

Раздел II. Математические модели нестационарных процессов теплообмена

Лекция 6. Основные понятия теории теплообмена

- **Теплообмен** – передача энергии в форме теплоты от тела с большей температурой телу с меньшей температурой.
- **Теплоотдача** – теплообмен в пределах фазы теплоносителя, направленный либо к поверхности раздела фаз, либо от неё.
- **Теплопередача** – теплообмен между двумя теплоносителями, разделенными стенкой или поверхностью контакта (раздела) фаз.
- **Тепловой поток** - поток энергии, передаваемой от горячего тела к холодному.
- **Массообмен** – процесс переноса вещества из одной области пространства или фазы в другую в неравновесных бинарных и многокомпонентных системах.
- **Массоотдача** - процесс переноса вещества в пределах одной фазы из глубины к поверхности раздела фаз или в обратном направлении.
- **Массопередача** – синоним массообмена.



Основные понятия теории теплообмена

Необходимые и достаточные условия процесса теплообмена (возникновения теплового потока) – наличие неодинаковых температур между различными областями пространства, заполненного средой.

Внимание! Единственным условием возникновения теплообмена является наличие разности температур между телами. При этом тепловой поток всегда направлен в сторону меньших температур.

Вывод: Предметом теории теплообмена можно считать процессы переноса теплоты из одной части пространства в другую обусловленные разностью их температур.

Замечание: Возникновение теплового потока связано не с абсолютным значением температуры тела, а с наличием разности температур в различных его точках. При этом разности температур можно приписать вполне определенное направление. Это позволяет по аналогии с гидродинамикой, ввести понятия поле температур и поле тепловых потоков. При этом скалярному полю температур соответствует векторное поле температурных градиентов, а условие возникновения теплового потока можно формулировать, как условие неравенства нулю величины ***gradT***.

Основные понятия теории теплообмена

Значимость процесса теплообмена в природе и в технике определяется тем, что свойства любых тел существенно зависят от температуры, т.е. их теплового состояния. Последнее же, определяется условиями теплообмена, которые в свою очередь, оказывают решающее значение на процессы жизнедеятельности биологических объектов; изменения агрегатного состояния вещества; на течение химических реакций, включая процессы горения; механические, электроизоляционные, магнитные и другие свойства тел.

Принято выделять три способа распространения теплоты:

- ✓ Теплопроводность, (кондукция) – процесс переноса за счет непосредственного обмена энергией между структурными частицами системы;
- ✓ Конвекция (перемешивание) – процесс переноса за счет перемещения составляющих системы, которые состоят из большого количества структурных частиц;
- ✓ Излучение (радиация), где энергия передается посредством электромагнитного поля, т.е. за счет лучистого теплообмена.

Вывод: В действительности все эти три способа теплообмена в биосфере обычно сопутствуют друг другу и часто связаны с гидродинамическими процессами и переносом массы (диффузией), т.е. имеет место сложный тепло- и массообмен.

Основные понятия теории теплообмена

Внимание! Расчет сложных тепло- и массообменных процессов, как правило, осуществляется с помощью методов, обобщающих результаты отдельного изучения каждого из трех первичных способов переноса теплоты.

Вывод: Основным методом теории теплообмена можно считать расчленение сложного теплообмена на его составляющие по способу (механизму) переноса теплоты и изучение их составляющих методами математической физики и научного опыта.

Замечание: При рассмотрении сложного теплообмена с сильно меняющимися (нелинейными) в пространстве и времени температурными полями могут возникать задачи, которые не сводятся к моделям с квазиавтономными частными процессами теплообмена. В этих случаях традиционные понятия коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи лишены отчетливого смысла. Здесь требуется постановка **сопряженной задачи** в достаточно общей форме описывающей как механизмы теплопереноса в отдельных элементах системы, так и их взаимодействия на границах фаз и тел, с учетом конкретных краевых условий.

Основные понятия теории теплообмена

Внимание! Подавляющее большинство процессов, рассматриваемых теорией теплообмена, протекает при взаимодействии твердых тел, жидких и газообразных сред в областях, размеры которых чрезвычайно велики по сравнению с длиной свободного пробега структурных элементов (атомов, молекул).

Выводы:

1. Такие статистические понятия, как температура, давление, теплоемкость, вязкость и т.п., могут быть приписаны даже таким малым элементам системы, которые с физико-математической точки зрения могут рассматриваться, как дифференциалы от объема, что позволяет рассматривать эти тела и среды в качестве непрерывных. Исключение могут составить лишь сильно разряженные газы.
2. Вывод дифференциального уравнения распространения теплоты может быть основан на применении законов сохранения и превращения энергии.

Лекция 7. Линейная математическая модель процесса теплопроводности с одной пространственной переменной

Пример: «Линейная задача о распространении теплоты»

Рассмотрим, однородный стержень длины l , теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени t температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой.

Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах T_1 и T_2 , ($T_1 > T_2$), то вдоль стержня установится линейное распределение температуры:

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot x/l \quad (1)$$

При этом от более нагретого к менее нагретому концу стержня будет "перетекать" некоторое количество теплоты (работа не совершается).

Количество теплоты, проходящее через сечение стержня площади S в единицу времени, определяется известной экспериментальной формулой:

$$Q = -\lambda(T_1 - T_2) \cdot S/l = -\lambda S \partial T / \partial x \quad (2)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня.

Замечание: В общем случае для переменной, неоднородной среды $Q = -S \partial(\lambda(x,t)T) / \partial x$, а величина теплового потока считается положительной, если теплота передается в сторону возрастания x .

Линейная задача о распространении теплоты

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $T(x, t)$, представляющей температуру в любом сечении x , в момент времени t .

Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $T(x, t)$. Для этого, используя феноменологический подход, сформулируем физические закономерности, определяющие процессы, связанные с распространением теплоты.

1. Закон Фурье. (Фика) Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество теплоты Q , проходящей через сечение x за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, равно:

$$dQ = qSdt \quad (3)$$

где $q = -\lambda(x)\partial T/\partial x$ - плотность теплового потока, равная количеству энергии проходящей в единицу времени через единицу площади.

Это обобщение выражения (2) в дифференциальной форме, ему также можно придать следующую интегральную форму:

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dt$$

здесь Q - количество теплоты, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x . Если стержень неоднороден, то λ естественно является функцией x .

Линейная задача о распространении теплоты

2. Количество теплоты, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на величину ΔT равно:

$$Q = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$$

здесь c , m , V , ρ - удельная теплоемкость, масса, объем и плотность тела соответственно.

Если изменение температуры имеет различную величину на различных участках стержня или стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S T(x) dx$$

3. В общем случае, внутри стержня может возникать или поглощаться теплота (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т.д.). Выделение тепла может быть охарактеризовано величиной плотности тепловых источников $F(x, t)$ в точке x в момент t .

В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделится количество теплоты:

$$dQ = SF(x, t) dx dt$$

или в интегральной форме:

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt$$

где Q - количество теплоты выделившейся на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) .

Линейная задача о распространении теплоты

Справочно: Если теплота, выделяется в результате прохождения электрического тока силой I по стержню, сопротивление которого на единицу длины равно R , то $F=0.24I^2R$.

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса теплоты на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2) . Применяя закон сохранения энергии можно записать:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{X=X_2} - \lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{X=X_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [T(\xi, t_2) - T(\xi, t_1)] d\xi$$

- классическое линейное уравнение теплопроводности в интегральной форме!

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $T(x, t)$ имеет непрерывные производные T_{xx} и T_t .

Замечание: Требуя дифференцируемости, мы можем потерять ряд решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, но не удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Однако здесь этого не происходит т.к. функция, удовлетворяющая последнему уравнению, обязательно должна быть дифференцируема.

Тогда пользуясь теоремой о среднем, имеем равенство:

для

но

$$\left[\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{X=X_2} - \lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{X=X_1} \right]_{\tau=t_3} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \{c\rho [T(\xi, t_2) - T(\xi, t_1)]\}_{\xi=X_3} \Delta x$$

Линейная задача о распространении теплоты

Последнее равенство, при помощи теоремы о конечных приращениях, можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right] \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_5 \\ t=t_3}} \Delta t \Delta \mathbf{x} + F(\mathbf{x}_4, t_4) \Delta \mathbf{x} \Delta t = \left[c\rho \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_3 \\ t=t_5}} \Delta \mathbf{x} \Delta t$$

где t_3, t_4, t_5 и $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ – промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Справочно: Теорема Лагранжа о среднем значении, (не путать с обобщенной теореме о среднем значении Коши) – Если функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в замкнутом промежутке (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , то отношение

$[f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})]/(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = f'(\xi)$ равно значению производной $f'(\mathbf{x})$ в некоторой точке $\mathbf{x}=\xi$, лежащей внутри промежутка (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

Здесь ξ (кси) – стандартное обозначение для "среднего" значения аргумента, т.е. значения лежащего внутри этого промежутка. Теорема о конечном приращении это то же самое, только в виде: $f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=f'(\xi)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

Отсюда, после сокращения на произведение находим:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right) \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_5 \\ t=t_3}} + F(\mathbf{x}, t) \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_4 \\ t=t_4}} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \Bigg|_{\substack{t=t_5 \\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_3}}$$

Замечание: Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (t_1, t_2) и $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Линейная задача о распространении теплоты

Переходя к пределу при $(x_1, x_2 \rightarrow x)$ и $(t_1, t_2 \rightarrow t)$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right) + F(\mathbf{x}, t) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

Вывод: Это классическое линейное уравнение теплопроводности в дифференциальной форме!!!

Внимание! Последнее уравнение имеет не только частное прикладное значение, но и может использоваться в качестве основы общей классификации процессов тепло- и массопереноса.

Замечание: Коэффициенты λ и c , в линейном уравнении теплопроводности, как правило, являются медленно меняющимися функциями температуры. Поэтому сделанное выше предположение о постоянстве этих коэффициентов возможно только при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры. Изучение температурных процессов в большом интервале изменения температур, приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности, которое для неоднородной среды принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda(T, \mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right) + F(\mathbf{x}, t) = c(T, \mathbf{x})\rho(T, \mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t}$$

Лекция 8. Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Замечание: Для составления классификации процессов тепло- и массопереноса рассмотрим ряд частных случаев, предварительно отметив, что мы имеем дело с дифференциальными уравнениями в частных производных **параболического типа**, которые являются одной из разновидностей уравнений математической физики.

Вид I. Пусть среда является неподвижной и однородной, соответственно λ , ρ , c можно считать постоянными величинами. Кроме того, допускаем, что в среде отсутствуют: тепловыделения от химических реакций, а также источники и стоки теплоты, т.е. $F(x,t)=0$. Тогда, обозначая $a = \lambda /(\rho c)$, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
$$T_t = a T_{xx}$$

где $a = \lambda /(\rho c)$ - коэффициент температуропроводности.

Внимание! Данный вид уравнений играет фундаментальную роль при описании процессов тепло- и массопереноса.

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Пример: «*Линейная задача массопереноса*»

Замечание: Если среда неравномерно заполнена некоторым газом, то имеет место его диффузия из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Аналогичное явление имеет место в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме не постоянна. Более того, подобные явления наблюдаются и в твердых телах.

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке или в трубке, заполненной пористой средой, предполагая, что в любой момент времени t , концентрация рассматриваемого компонента по всякому сечению трубки x - одинакова. Тогда процесс диффузии может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t .

1. Согласно **закону Нернста (Фика)** масса газа, протекающая через сечение x за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, равна:

$$dM = -D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S dt = JS dt \quad J = -D \frac{\partial u}{\partial x}$$

где D - коэффициент диффузии, S - площадь сечения трубки, $J(x, t)$ - плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающей в единицу времени через единицу площади.

2. По определению концентрации, масса газа в объеме V равна $M=uv$, отсюда с учетом пористости, получаем, что изменение массы газа на участки трубки (x_1, x_2) при изменении концентрации на Δu равно:

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} \Pi_0(x) \Delta u S dx$$

где $\Pi_0(x)$ - коэффициент пористости.



Классификация уравнений тепло- и массопереноса

3. Составим уравнение баланса массы газа на участке (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) :

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u(x_2, \tau)}{\partial x} - D(x_1) \frac{\partial u(x_1, \tau)}{\partial x} \right] d\tau = S \int_{x_1}^{x_2} \Pi_0 [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi$$

аналогично получаем уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \Pi_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

- классическое уравнение диффузии в дифференциальной форме!

Замечание: Последнее уравнение аналогично уравнению теплопроводности. При его выводе мы считали, что в трубке нет химических реакций и нет источников и стоков вещества, а также, что диффузия через стенки отсутствует. Учет этих явлений приводит к сходным уравнениям теплопроводности.

Если коэффициенты диффузии и пористости постоянны, уравнение диффузии принимает вид: $u_t = a u_{xx}$, где $a = D/\Pi_0$ и при $\Pi_0 = 1$: $u_t = D u_{xx}$.

Вывод: Мы имеем полную математическую аналогию при описании процессов тепло- и массопереноса: $T_t = a T_{xx}$; $u_t = D u_{xx}$.

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Внимание! Однако на этом выявленная аналогия математических моделей не заканчивается. Наряду с диффузией и теплопроводностью, существует еще целый ряд явлений имеющих аналогичный механизм, это, прежде всего, **вязкость**.

Подобно тому как при теплопроводности возникает поток теплоты из более нагретых в менее нагретые участки среды, так при внутреннем трении благодаря тепловому движению молекул происходит **передача импульса** от более быстрых участков потока к менее быстрым.

Сравните:

$$dQ = qSdt \qquad q = -\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$dM = -D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} Sdt = JSdt \qquad J = -D \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$dP = \tau_{yx} Sdt \qquad \tau_{yx} = \eta \frac{\partial w_x}{\partial y}$$

Вывод: Везде прослеживается аналогичный механизм, - **перенос**: энергии в форме теплоты, массы и импульса. В результате, несмотря на то, что в последнем случае, пространственное описание будет несколько другим – двумерным, все эти процессы можно объединить в единую группу – **явлений переноса**, которые обусловлены строением среды, в которой они протекают.

Замечание: На основании рассмотренных аналогий, в эту же группу условно могут быть включены такие явления, как броуновское движение, различного флуктуации, некоторые оставляющие случайных процессов и т.п.

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Таким образом, для теплопроводности, в начале имеем три возможных варианта:

$$T_t = aT_{xx} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 [a(x, t)T]}{\partial x^2}$$

Все эти варианты могут быть однозначно сведены к первому, путем введения в его состав дополнительных слагаемых.

Вывод: В результате, для целей классификации имеем известное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$T_t = aT_{xx}$$

Замечание: Уравнение этого вида часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Аналитические решения этого уравнения хорошо известны при различных граничных и начальных условиях они в основном базируются на гауссовом (нормальном) распределении в интегральной или дифференциальной форме. **Поэтому, при аналитическом решении уравнений других видов, за счет различных замен, их стремятся свести к уравнению данного вида.**

Замечание: Модели данного типа не являются единственными, существуют и другие подходы к описанию подобных процессов. В частности во фрактальных средах и процессах:

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = a \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta}$$

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Вид II. Пусть среда является подвижной и однородной. В этом случае, при постоянной скорости движения среды $w=const$, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -w \frac{\partial T}{\partial x} + a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Это уравнение описывает нестационарный конвективный тепло- и массоперенос в движущейся среде и может быть сведено к уравнению первого вида путём замены $z=x-wt$, что соответствует переходу в подвижную систему координат

В общем случае данное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial (wT)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (aT)}{\partial x^2}$$

и является основным в моделях диффузионного типа.

При $w=w(x,t)$ и $a \rightarrow 0$, последнее уравнение превращается в одномерный аналог известного уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (w\rho)}{\partial x}$$

Замечание: Однако этим роль уравнений данного вида не ограничивается, в моделях диффузионного типа они имеют фундаментальное значение при описании стохастических составляющих процессов. При этом в скорости процесса w выделяют две составляющие – детерминированную - \bar{w} и случайную - \tilde{w} , записывая

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}}$$

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Пример: «Модель некоторого вероятностного процесса»

Пусть, все текущие изменения некоторого процесса, проявляются в наличии флуктуаций скорости $\mathbf{w}(\mathbf{q})$ для некоторой величины $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$.

Будем предполагать, что такие флуктуации происходят около среднего значения скорости $\langle \mathbf{w}(\mathbf{q}) \rangle$ (для данного \mathbf{q}) и приводят к флуктуациям функции плотности распределения $f(\mathbf{q}, t)$ около ее среднего $\langle f(\mathbf{q}, t) \rangle$.

Это позволяет записать:

$$\mathbf{w}(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{w}(\mathbf{q}) \rangle + \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{и} \quad f(\mathbf{q}, t) = \langle f(\mathbf{q}, t) \rangle + \tilde{f}$$

где $\langle \mathbf{w}(\mathbf{q}) \rangle = d\mathbf{q}/dt$ – средняя скорость систематического изменения величины \mathbf{q} , $\tilde{\mathbf{w}}$ – флуктуационная составляющая скорости $\mathbf{w}(\mathbf{q})$, $\langle f(\mathbf{q}, t) \rangle$ – средняя плотность распределения, а \tilde{f} – флуктуационная составляющая $f(\mathbf{q}, t)$.

Относительно природы поведения сделаем следующие предположения:

- ✓ флуктуационная составляющая $\tilde{\mathbf{w}}$ не зависит от времени и изменяется весьма быстро по сравнению с изменением \mathbf{q} ;
- ✓ существует такой интервал времени Δt , в течение которого изменение \mathbf{q} будет весьма малым, тогда как за тот же интервал времени $\tilde{\mathbf{w}}$ может испытать несколько флуктуаций.



Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Полагая $w(q) \cdot f(q, t) = J(q, t)$, запишем:

$$\partial f(q, t) / \partial t = J(q, t) - J(q + \Delta q, t) = -\partial J(q, t) / \partial q = -\partial [w(q) \cdot f(q, t)] / \partial q$$

С учетом флуктуаций получаем:

$$\partial [\langle f(q, t) \rangle + \tilde{f}] / \partial t = -\partial [\langle w(q) \cdot f(q, t) \rangle + \langle w(q) \tilde{f} \tilde{w} \rangle + \langle f(q, t) \tilde{w} \tilde{f} \rangle] / \partial q$$

или, после осреднение за некоторый конечный интервал времени,

$$\partial [\langle f(q, t) \rangle] / \partial t = -\partial [\langle w(q) \rangle \langle f(q, t) \rangle + \langle \tilde{w} \tilde{f} \rangle] / \partial q.$$

Из определения величин \tilde{w} \tilde{f} следует, что средние значения $\langle \tilde{w} \rangle$ $\langle \tilde{f} \rangle$ равны нулю. Однако величина $\langle \tilde{w} \tilde{f} \rangle$ обязательно должна обращаться в нуль, поскольку из-за нелинейности $w(q)$ и $f(q, t)$ между локальными значениями их пульсационных составляющих может существовать корреляция.

Если $\langle \tilde{w} \tilde{f} \rangle$ представить как: $\langle \tilde{w} \tilde{f} \rangle = -\partial [D(q) \langle f(q, t) \rangle] / \partial q$, то для $\langle f(q, t) \rangle$ получим

$$\partial f(q, t) / \partial t = -\partial [\langle w(q) \rangle f(q, t)] / \partial q + \partial^2 [D(q) f(q, t)] / \partial q^2$$

где $D(q)$ – коэффициент диффузии в пространстве q .

Вывод: Мы пришли к частной форме известного уравнения Фоккера – Планка, которая соответствует виду II и является частным случаем уравнения ФПК, но уже с использованием феноменологических вероятностных соображений.

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Вид III. Пусть плотность тепловых источников может зависеть от температуры.

В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество теплоты теряемого стержнем, которое рассчитано на единицу длины и времени равно:

$$F_0 = k(T - T_{OC})$$

где T_{OC} - температура окружающей среды, k - коэффициент теплообмена (конвективной теплоотдачи).

Поскольку в нашем приближении не учитывается распределение температуры по сечению, то действие поверхностных источников эквивалентно действию объемных источников теплоты.

Таким образом, плотность тепловых источников в точке x в момент t равна:

$$F = F_1(x, t) - h(T - T_{OC})$$

где $F_1(x, t)$ - плотность других источников теплоты.

В результате если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с боковым теплообменом имеет следующий вид:

$$T_1 = a T_{XX} - \alpha T + f(x, t)$$

где $\alpha = h/c\rho$, $f(x, t) = \alpha T_{OC}(x, t) + F_1/(c\rho)$ - известная функция.

Вывод: Последнее уравнение позволяет исследовать процессы массопереноса с некоторыми видами реакций, в частности, с химическими реакциями первого и псевдопервого порядка.

Классификация уравнений тепло- и массопереноса

Пример: «Упрощенная модель химических реакций»

Реакции первого порядка идут по схеме:



Согласно закону действующих масс эта реакция описывается кинетическим уравнением:

$$dA/dt = kA$$

где k – константа реакции.

Реакции второго порядка идут по схемам:



В первом случае описывается кинетическим уравнением:

$$dA/dt = kA^2$$

Во втором:

$$dA/dt = kAB$$

Реакции третьего порядка идут по схемам:



Псевдопорядок: Если кинетическое уравнение имеет вид:

$$dA/dt = k'AB^2$$

и B присутствует в значительном избытке, то его концентрация остается практически постоянной, т.е. $B \approx B_0$, полагая $k = k'B^2$, получаем:

$$dA/dt = kA$$

где k – константа (коэффициент) скорости псевдопервого порядка.

Замечание: Понижение порядка кинетических уравнений можно достичь не только путем создания избытков, но и с помощью специальных приемов проведения опыта.

Математические модели нестационарных процессов теплообмена

Лекция 9. Краевые условия

Система дифференциальных уравнений для процессов тепло- и массообмена в общем случае охватывает бесчисленное множество процессов, которые описываются соответствующими уравнениями, но вместе с тем каждый из них отличается от других некоторыми частностями.

Вывод: Чтобы ограничить решаемую задачу и выделить её из бесчисленного множества возможных процессов и определить рассматриваемый процесс однозначно, т.е. дать полное математическое описание, к системе дифференциальных уравнений необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей, которые иногда называют условиями однозначности или краевыми условиями.

Замечание: Иногда используют другую терминологию и краевые условия = граничным условиям, в частности, в математике.

Краевые условия

Условия однозначности обычно состоят из:

1. **Геометрических условий**, характеризующих форму и размеры системы, в которой протекает процесс;
2. **Физических, химических и физико-химических условий**, характеризующих свойства среды и тел;
3. **Граничных условий**, характеризующих особенности протекания процесса на границах тел или фаз;
4. **Временных условий**, характеризующих особенности протекания процесса во времени.

Вывод: Когда условия однозначности для какого-либо конкретного случая заданы, то они вместе с замкнутой системой дифференциальных уравнений и составят полное математическое описание данного процесса. Тем самым после решения системы уравнений можно получить полное описание процесса во всех деталях, в частности, поля температур, скоростей, давлений, концентраций, рассеяния и т.д.

Краевые условия

Замечание: Все процессы тепло- и массообмена путем теплопроводности (диффузии) и конвекции описываются совокупностью уравнений распространения теплоты (массы) в движущейся среде, неразрывности (сплошности) и движения вязкой жидкости в общей форме. В этом смысле можно сказать, что данная система уравнений описывает (является математической моделью) некоторый класс физических явлений с собственными краевыми условиями.

Временные краевые условия обычно определяют поле переменных, входящих в уравнения данного класса физических процессов и явлений, в начальный или конечный момент времени протекания рассматриваемого процесса.

Замечание: Для стационарного (установившегося) процесса, т.е. такого процесса, в котором поля характеризующих его переменных не меняются во времени, временные условия отсутствуют. Поэтому стационарный процесс однозначно выделяется путем задания **только граничных условий**.

Граничные (пространственные) условия определяют значения переменных на границах области, в которой протекает рассматриваемый процесс. Таким образом, ~~краевые условия дают те конкретные значения величин, которые выделяют~~ определенное единичное явление из всего класса явлений той же физической природы.



Некоторые особенности задания краевых условий

При рассмотрении задач, связанных с движением жидкой среды (краевые условия к уравнениям гидродинамики), важнейшим пространственным краевым условием является скорость течения в непосредственной близости к твердой поверхности (стенки канала, поверхность обтекаемого тела).

Вывод: В том случае, когда неподвижная твердая стенка непроницаема, нормальная к её поверхности составляющая вектора относительной скорости потока равна нулю.

Замечание: Если на ограждающих поверхностях в результате какого-либо физического или химического процесса происходит поглощение или выделение жидкости, то нормальная к стенке составляющая вектора скорости потока среды определяются скоростью протекания соответствующего процесса на стенке.

Вывод: В отношении составляющей вектора относительной скорости потока, касательной к стенке, опытом установлено, что на стенке она равна нулю.

Замечание: К применению данного ограничения следует относиться очень внимательно, учитывая толщину пограничного слоя, особенно при численном решении задач!!!

Некоторые особенности задания краевых условий

Краевые условия к уравнениям теплопроводности, сводятся к заданию временных краевых условий к уравнению распространения теплоты в виде скалярной функции, дающей распределение температуры в рассматриваемой области в некоторый момент времени.

Пространственные краевые условия сводятся к заданию условий теплообмена на ограждающих поверхностях. Способов задания таких условий обычно три!!!

1. Пространственное краевое условие первого рода задается распределением температуры на ограждающих поверхностях как функции положения точки поверхности и времени. Эта функция должна быть задана для всех точек ограждающих поверхностей.

Замечание: В ряде практически важных задач оказывается возможным положить, что температура на твердой стенке одинакова во всех её точках.

2. Пространственное краевое условие второго рода задается тепловым потоком, пронизывающим ограждающую поверхность, как функцией точки этой поверхности и времени.
3. Пространственное краевое условие третьего рода связывает температуру твердой стенки с температурой окружающей среды через заданное значение коэффициента теплоотдачи от стенки к этой среде.



Некоторые особенности задания краевых условий

Пример: «Краевые условия описания теплоотдачи при движении жидкости в трубе»

Если, для технических расчетов представляет интерес коэффициент теплоотдачи, который определяется в условиях конвективного теплообмена **формулой Ньютона-Рихмана:**

При известном поле температур определение коэффициента теплоотдачи основывается на следующих положениях.

$$Q = \alpha(T_c - T_g)S$$

Поток теплоты, передаваемой от жидкости к стенке, проходит через слой жидкости, прилегающей к поверхности, путем теплопроводности и может быть определен **по закону Фурье:**

С другой стороны для этого же элемента поверхности закон **Ньютона-Рихмана** записывается в виде:

$$dQ = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0} dS$$

В результате получаем:

$$dQ = \alpha(T_c - T_g) dS$$

Это уравнение позволяет по известному полю температур в жидкости определить коэффициент теплоотдачи, известно как **уравнение теплоотдачи.**



Некоторые особенности задания краевых условий

Для случая теплоотдачи при движении жидкости в трубе могут быть заданы следующие условия однозначности:

1. Труба гладкая, круглая, внутренний диаметр d и длина l .
2. Рабочим телом, т.е. теплоносителем, является вода, которая несжимаема, а её физические свойства равны:
 $\lambda(T), c_p(T), \mu(T), \rho(T)$

Замечание: Если же зависимостью от температуры можно пренебречь, тогда просто числовые значения.

3. Температура жидкости на входе равна T_G , а на поверхности трубы T_{CT} .
4. Скорость на входе равна w , а у самой стенки $w=0$.

Замечание: Если же температура и скорость на входе не постоянны, то должен быть задан закон их распределения по сечению.

5. Для стационарных процессов временные условия однозначности совпадают.

Математические модели нестационарных процессов теплообмена

При математическом описании нестационарных процессов теплообмена в биосфере можно условно выделить следующие основные группы уравнений:

- 1. Уравнения законов сохранения, включая балансовые уравнения;*
- 2. Уравнения механики жидкости и газа, включая уравнения статики, кинематики и динамики сплошной среды;*
- 3. Уравнения термодинамических свойств, включая уравнения состояния и характеристические уравнения процессов;*
- 4. Уравнения тепло- и массообмена;*
- 5. Уравнения кинетических процессов;*
- 6. Уравнения эволюции дисперсных систем, включая фазовые переходы;*
- 7. Уравнения условий однозначности.*



Математические модели нестационарных процессов теплообмена

Замечание: К настоящему времени аналитические решения системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, также как и процессов тепло- и массообмена в целом получены лишь для ограниченного числа простейших задач при введении тех или иных допущений. Такое положение объясняется большой сложностью уравнений или, в конечном счете, сложностью и многогранностью содержания самих процессов в биосфере.

Вывод: Вследствие ограниченности возможностей аналитического решения, приведенных ранее дифференциальных уравнений, большое значение в изучении процессов тепло- и массообмена приобретает модельный эксперимент.

Внимание! Экспериментальное изучение сложных процессов, зависящих от большого числа отдельных факторов, само по себе является трудным делом, которое требует специальной подготовки. Кроме того, при постановке модельного эксперимента, помимо подробного изучения рассматриваемого процесса, обычно всегда ставится задача получить данные для расчета других процессов родственных изучаемому.

Вывод: Одним из средств решения такой задачи является теория подобия, которая по своему существу является теорией эксперимента.

Математические модели нестационарных процессов теплообмена

Внимание! Для правильной постановки экспериментальных исследований и последующей обработки и применения полученной в них информации необходимо ясно понимать физическую картину изучаемого явления и найти пути его общего качественного и количественного анализа.

Замечание: При выполнении опытных исследований на моделях важно правильно определить безразмерные параметры, которые полностью характеризовали бы изучаемое явление. При этом число таких параметров должно быть минимальным.

Вывод: Предварительный качественный анализ и выбор системы безразмерных параметров может быть успешно произведен на основе теории размерностей и механического подобия.

Замечание: Использование этой теории дает возможность получить необходимый предварительный материал особенно для явлений, зависящих от большого числа параметров. При этом можно определить значимость каждого параметра и на этом основании исключить некоторые из них как несущественные из дальнейшего рассмотрения.

Математические модели нестационарных процессов теплообмена

Внимание! Обычно, наиболее плодотворным является сочетание методов, основанных на теории размерностей и механического подобия, с аналитическими методами исследования.

Замечание: Часто на практике не удается получить модели, полностью имитирующие явление в натуральных условиях. В этом случае прибегают к методам аналогии, когда интересующие исследователя явления заменяются его моделью иной физической природы при условии, что оба явления описываются одними и теми же уравнениями.

Вывод: Полное физическое моделирование встречается столь же редко, что и полное динамическое подобие.

Замечание: На практике обычно используется частичное или приближенное моделирование, когда исследуется модель лишь по основным признакам, соответствующим реальному явлению. В этом смысле при частичном моделировании используются свойства приближенного подобия по одному из определяющих безразмерных критериев.

Вывод: Основной задачей моделирования является нахождение связи между неопределяющими и определяющими критериями, а также выявление масштабов для основных физических величин.

Лекция 10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Внимание! Для расчета и проектирования многих процессов и аппаратов необходимы численные значения коэффициентов теплоотдачи и массопереноса, а также гидравлического сопротивления.

Замечание: «Надежные» формулы для определения этих коэффициентов далеко не всегда охватывают все многообразие случаев, встречающихся на практике. Применение в технических расчетах таких формул или произвольных комбинаций из них часто приводит к большим расхождениям с действительностью.

Вывод: Главной причиной этих расхождений является то, что условия движения жидкости и тепло- и массообмена в реальных условиях отличны от условий, наблюдавшихся в экспериментах, на основе которых получены эти формулы.

Замечание: Обычно экспериментальные установки строят так, чтобы движение рабочей жидкости происходило полным сечением с равномерным распределением скоростей, чтобы не было искусственных завихрений потока и т.д.

Внимание! В реальных процессах и аппаратах условия движения и тепломассообмена в большой мере зависят от расположения поверхностей нагрева, наличия поворотов, препятствий, особенностей конфигурации потоков и каналов и т.п.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Замечание: Проведенные исследования показали, что даже при отсутствии источников и стоков, распределение скоростей по сечению каналов, как правило, неравномерно, а за поворотами и препятствиями всегда образуются застойные или циркуляционные участки, следовательно, различные элементы поверхности, например, нагрева, работают в неодинаковых условиях.

Внимание! Если условия движения рабочей жидкости в процессах и аппаратах сравнивать с условиями движения жидкости в лабораторных условиях, то окажется, что между собой они не подобны.

Вывод: Законы тепло- и массообмена, полученные из опытов в таких идеализированных условиях, непосредственно переносить на реальные объекты **нельзя!!!**

Внимание! Механическое их применение приводит к неправильной оценке коэффициентов теплоотдачи и массопереноса, а также гидравлического сопротивления.

Замечание: Изучение законов тепло- и массообмена, а также гидравлического сопротивления, необходимых для расчета определяющих процессов должно производиться на таких установках и в таких условиях, в которых геометрические, тепловые, массовые и гидродинамические условия были бы подобны таковым в действительных процессах и аппаратах.

Вывод: Таким образом, можно считать, что условия моделирования вытекают из теории подобия и размерностей, которая является учением об аналогии и подобии явлений.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Справочно: Термин подобие заимствован из геометрии, где более общим понятием является – аффинная геометрия (родственный) в которой изучаются свойства фигур сохраняющиеся при любых аффинных преобразованиях, т.е. инвариантных относительно таких преобразований. Например, линейная функция.

Вывод: Математическая формулировка геометрического подобия сводится к **условию пропорциональности:**

Замечание: Оно справедливо для любых сходных отрезков $a'/a'' = C$ и характеристик подобных фигур (высот, площадей и т.п.). Если подобные фигуры ориентированы одинаково, то вследствие равенства соответствующих углов их сходные стороны параллельны.

Внимание! Зная условия подобия, можно решить целый ряд практических задач, например, в геодезии и картографии. С учетом теории размерностей, в частности π -теоремы, понятие подобия может быть распространено на любые физические явления.

Пример: Можно говорить о подобии:

- картины движения двух потоков жидкости – **кинематическом подобии;**
- сил, вызывающих подобные между собой движения – **динамическом подобии;**
- картины распределения температур и тепловых потоков – **тепловом подобии** и т.д.



МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

В общем случае понятие подобия физических явлений сводится к следующим положениям:

- а) Понятие подобия в отношении физических явлений применяется только к явлениям одного и того же рода, которые качественно одинаковы и аналитически описываются уравнениями, одинаковыми как по форме, так и по содержанию.

Замечание: Если же математическое описание двух каких-либо явлений одинаково по форме, но различно по физическому содержанию, то такие явления называются аналогичными, например, процессы переноса.

- б) Обязательной предпосылкой подобия физических явлений должно быть — геометрическое подобие. Это означает, что подобные явления всегда протекают в геометрически подобных системах.
- в) При анализе подобных явлений сопоставлять между собой можно только однородные величины и лишь в сходственных точках пространства и в сходственных моменты времени.

Замечание: Однородными называются такие величины, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность.

Сходственными точками геометрически подобных систем называют такие координаты, которые удовлетворяют условию пропорциональности, т.е.

Два промежутка времени t'' и t' , x_1' и x_1'' , y_1' и y_1'' , z_1' и z_1'' называются сходственными, если они имеют общее начало отсчета и связаны преобразованием подобия, т.е.

$$t'' = c_t t'$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

- d) Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин характеризующих рассматриваемые явления.

Замечание: Фактически это значит, что в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени любая величина φ' первого явления пропорциональна однородной с ней величине φ'' второго явления, т.е.

Коэффициент пропорциональности c_φ называется **константой (постоянной) подобия**. Ни от координат, ни от времени c_φ не зависит. При этом каждая физическая величина φ имеет свою постоянную c_φ , численно отличную от других. Чтобы знать, к какой величине относится постоянная подобия, при каждой из них, обычно, ставится соответствующий индекс.

Вывод: Таким образом, сущность подобия двух явлений означает подобие полей одноименных физических величин, определяющих эти явления. При этом полный перечень всех величин, характеризующих рассматриваемые явления, может быть установлен только при наличии математической модели описания явлений.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Замечание: Постоянные подобия для различных величин в подобных явлениях нельзя назначать или выбирать произвольно. Между ними **всегда** имеются строго **определенные соотношения**, которые выводятся из анализа математического описания процессов.

Внимание! Эти соотношения имеют центральное значение в теории подобия, т.к. они устанавливают существование особых величин, называемых **числами подобия** (инвариантами), которые для всех подобных между собой явлений сохраняют одно и то же числовое значение.

Замечание: Числа подобия **всегда** являются **безразмерными комплексами**, составленными из величин, характеризующих явление. Нулевая размерность является их характерным свойством.

Справочно: Числа подобия принято называть именами ученых, работавших в соответствующей области наук и обозначать двумя начальными буквами их фамилий: **Re** (Reynolds), **Eu** (Euler), **Nu** (Nusselt) или просто латинскими буквами: **K**, **N** и др.

Вывод: Числа подобия можно получить для любого физического процесса, для этого необходимо иметь его математическое описание. Последнее требование является **необходимой предпосылкой теории подобия**. Без этого всё учение о подобии свелось бы лишь к простому определению подобия.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Основные положения теории подобия можно сформулировать в виде трех теорем:

1. **Первая теорема** подобия устанавливает связь между постоянными величинами подобия и позволяет выявить числа подобия. В общей форме эта теорема формулируется так: **подобные между собой процессы имеют одинаковые числа подобия.**
2. **Вторая теорема** подобия устанавливает зависимость между переменными, характеризующими какой-либо процесс, может быть представлена в виде зависимости между числами подобия K_1, K_2, \dots, K_n ; $f(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0$, которая называется **уравнением подобия.**

Замечание: Если явления между собой подобны, то числа подобия сохраняют одно и то же значение, соответственно и уравнения подобия для них должны быть также одинаковыми.

Вывод: Представляя результаты какого-либо эксперимента или опыта в числах подобия, мы получим обобщенную зависимость, которая будет справедлива **для всех** подобных между собой процессов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

3. **Третья теорема** подобия формулируется так: **подобны те процессы, условия однозначности которых подобны**, и числа подобия, состоящие **из величин входящих в условия однозначности, должны иметь одинаковое численное значение**. Фактически это обратная теорема отвечающая на вопрос: Какие условия необходимы и достаточны, чтобы процессы были подобны.

Справочно: В литературе одинаковость (инвариантность) численных значений обозначается через \sim , что означает "тот же самый".

На основании последней теоремы оказывается необходимым **особо выделить** числа подобия, составленные только из величин, входящих **в условия однозначности**. Они называются **определяющими** или **критериями подобия**.

Инвариантность (одинаковость) определяющих чисел подобия является условием, которое должно быть выполнено для получения подобия. Одинаковость же чисел подобия, содержащих и другие величины, **не входящие** в условия однозначности, получается автоматически как следствие установившегося подобия. Эти числа подобия называются **определяемыми**.

Вывод: Теория подобия позволяет, не интегрируя дифференциальных уравнений, получить из них числа подобия и, используя опытные данные, установить уравнения подобия, которые будут справедливы для всех подобных между собой процессов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Внимание!!! Такие обобщенные зависимости, однако, ограничены условиями подобия, и из них **нельзя** делать заключения, выходящие за пределы этих ограничений. Всегда нужно помнить, что общего решения теория подобия **не дает!!!** Она позволяет лишь обобщить опытные и экспериментальные данные в области, ограниченной условиями подобия. Поэтому результаты отдельного опыта закономерно распространять **только** на подобные между собой явления и процессы!!!

Запишем уравнения теплопроводности и движения несжимаемой жидкости, полагая, что величины остаются постоянными в данном процессе:

$$a \nabla^2 T + q_v / c_p = \partial T / \partial t + (\mathbf{w}, \text{grad} T); \mathbf{g} - (1/\rho) \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{w} = \partial \mathbf{w} / \partial t + (\mathbf{w}, \text{grad}) \mathbf{w}, \text{div} \mathbf{w} = 0$$

Поскольку температура и давление входят в эти уравнения под знаками дифференциальных операторов, то данные уравнения определяют не абсолютные значения T и p , а их отклонения от температуры и давления в некоторой масштабной точке. Поэтому можно записать:

$$a \nabla^2 (\Delta T) + q_v / c_p = \partial (\Delta T) / \partial t + (\mathbf{w}, \text{grad} (\Delta T));$$

где ΔT и Δp - соответствующие перепады температур и давлений, определенные относительно некоторых заданных значений T_0 и p_0 .

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Разделим первое уравнение на величину $\alpha \Delta T_0 / l_0^2$, а второе и третье – на величину w_0 / l_0^2 ,

где ΔT_0 - масштабный перепад температур, w_0 - масштаб скорости и l_0 - масштаб длины.

Введя масштабные величины и физические характеристики, которые в данном случае рассматриваются как постоянные, непосредственно под знаками дифференциальных операторов получаем:

$$\nabla^2 \vartheta + q_v l_0^2 / (\lambda \Delta T_0) = \partial \vartheta / \partial (at / l_0^2) + (w l_0 / a, \text{grad} \vartheta);$$

$$g l_0^2 / w_0^2 - \text{grad}(\Delta p / (\rho w_0^2)) + (v / (w_0 l_0)) \nabla^2 \mathbf{w} = \partial \mathbf{w} / \partial (w_0 t / l_0) + (\omega, \text{grad}) \omega;$$

$$\text{div} \omega = 0$$

Здесь $\vartheta \equiv \Delta T / \Delta T_0$ - безразмерный температурный напор, w - безразмерная скорость, $\bar{x} \equiv x / l_0, \bar{y} \equiv y / l_0, \bar{z} \equiv z / l_0$ - безразмерные координаты в дифференциальных операторах этих уравнений.

Вывод: Уравнения теплопроводности и движения несжимаемой жидкости дают семь критериев подобия:

$$wl / a; w^2 / (gl); \Delta p / (\rho w^2); wl / v; at / l^2; wt / l; q_v l^2 / (\lambda \Delta T)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Физический смысл некоторых из этих величин непосредственно ясен из самой их записи.

- Комплекс $\Delta p / (\rho w^2)$ является мерой отношения перепада статических давлений в потоке Δp к его динамическому напору $\rho w^2 / 2$.
- Комплекс wt/l можно трактовать как отношение времени протекания процесса к некоторому масштабу, равному времени перемещения рассматриваемого элемента жидкости со скоростью w на пути l .
- Комплекс $q_v l^2 / (\lambda \Delta T)$ можно рассматривать как меру отношения количества теплоты $q_v l^3$, выделившейся в теле, к количеству теплоты $(\lambda / l) \Delta T l^2$ прошедшего через тело за счет теплопроводности. При этом l^3 является масштабом объема тела, l^2 - мерой поверхности, и l - мерой толщины.
Остальные комплексы требуют более детального рассмотрения.
- Раскрывая значение коэффициента температуропроводности, представим комплекс wl/a в виде отношения $cpw/(\lambda l)$. Числитель этого отношения можно рассматривать как изменение теплосодержания потока в осевом направлении при изменении температуры на 1° , а знаменатель – как тепловой поток за счет теплопроводности при поперечном градиенте температур 1° .
Следовательно, критерий wl/a является мерой отношения теплоты, переносимой конвекцией, к теплоте, прошедшей в поток за счет теплопроводности.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

- Физический смысл комплекса $w^2/(gl)$ становится ясным, если умножить и разделить это выражение на плотность жидкости ρ . Очевидно, что величина $\rho w^2/(\rho gl)$ является мерой отношения динамического напора потока (его кинетической энергии) к силе тяжести (потенциальной энергии), пропорциональной ρgl .
- Умножая и деля комплекс wl/v на w , легко установить, что этот известный критерий режима движения представляет собой меру отношения динамического напора потока $\rho w^2/2$ (силы инерции) к силе вязкого трения $\mu w/l$.
- Комплекс at/l^2 , рассматриваемый как отношение масштаба количества теплоты, поступившего за счет теплопроводности $(\lambda l)l^2t$, к масштабу изменения теплосодержания тела cpl^3 , является мерой скорости изменения температуры тела при неустановившемся тепловом состоянии.

Замечание: Очевидно, что выбор критериев подобия зависит от используемых уравнений, которые в составе системы уравнений определяют рассматриваемый процесс, т.е. для каждой системы будут свои определяющие критерии, которые отражают сущность рассматриваемого процесса и наоборот, определяющие критерии характеризуют используемую систему уравнений.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Пример: Все физико-химические превращения можно разделить на гомогенные и гетерогенные.

В первом случае превращение вещества происходит во всем рассматриваемом объеме (абсорбция), а во втором – только на поверхности раздела.

Легко установить, что скорость превращения вещества при гомогенном процессе в несжимаемой жидкости $\rho \text{div} \mathbf{w}$, а плотность возникающего внутреннего распределенного источника тепла $dG/dV = r \rho \text{div} \mathbf{w}$, где r равна:

Подставляя это выражение в критерий q_v , получаем:

$$q_v = r dG / dV = r \rho \text{div} \mathbf{w} l_0^2 / (\lambda \Delta T_0)$$

Вывод: Безразмерное уравнение $\nabla^2 \vartheta + \frac{r \rho l_0^2}{\lambda \Delta T_0} \text{div} \mathbf{w} = \frac{D \vartheta}{d(at/l_0^2)} + \frac{r \rho l_0 w_0}{\lambda \Delta T_0} \text{div} \mathbf{w}$ в потоке несжимаемой жидкости при гомогенной реакции имеет вид:

тогда, выделяя критерий $\nabla^2 \vartheta + \frac{r \rho l_0 w_0}{\lambda \Delta T_0} \text{div} \mathbf{w}$, можно записать:

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{r \rho l_0 w_0}{\lambda \Delta T_0} \text{div} \mathbf{w} = \frac{D \vartheta}{d(at/l_0^2)} + \frac{w_0 l_0 / a}{a} (\mathbf{w}, \text{grad} \vartheta)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

При гетерогенном превращении, тепловое взаимодействие реагирующих веществ на границе раздела фаз, при условии $\rho w_n = \rho'' w_n''$ может быть представлено в следующем безразмерном виде:

$$-\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_n}\right)_{ГР} = \frac{r}{c\Delta T} \frac{w_0 l_0}{a} \omega_{n,ГР} - \frac{\lambda''}{\lambda} \left(\frac{\partial \vartheta''}{\partial \xi_n}\right)_{ГР}$$

Из сравнения двух последних уравнений следует, что специфические особенности теплообмена при любом физико-химическом превращении характеризуются значением нового критерия $r/(c\Delta T)$, представляющего собой отношение скрытой теплоты реакции к теплоте перегрева (переохлаждения) данной фазы $\Delta i = c\Delta T$.

Пример: В связи с тем, что непосредственно на границе с обтекаемым твердым телом скорость жидкости равна нулю, тепловой поток передается через простеночный слой только теплопроводностью, т.е. может быть выражен уравнением:

где λ - коэффициент теплопроводности жидкости, $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{ст}$ - градиент температуры в тонком слое, непосредственно контактирующем с твердой стенкой $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{ст}$

С другой стороны, вводя коэффициент теплоотдачи можно записать:

приравнивая, получаем:

или в безразмерном виде:

Величину $\alpha l_0 / \lambda$ можно рассматривать как новый критерий, определяющий безразмерную форму коэффициента теплоотдачи. $\alpha l_0 / \lambda = -\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_n}\right)_{ст}$

$$q = \alpha(T_{ст} - T_0)$$

Основные критерии гидродинамического подобия

Критерий	Символ	Наименование	Пояснения
$\frac{wt}{l}$	Ho	Критерий гидродинамической гомохронности (число Струхаля)	Характеризуют скорость изменения поля скоростей течения среды во времени. Может также трактоваться мерой отношения конвективного (переносного) ускорения к ускорению в данной точке.
$\frac{l}{wt}$	Sh		
$\frac{wlp}{\mu} = \frac{wl}{\nu}$	Re	Критерий режима движения (число Рейнольдса)	Характеризует гидродинамический режим потока при вынужденной конвекции, являясь мерой отношения в потоке сил инерции и молекулярного трения.
$Gr = \frac{\beta \Delta T l^3 g}{\nu^2}$ = $Ga \beta \Delta T$	Gr	Критерий свободного движения среды (число Грасгофа)	Характеризует режим движения при свободной конвекции, являясь отношением подъемной силы, возникающей вследствие разности плотностей жидкости и сил вязкости в неизотермическом потоке.
$\frac{\Delta p}{\rho w^2}$	Eu	Критерий подобия полей давления (число Эйлера)	Является мерой отношения сил давления и инерции в потоке
$\frac{w^2}{gl}$	Fr	Критерий гравитационного подобия (число Фруда)	Является мерой отношения сил инерции и тяжести в однородном потоке
$\frac{Re^2}{Fr} = \frac{gl^3 \rho^2}{\mu^2}$	Ga	Критерий подобия полей свободного течения в газовых потоках (число Галилея)	Является мерой отношения сил молекулярного трения и тяжести в потоке.
$\frac{Re^2}{Fr} \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{gl^3 \rho \Delta \rho}{\mu^2}$ = $\frac{gl^3}{\nu^2} \frac{\Delta \rho}{\rho}$	Ar	Критерий подобия полей свободного течения в жидкостных потоках (число Архимеда)	Является мерой отношения объемных и выталкивающих сил в потоке по отношению к силам молекулярного трения
$\frac{w}{a^*}$	M	Критерий газодинамического подобия (число Маха)	Является мерой отношения скорости среды и скорости распространения малых возмущений (упругих деформаций) a^*

Основные критерии теплового подобия

Критерий	Символ	Наименование	Пояснения
$\frac{\alpha l}{\lambda}$	Nu	Безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Нуссельда)	Характеризует связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое. Является мерой отношения теплообмена за счет конвекции по сравнению с чисто молекулярным переносом.
$\frac{wl}{a}$	Pe	Критерий теплового подобия (число Пекле)	Характеризует соотношение конвективного и молекулярного переносов теплоты. Является мерой отношения молекулярного и конвективного переносов теплоты в потоке.
$\frac{v}{a} = \frac{Pe}{Re}$	Pr	Критерий подобия температурных и скоростных полей (число Прандтля)	Является мерой подобия температурных и скоростных полей в потоке (при Pr=1 и gradp=0 поля температур и скоростей подобны).
$\frac{\alpha}{c_p \rho w}$	St	Критерий конвективного переноса теплоты (число Стентона)	Характеризует соотношение скорости переноса теплоты и линейной скорости потока. Является мерой отношения интенсивности теплоотдачи и удельного теплосодержания потока.
$\frac{at}{l^2}$	Fo	Критерий тепловой гомохронности (число Фурье)	Характеризует связь между физическими свойствами и размерами тела и скоростью изменения в нем температурного поля.
$\frac{\alpha l}{\lambda_{ст}}$	Bi	Критерий краевого подобия (число Био)	Характеризует связь между полем температур в твердом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности. Является мерой отношения внутреннего и внешнего термических сопротивлений.
$\frac{r}{c_p \Delta T_s} = \frac{r}{\Delta i}$	K (Ku)	Критерий фазового перехода (число Кутателадзе)	Является мерой отношения теплового потока, идущего на фазовое превращение вещества, к теплоте перегрева (перохлаждения) одной из фаз по отношению к температуре насыщения.
$\frac{Q_V l^2}{\Delta T \lambda_{ст}}$	Po	Критерий обобщенной интенсивности внутренних источников теплоты (число Померанцева)	Характеризует отношение мощности источника теплоты в единице объема к количеству теплоты, переносимому в этом объеме через единицу поверхности с характерным размером <i>l</i> .

Основные критерии диффузионного подобия

Критерий	Символ	Наименование	Пояснения
$\frac{\beta l}{D}$	Nu_D	Безразмерный коэффициент массоотдачи (диффузионное число Нуссельда)	Характеризует увеличение массоотдачи за счет конвекции по сравнению с чисто диффузионным переносом.
$\frac{wl}{D}$	Pe_D	Критерий массового подобия (диффузионное число Пекле)	Характеризует соотношение конвективного и молекулярного переносов вещества. Является мерой отношения молекулярного и конвективного переносов вещества в потоке.
$\frac{v}{D} = \frac{Pe_D}{Re}$	Sc Pr_D	Критерий подобия массовых и скоростных полей (число Шмидта) или (диффузионное число Прандля)	Является мерой подобия массовых и скоростных полей в потоке (при $Sc=1$ и $v=a=D$ поля температур, концентраций и скоростей подобны).
$\frac{\beta}{w}$	St_D	Критерий конвективного переноса вещества (диффузионное число Стентона)	Характеризует соотношение скорости переноса вещества и линейной скорости потока.
$\frac{Dt}{l^2}$	Fo_D	Критерий тепловой гомохронности (диффузионное число Фурье)	Характеризует связь между физическими свойствами и размерами тела и скоростью изменения в нем полей концентраций.
$\frac{D}{a} = \frac{Pr}{Pr_D}$	Le	Критерий подобия безразмерных полей (число Льюиса-Семенова)	Характеризует подобие безразмерных полей температур и концентраций.

Основные критерии подобия гетерогенных и дисперсных процессов

Критерий	Символ	Наименование	Пояснения
$\frac{\rho w d}{\mu}$	Re_d	Критерий режима движения частиц дисперсной фазы (число Рейнольдса для частиц)	Являясь мерой отношения инерции и молекулярного трения, характеризует гидродинамический режим относительного движения частиц дисперсной фазы диаметра <i>d</i> в жидкости.
$\frac{\rho w l}{\sigma}$	We	Число Вебера	Характеризует соотношение сил инерции и поверхностного натяжения в двухфазном потоке
$\frac{1}{18} \frac{d^2 w_{\infty}}{\mu} \rho_d$	St	Число Стокса	Характеризует отношение сил инерции к силе сопротивления среды.
$\frac{Re^2 \Delta \rho}{Fr \rho} = \frac{g l^3 \rho \Delta \rho}{\mu^2}$	Ar	Критерий подобия полей свободного течения в жидкостных потоках (число Архимеда)	Является мерой отношения объемных и выталкивающих сил в потоке по отношению к силам молекулярного трения
$Ly = \frac{Re^3}{Ar} = Re Fr \frac{\rho}{\Delta \rho} = \frac{w^3 \rho^2}{\mu g \Delta \rho}$	Ly	Число Лященко	Является мерой отношения в потоке сил инерции, объемных и выталкивающих сил, и сил молекулярного трения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Пример: «Уравнение одномерного температурного поля в движущейся среде»

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

после использования безразмерных переменных:

$$\bar{\Theta} = \frac{T - T_w}{T_f - T_w}, \bar{w} = \frac{w_x}{w}, \bar{x} = \frac{x}{l}$$

где индекс w относится к поверхности, а индекс f к окружающей среде.

Можно представить в виде:

или

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial (\alpha t / l^2)} + \frac{w_0 l}{\alpha} w_x \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial Fo} + Pe \bar{w}_x \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{x}^2} \quad Pe = Re \cdot Pr$$

При $Pe \ll 1$, доминирует теплопроводность (диффузия), при $Pe \gg 1$ - доминирует конвекция. В первом случае мы приходим к регулярно возмущенным задачам (малый параметр Pe при младших производных), а во втором к случаю сингулярно возмущенным задачам (малый параметр Pe^{-1} при старших производных).

Последние задачи характеризуются наличием областей сильного изменения решения, в частности, пограничными и внутренними переходными слоями. Для их решения привлекаются специальные алгоритмы адаптивного типа !!!



МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В БИОСФЕРЕ

Замечание: Число критериев будет на единицу меньше числа членов соответствующего уравнения.

Условия однозначности к дифференциальным уравнениям определяют единственность их решения и задаются внешним образом по отношению к этим уравнениям. Величины, входящие в условие однозначности, являются независимыми постоянными по отношению ко всем остальным величинам, входящим в основные уравнения. Соответственно критерии подобия, составленные из постоянных величин, входящих в условие однозначности, есть **определяющие критерии**, которые могут быть вычислены уже при постановке задачи. Критерии подобия, составленные из остальных величин, в том числе переменных, есть **неопределяющие критерии**.

Замечание: У подобных явлений (процессов) все критерии подобия (определяющие и неопределяющие) численно равны (первая теорема подобия). Соответственно, подобны те процессы (явления), которые имеют подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии (третья теорема подобия).

Вывод: Использование критериев подобия вместо размерных переменных само по себе принципиально не упрощает системы исходных уравнений. Оно позволяет сформулировать корректные упрощающие допущения и облегчает обработку экспериментальных данных и получение необходимых зависимостей между ними.

КРИТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно второй теореме подобия, решение дифференциального уравнения может быть дано в виде соотношения между критериями подобия, следующими из этого уравнения.

Для установившихся наиболее характерных процессов теплопереноса функциональные уравнения теплообмена в критериальной форме имеют общий вид:

для вынужденной конвекции - $Nu = f(Re, Gr, Pr)$

для свободной конвекции - $Nu = f(Re, Pr)$

Для установившихся наиболее характерных процессов массопереноса функциональные уравнения массообмена в критериальной форме имеют общий вид:

для вынужденной конвекции - $Nu_D = f(Re, Gr, Sc)$

для свободной конвекции - $Nu_D = f(Re, Sc)$

Обычно обработку этих выражений ведут в виде степенных функциональных зависимостей вида: $Nu_D = f(Gr, Sc)$ что

позволяет использовать их в широкой группе подобных процессов, т.е. процессов у которых подобны условия однозначности и равны все определяющие критерии (правило Кирпичева – Гухмана).

Вывод: Это означает, что степенные зависимости могут быть применены для любой комбинации размерных переменных (скорость, температура, размер и др.), входящих в определяющие критерии, если численные значения этих критериев будут находиться в диапазоне, в котором получено и может быть использовано данное критериальное уравнение.