облегчит ввод данных

Примечание: Если в данном случае третий узел $G0$ вводится только с целью задания вектора ориентации системы координат элемента, то все степени свободы в $G0$ не связаны с исследуемой конструкцией и должны быть закреплены. В противном случае матрица жесткости системы будет сингулярной.

Описание СВАР элемента (продолжение)

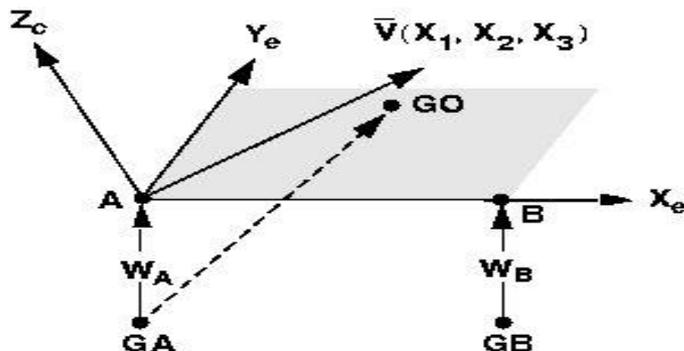
- Для определения ориентации ножек треножника, моделируемого элементами СВАР, как показано, будет более эффективно использовать координаты точки (X_1, X_2, X_3) для задания вектора ориентации \bar{V} , так как ориентация каждой ножки уникальна.



Описание СВАР элемента (продолжение)

□ Смещения:

- Концы элемента СВАР могут быть смещены относительно узлов (GA , GB) посредством задания векторов смещения WA и WB в записи СВАР.
- Вектор смещения можно интерпретировать как жесткую связь между узлами и концами элемента.
- Система координат элемента определяется с учетом смещения концов BAR элемента.



Начало вектора V находится в смещенной точке A , если он определяется компонентами (X_1, X_2, X_3) .

Начало вектора V находится в точке GA если он описан с использованием GO .

Описание СВАР элемента (продолжение)

□ Флаги шарниров:

- Пользователь указывает степени свободы на каждом из концов BAR элемента которые не передают соответствующие силы или моменты.
- Флаги шарниров RA и RB задаются в системе координат элемента и записываются в полях 2 и 3 в продолжении карты СВАР.

Примечание: Флаги шарниров - это силовые ограничения.
SPC – это ограничение перемещений.

Описание оператора PVAR

- Свойства CVAR элемента записываются операторами PVAR или PVARL:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-------|------|-------|-------|--------|------|-------|-----|
| PVAR | PID | MID | A | I1 | I2 | J | NSM | | |
| PVAR | 102 | 202 | 0.30 | .0090 | .0063 | 0.0124 | | | +P1 |
| \$ | C1 | C2 | D1 | D2 | E1 | E2 | F1 | F2 | |
| +P1 | 0.3 | -0.25 | 0.3 | 0.25 | -0.3 | 0.25 | -0.3 | -0.25 | +P2 |
| \$ | K1 | K2 | I12 | | | | | | |
| +P2 | | | | | | | | | |

Поле

Содержимое

PID Идентификационный номер карты свойства

MID Идентификационный номер карты материала

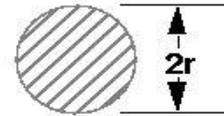
Описание оператора PVAR (продолжение)

| <u>Поле</u> | <u>Содержимое</u> |
|-------------|--|
| A | Площадь сечения элемента |
| I1,I2,I12 | Моменты инерции сечения ($I_1 = I_{zz}$, $I_2 = I_{yy}$, $I_1 I_2 > I_{12}^2$). Определяются с учетом системы координат элемента. |
| J | Полярный момент инерции |
| CI,DI,EI,FI | Коэффициенты для расчета напряжений. Должны быть определены, если будут выводиться изгибные напряжения. |
| K1,K2 | Факторы сдвига в плоскостях 1 и 2 (по умолчанию - бесконечность, т.е. балка имеет бесконечную жесткость на сдвиг). Если $I_{12} \neq 0$, то K1 и K2 игнорируются. |

Расчет моментов инерции J для некоторых сечений

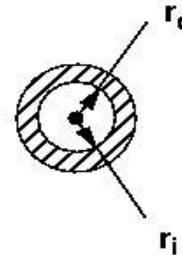
КРУГ

$$J = \frac{1}{2}\pi r^4$$



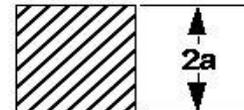
КОЛЬЦЕВОЕ
СЕЧЕНИЕ

$$J = \frac{1}{2}\pi(r_o^4 - r_i^4)$$



КВАДРАТ

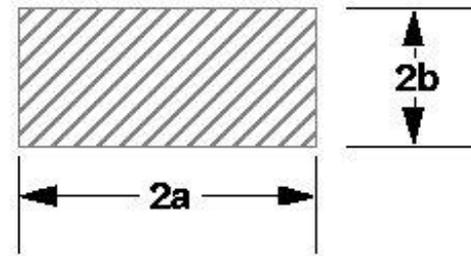
$$J = 2.25 a^4$$



Расчет моментов инерции J для некоторых сечений (продолжение)

ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ

$$J = ab^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$



Формулы для других не круговых сечений можно найти в книге R.J. Roark and W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*, 5th ed., Table 20 страницы 290-296.

Поперечный сдвиг

- Сдвиговые перемещения балки - V , рассчитываются по формуле

$$V = (F_z * L) / (K * A * G)$$

где

- F_z - силы сдвига в направлении Z элемента
- L - длина балки
- K - коэффициент сдвига
- A - площадь сечения
- G - модуль сдвига балки

и величина $1/K*A*G$ называется сдвиговой податливостью балки

Поперечный сдвиг (продолжение)

- ***K* определяет распределение сдвига по сечению элемента и ее величина зависит от формы сечения.**
- **В записи PVAR:**
 - ▣ ***K1* сопротивление сдвигу в направлении оси *Y* элемента.**
 - ▣ ***K2* сопротивление сдвигу в направлении оси *Z* элемента.**

Поперечный сдвиг (продолжение)

□ Значение К для некоторых сечений

| Форма поперечного сечения | Значение К |
|---------------------------|----------------|
| Прямоугольник | 5/6 |
| Окружность | 9/10 |
| Тонкостенная труба | 1/2 |
| Широкие балки | |
| Малая ось | $\sim Af/1.2A$ |
| большая ось | $\sim Aw/A$ |

Литература:

Roark and Young, **Formulas for Stress and Strain**,
5th ed., стр. 185.

Описание СВАР элемента (продолжение)

- Ориентация системы координат элемента определяет плоскости сечения 1 и 2, ориентацию моментов инерции, выводимые при расчете напряжения. Для этой системы координат элемента:

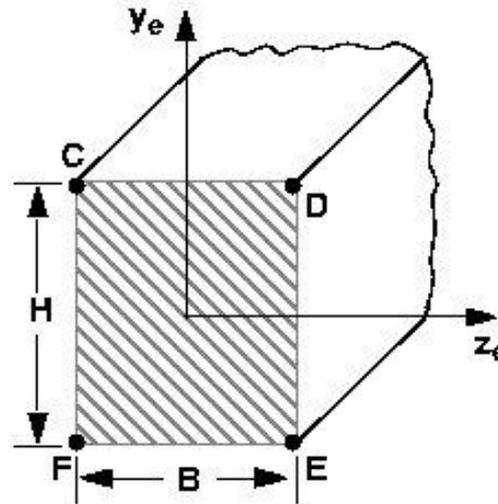
Моменты инерции в плоскости 1:

$$I_1 = I_{zz} = \frac{BH^3}{12}$$

Моменты инерции в плоскости 2:

$$I_2 = I_{yy} = \frac{HB^3}{12}$$

$$\begin{aligned} C &= .5H, -.5B \\ D &= .5H, .5B \\ E &= -.5H, .5B \\ F &= -.5H, -.5B \end{aligned}$$



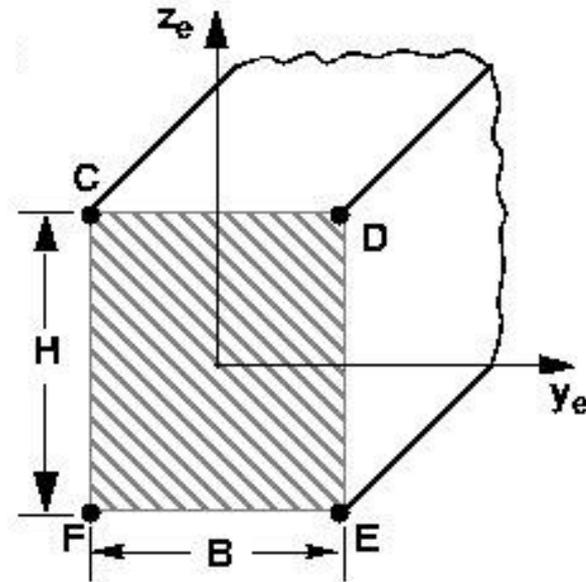
Описание СВАР элемента (продолжение)

- Для такой системы координат элемента:

$$I_1 = I_{zz} = \frac{HB^3}{12}$$

$$I_2 = I_{yy} = \frac{BH^3}{12}$$

$$\begin{aligned} C &= -.5B, .5H \\ D &= .5B, .5H \\ E &= .5B, -.5H \\ F &= -.5B, -.5H \end{aligned}$$



Описание оператора PBARL

□ Формат записи PBARL:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|------|--------|-------|------|------|------|------|------|----|
| PBARL | PID | MID | GROUP | TYPE | | | | | |
| | DIM1 | DIM2 | DIM3 | DIM4 | DIM5 | DIM6 | DIM7 | DIM8 | |
| | DIM9 | -etc.- | NSM | | | | | | |

Пример:

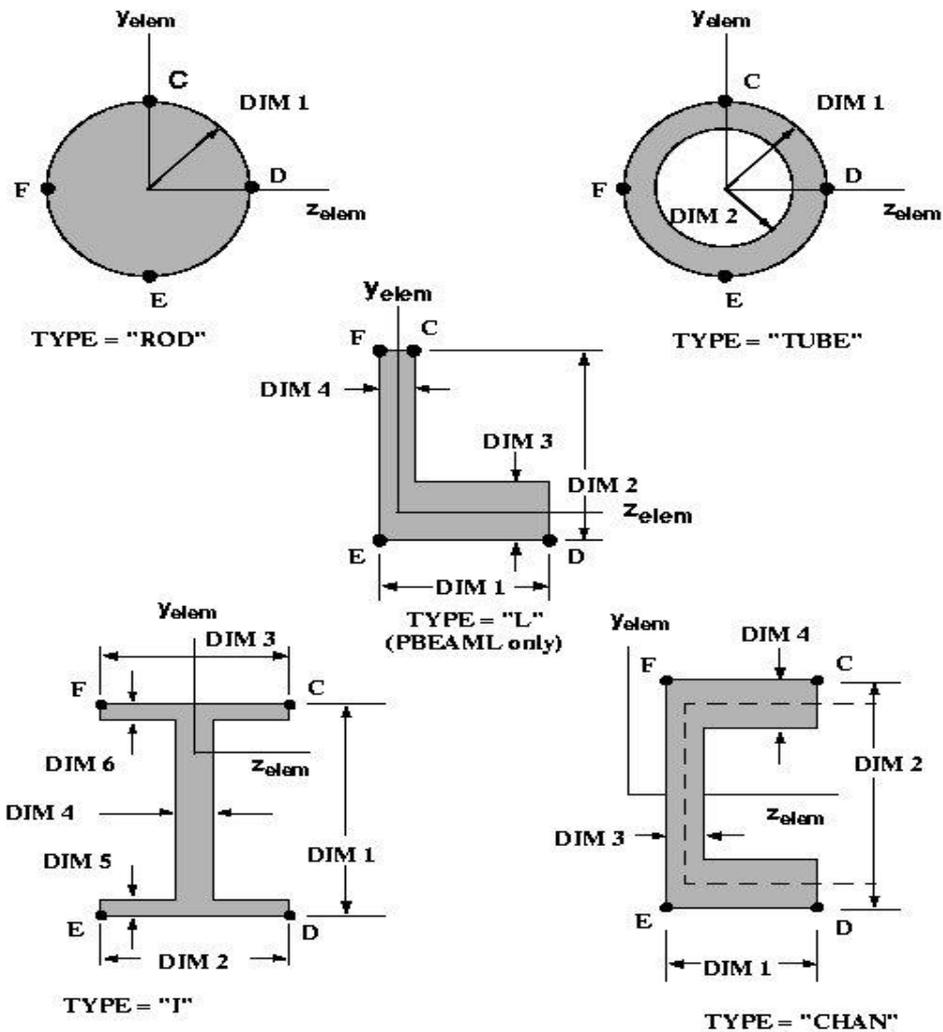
| | | | | | | | | | |
|-------|-----|----|----|----|----|--|--|--|--|
| PBARL | 39 | 6 | | 1 | | | | | |
| | 14. | 6. | .5 | .5 | .5 | | | | |

Описание оператора PVARL (продолжение)

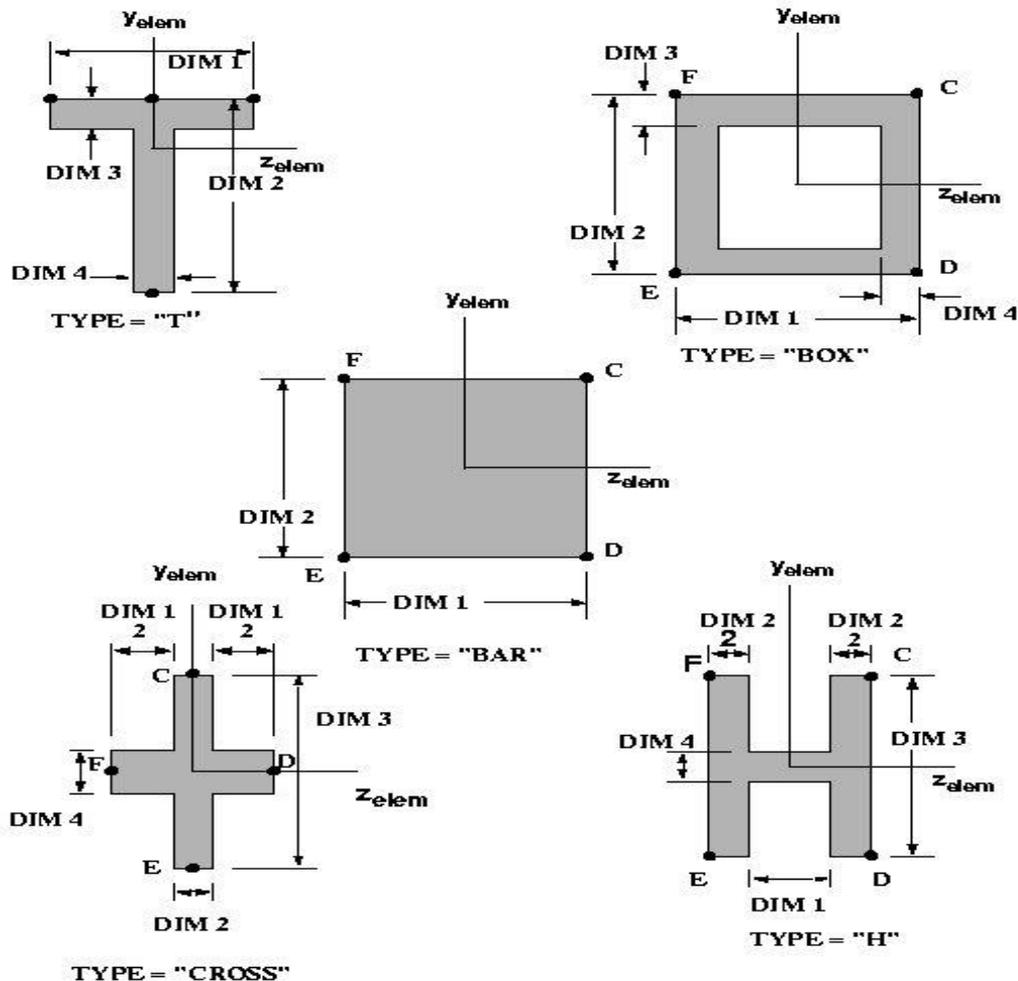
□ где

| <u>Поле</u> | <u>Содержимое</u> |
|-------------|---|
| PID | Идентификационный номер карты свойства |
| MID | Идентификационный номер материала |
| GROUP | Группа поперечного сечения Default="MSCBMLO") |
| TYPE | Строковая: 'ROD', 'TUBE', 'I', 'CHAN', 'T', 'BOX', 'BAR', 'CROSS', 'H', 'T1', 'I1', 'CHAN1', 'Z', 'CHAN2', 'T2', 'BOX1', 'HEXA', 'HAT' for GROUP="MSCBMLO") |
| DIMI | Размеры поперечного сечения |
| NSM | Неконструкционная масса на единицу длины, NSM определяется после последнего DIMI |

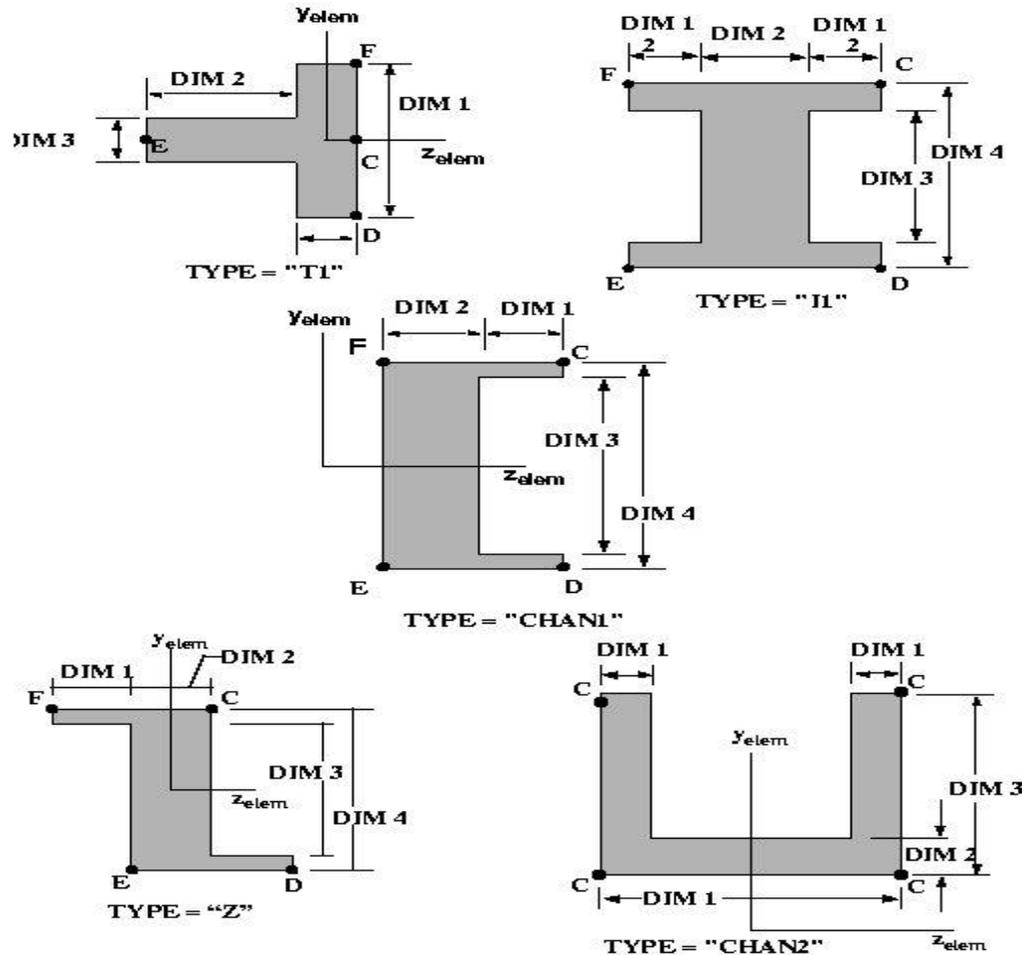
Описание оператора PVARL (продолжение)



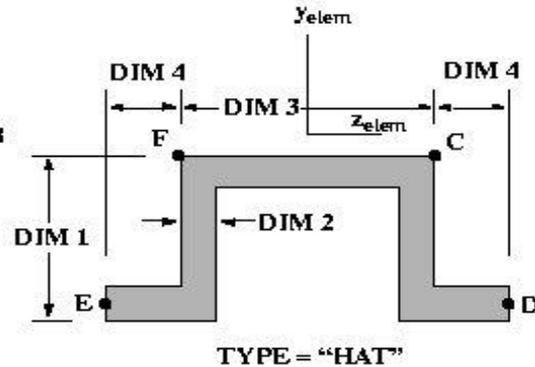
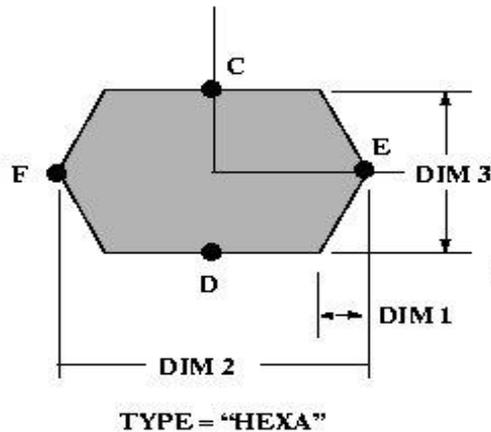
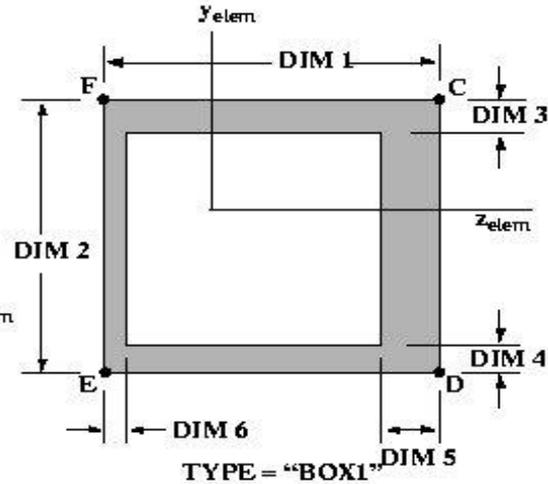
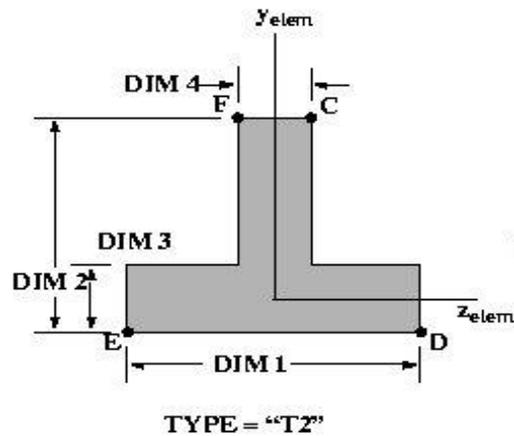
Описание оператора РВАРL (продолжение)



Описание оператора PVARL (продолжение)

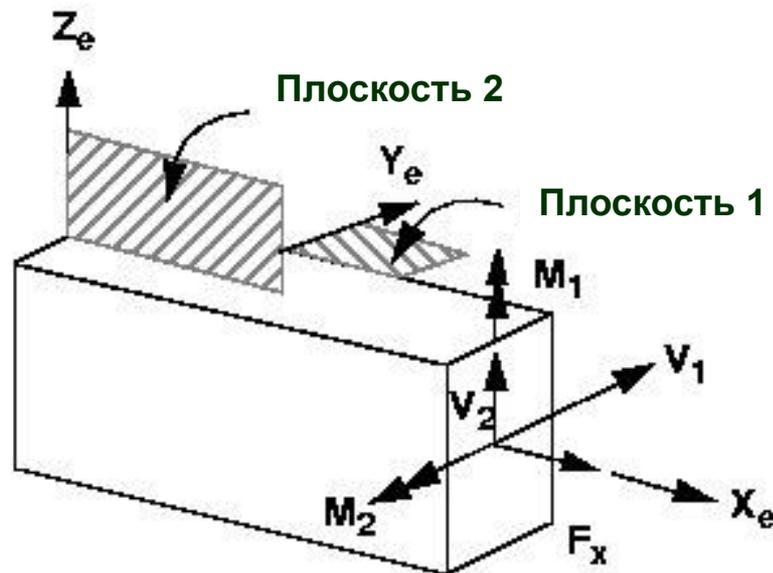


Описание оператора PVARL (продолжение)



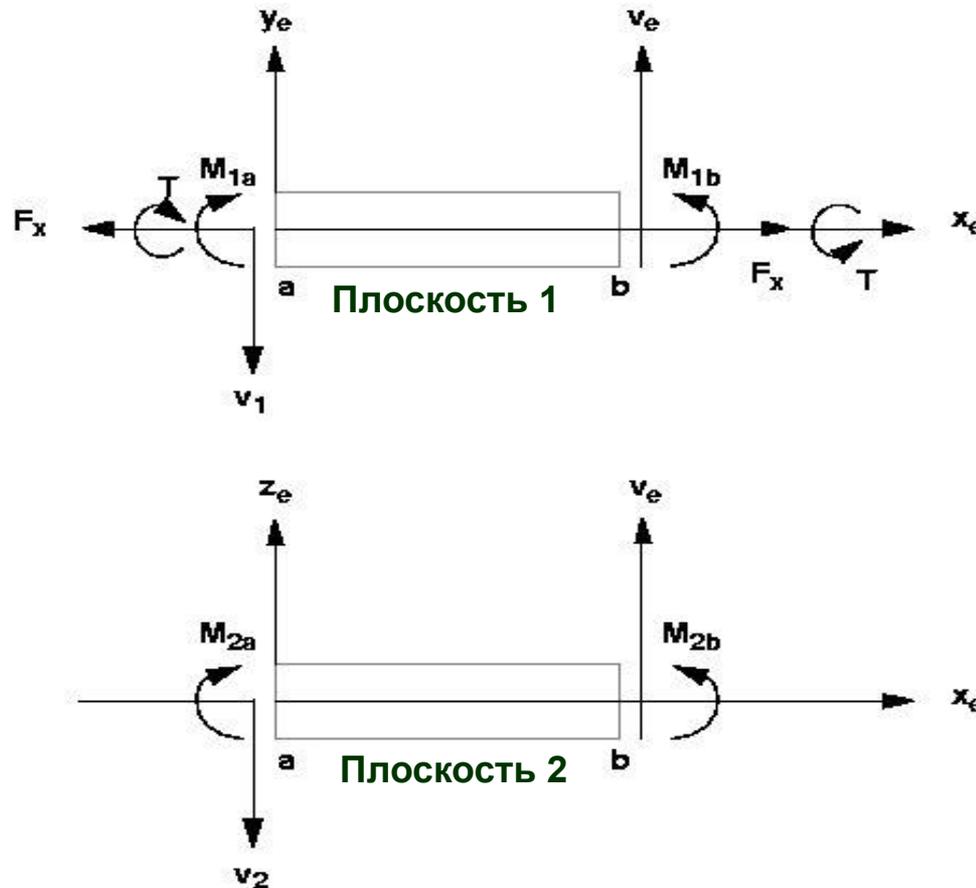
Силы в балочном элементе

□ Внутренние силы и моменты элемента BAR:



Силы в балочном элементе (продолжение)

Это можно также представить как:



Пример применения СВАР элемента

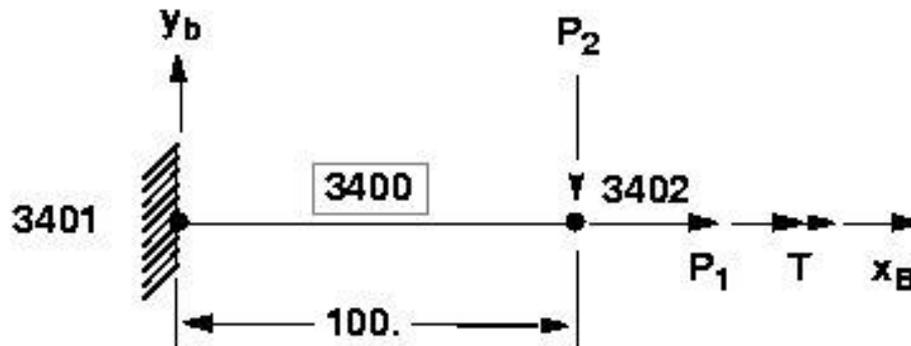
Пример:

Приложенная нагрузка

$$P_1 = 2.4E + 4 \text{ lb}$$

$$P_2 = 5000. \text{ lb}$$

$$T = 4.0E + 4 \text{ ln-lb}$$



Пример применения СВАР элемента (продолжение)

□ Свойства

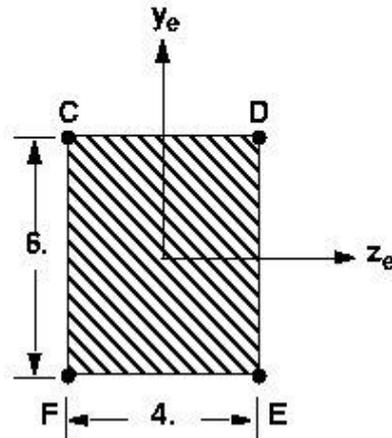
Свойства элемента

$$A = 24. \text{ in}^2$$

$$I_1 = I_{zz} = 72. \text{ in}^4$$

$$I_2 = I_{yy} = 32. \text{ in}^4$$

$$J = 75.12 \text{ in}^4$$



Свойства материала

$$E = 30.E + 6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 36000 \text{ psi}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 11.54E + 6 \text{ psi}$$

Входной файл MSC.Nastran для данного примера

```

1
SOL 101
CEND
TITLE = BAR EXAMPLE
$
LOAD = 100
DISP = ALL
FORCE = ALL
STRESS = ALL
$
BEGIN BULK
$
CBAR      3400      1      3401      3402      0.      1.      0.
GRID     3401      0.      0.      0.      0.      0.      123456
GRID     3402      100.    0.      0.
MAT1     10      30.+6      .3
+M1      36000.
FORCE    100      3402      2.4E4      1.      0.      0.
FORCE    100      3402      5000.    0.      -1.    0.
MOMENT   100      3402      1.      4.+4    0.      0.
$
PBAR     1      10      24.      72.      32.      75.12      +PB1
+PB1     3.      -2.      3.      2.      -3.      2.      -3.      -2.
$
OR
$PBARL   1      10      BAR      +PB1
$+PB1    4.      6.
$
ENDDATA *

```

Вывод перемещений для данного примера

DISPLACEMENT VECTOR

| POINT ID. | TYPE | T1 | T2 | T3 | R1 | R2 | R3 |
|-----------|------|--------------|---------------|-----|--------------|-----|---------------|
| 3401 | G | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 3402 | G | 3.333333E-03 | -7.716050E-01 | 0.0 | 4.614223E-03 | 0.0 | -1.157407E-02 |

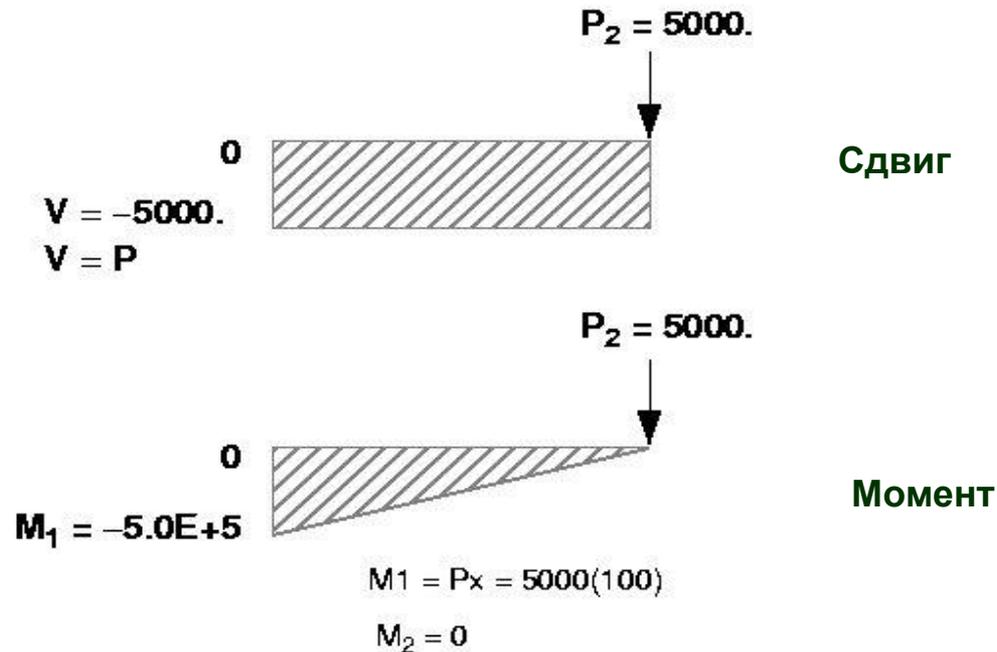
$$\Delta_1 = \frac{P_1 L}{AE} = \frac{(2.4E+4)(100.)}{(.24)(30.E+6)} = 3.33E-3 \text{ in.}$$

$$\Delta_2 = \frac{P_2 L^3}{3EI_1} = \frac{(5000.)(100.)^3}{(3)(30.E+6)(72.)} = 7.716E-1 \text{ in.}$$

Вывод сил в элементах для данного примера

FORCES IN BAR ELEMENTS (CBAR)

| ELEMENT ID. | BEND-MOMENT PLANE 1 | END-A PLANE 2 | BEND-MOMENT PLANE 1 | END-B PLANE 2 | - SHEAR - PLANE 1 | PLANE 2 | AXIAL FORCE | TORQUE |
|-------------|---------------------|---------------|---------------------|---------------|-------------------|---------|--------------|--------------|
| 3400 | -5.000000E+05 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -5.000000E+03 | 0.0 | 2.400000E+04 | 4.000000E+04 |



Вывод напряжений для данного примера

STRESSES IN BAR ELEMENTS (CBAR)

| ELEMENT ID. | SA1 SB1 | SA2 SB2 | SA3 SB3 | SA4 SB4 | AXIAL STRESS | SA-MAX SB-MAX | SA-MIN SB-MIN | M.S.-T M.S.-C |
|-------------|--------------|--------------|---------------|---------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| 3400 | 2.083333E+04 | 2.083333E+04 | -2.083333E+04 | -2.083333E+04 | 1.000000E+03 | 2.183333E+04 | -1.983333E+04 | 6.5E-01 |
| | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | 1.000000E+03 | 1.000000E+03 | 8.2E-01 |

Изгибные напряжения

Напряжения
от действия
осевой силы

Суммарные напряжения
от действия
осевой силы и изгиба

$$\sigma_{\text{bending}} = \frac{My}{I_1} = \frac{(5.0E+5)(3.)}{72.} = 2.0833E+4$$

$$\sigma_{\text{axial}} = \frac{P}{A} = \frac{2.4E+4}{24.} = 1.0E+3$$

$$\text{M.S.(T)} = \frac{S_{\text{allow}}}{|S_{\text{actual}}|} - 1.0 = \frac{36000.}{21833.} - 1.0 = 0.65$$

$$\text{M.S.(C)} = \frac{S_{\text{allow}}}{|S_{\text{actual}}|} - 1.0 = \frac{36000.}{19833.} - 1.0 = 0.82$$

необязательно