



Дифференциальные уравнения

Основные определения





Определение: Дифференциальным уравнением (n) -ого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную x , функцию y , и её производные до (n) -ого порядка включительно.

Определение: Наивысший порядок производной, входящий в уравнение называется порядком уравнения.





Определение: Всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставленная в уравнение (1), обращает его в тождество, называется решением этого уравнения.

Определение: Решить уравнение – значит, найти все его решения в заданной области.





Определение: Общим решением дифференциального уравнения называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad , \text{ которое содержит}$$

столько независимых постоянных, каков порядок этого уравнения.

Если общее решение задано в неявном виде

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$


называется общим интегралом дифференциального уравнения.






Определение: Всякое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, если производным постоянным, в него входящим придать определенные значения, называется частным решением этого дифференциального уравнения.





Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x; y; y') = 0$.
В простом случае $y' = f(x, y)$.





Определение: Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D , называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) Она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C , принадлежащих некоторому множеству.
- 2) Для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет заданному начальному условию.





Определение: Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$, при конкретном $C = C_0$ называется частным решением.

Определение задачи Коши: Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Определение: Общее решение $y = \varphi(x, C)$, построенное на плоскости графика, называется интегральной кривой.





Геометрически - общее решение представляет собой семейство интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, $C - \text{const}$ (любая).

Однако встречаются дифференциальные уравнения, имеющие также решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях C (в том числе и при $C = \pm\infty$).

Такие решения называются особыми. Графиком особого решения является интегральная кривая, которая в каждой своей точке имеет общую касательную с одной из интегральных кривых, определяемых общим решением.


Такая кривая называется огибающей семейства интегральных кривых.





Определение: Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.
Не существует общего метода решения дифференциального уравнения первого порядка.





Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение: Дано дифференциальное уравнение $f(x, y, y')=0$. Пусть его можно переписать в виде $y' = \frac{dy}{dx}$, и т.к.

$y' = f(x, y)$, то уравнение примет вид:
$$dy = f(x, y)dx.$$

Переменные x и y равноправны.





Определение: Дифференциальное уравнение $M(x, y)dy + N(x, y)dx = 0$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если :

$$M(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$N(x, y) = X_1(x) \cdot Y_1(y)$$






Метод решения:

$$X(x) \cdot Y(y)dy + X_1(x) \cdot Y_1(y)dx = 0 \quad \begin{array}{l} | :X(x) \neq 0 \\ | :Y(y) \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy + \frac{X_1(x)}{X(x)} dx = 0$$





Интегрируем обе части по x : $y=y(x)$

$$\int \frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy + \int \frac{X_1(x)}{X(x)} dx = 0 - \text{общий}$$

интеграл уравнения,

выраженный в новой форме.





Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Метод Бернулли.





Определение: Дифференциальные уравнения первого порядка вида $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$, где a, b, c – заданные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение: Если $a(x) \neq 0$, то уравнение называется приведенным линейным уравнением первого порядка.

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$





Метод решения:





Определение: Если $f(x) = 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется однородным и является относительно y' и y уравнением с разделяющимися переменными.

Определение: Если $f(x) \neq 0$, то линейное уравнение называется неоднородным.

$$y' + p(x)y = f(x)$$





Решение методом Бернулли y ищем в виде произведения функции $v = v(x)$ и $u = u(x)$,
т.е. $y = u \cdot v$

$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = f(x)$..., в уравнение

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = f(x)$$

Найдем одну функцию v такую, чтобы
 $v' + p(x) \cdot v = 0$;

v – любая, ($\neq 0$), так как только

$u \cdot v$ должно удовлетворять уравнению.





Уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x) \cdot v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0 \quad \frac{dv}{v} + p(x) \cdot dx = 0$$

$$\ln|v| + \int p(x)dx = 0 \quad (\text{так как одна из функций } \neq 0);$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx$$





Уравнение с разделяющимися переменными.

$$v = e^{-\int p(x)dx}, \quad u'v = f(x), \quad v'e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$u = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Общее решение:

$$y = \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Особых решений нет.






Уравнение Бернулли

Определение: Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^m$ называется уравнением Бернулли.

Метод решения: используем метод решения дифференциального уравнения первого порядка.

Варьируем произвольную постоянную.

Пусть $C = C(x)$. Найдем функцию $C(x)$ из условия что $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ является решением неоднородного дифференциального уравнения.





Метод вариации произвольной постоянной. Метод Лагранжа.

Дано: уравнение первого порядка вида $y' + p(x) \cdot y = f(x)$

Алгоритм решения.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Найдем его решение. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$$


$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$






$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x)) \cdot C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} -$$

$$C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = f(x)$$

$$C' = \frac{dc}{dx}, \quad C(x) = \int f(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} dx + C$$

Общее решение:

$$y = \left(\int f(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} dx + C \right) \cdot y = C(x) e^{-\int p(x) dx}$$




Однородные дифференциальные уравнения

Определение: Функция $f(x, y)$ называется однородной измерения M , если для любой

$$\lambda, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y) \quad .$$

Определение: Уравнение вида $P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$ называется однородным, если P и Q однородные функции одного измерения.





Теорема 1: Однородные дифференциальные уравнения первого порядка сводится к уравнению первого порядка с разделёнными переменными. С помощью подставим
где $U = \frac{y}{x}$, $v = \frac{x}{y}$, $U = U(x)$ ($v = v(x)$).





Теорема 2: Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ является однородным тогда и только тогда, когда $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения.





Теорема существования и единственности решения.

Особые решения.






Теорема Коши.

Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, то для любой точки в некотором интервале $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ существует притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

Геометрически это означает, что через каждую точку M области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения.





Определение: Точки области D , в котором нарушается единственность решения задачи Коши, называются особыми точками дифференциального уравнения.

Определение: Решение (интегральная кривая) уравнения $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением (особой интегральной кривой) этого уравнения.

Особое решение не может быть получено из общего, ни при каких значениях C (включая $C = \pm\infty$).






Графиком особого решения является огибающая семейства интегральных кривых, она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы уравнений.

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C) \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi(x, y, C) = 0 \\ \varphi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \quad \text{где}$$

$y = \varphi(x, C)$ - общий интеграл

$\varphi(x, y, C)$ - общее решение
дифференциального уравнения





Теорема существования и единственности решения задачи

**Коши для
дифференциальных
уравнения высших порядков**






Определение: $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$.

Определение: Задачей Коши для дифференциальных уравнений: $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ называется задача отыскания решения $y=y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным ????? условиям $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.



 **Определение:** Общим решением уравнения $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров C_1, C_2, \dots, C_n , является решением дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ найдутся постоянные C_1, C_2, \dots, C_n ????? определяемые из системы уравнений.

$$y_0 = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

$$y_0' = \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

$$y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$





Теорема: Существования и решения задачи Коши: Если дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ таково, что функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$

то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ принадлежащий D существует такой интервал $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

