Лекция 8-2.
Приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Методы решения СЛАУ делятся на две группы:
– прямые (точные) методы;
– итерационные (приближенные) методы.

К итерационным методам относятся:

- метод ***итераций*** ***(метод последовательных приближений)***
- метод ***Зейделя***
- метод ***Ричардсона с чебышевским набором параметров***
- метод ***минимальных поправок***
- метод ***скорейшего спуска***
- метод ***релаксации***

К ***приближенным*** относятся методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы лишь с заданной точностью. Это итерационные методы (методы последовательных приближений) позволяют получать решение систем с помощью бесконечных сходящихся процессов.

Итерационные методы задают бесконечный процесс последовательного нахождения приближенных решений, все более и более близко подходящих к точному решению. Бесконечный процесс обрывают по достижении приближенного решения с требуемой точностью. Цикл вычислений, приводящий к очередному приближенному решению, называется **итерацией**. Для проведения первой итерации требуется задать некоторое приближенное решение, называемое **начальным приближением**. Решение, получаемое в результате первой итерации, называется первым приближением, в результате второй итерации – вторым приближением и т.д.

Погрешности округлений в процессе вычислений итерационными методами практически не накапливаются. Ошибки округлений, накапливающиеся в процессе k-й итерации, отражаются в k-м приближении. Следующая $(k+1)$-я итерация, находя более точное $(k+1)$-е приближение, компенсирует тем самым ошибки, накопленные k-ой итерацией. То есть параллельно процессу накопления ошибок в одной итерации идет обратный процесс самоисправления ошибок предыдущих итераций. Поэтому итерационные методы предпочтительны при решении плохо обусловленных систем.

Недостатком итерационных методов является их неуниверсальность. Кроме того, иногда итерационный процесс слишком медленно приближается к точному решению.

Применение итерационных методов состоит из двух этапов. Первый (предварительный) этап заключается в приведении системы (4.1) к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1; \\ x_2 = c_{21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n + d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n + d_n, \end{cases} \text{ или } X = CX + D. \qquad (4.4)$$

Замечание. Систему (4.1) преобразовать в эквивалентную ей систему (4.4) можно, например, следующим образом:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{1n}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \; (a_{11} \neq 0) \text{ и т. д.}$$

Данный вид должен позволять вычислить новые, приближенные значения корней, используя предыдущие значения. Причем система (4.4) должна удовлетворять некоторым довольно жестким условиям. Достаточным для нахождения решения является условие сходимости. Если последовательность векторов X_n сходится к какому-либо вектору, то она сходится именно к точному решению системы (4.4). В этом случае итерационный процесс называется *сходящимся*. Данная система будет сходится к точному решению, если норма матрицы A при неизвестных будет меньше 1.

Метод итераций (метод последовательных приближений)

Приближенные методы решения СЛАУ позволяют получать значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов. Процесс построения такой последовательности называется итерационным (повторяющимся).

Эффективность применения приближенных методов зависит:

- от выбора начального приближения
- быстроты сходимости процесса.

Рассмотрим СЛАУ (2), состоящую из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Предполагаем, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Продолжить Кострома

Выразим x_1 через первое уравнение системы, x_2 - через второе уравнение и т. д.

В результате получим систему (3`), эквивалентную системе (2).

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases} \qquad (3`)$$

Обозначим

$$\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i; \quad -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij},$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда система (3`) запишется таким образом:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) называется системой, приведенной к **нормальному виду**.

За начальное (нулевое) приближение к точному решению СЛАУ примем столбец свободных членов:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$ - нулевое приближение.

Пояснение к обозначению: $x_j^{(i)}$

- верхний индекс *(i)* обозначает номер итерации (приближения),
- нижний *j* – номер неизвестного в уравнении.

Далее находим последовательные приближения к точному решению СЛАУ.

1-я итерация.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12} x_2^{(0)} + \alpha_{13} x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(0)} \\ x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(0)} + \alpha_{23} x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1} x_1^{(0)} + \alpha_{n2} x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{n,n-1} x_{n-1}^{(0)} \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \cdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

2-я итерация.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(1)} + \alpha_{13}x_3^{(1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(1)} \\ x_2^{(2)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(1)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(2)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)} \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \cdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$(k+1)$ - я итерация.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \alpha_{13} x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k)} + \alpha_{23} x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1} x_1^{(k)} + \alpha_{n2} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{n,n-1} x_{n-1}^{(k)} \end{cases}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода последовательных приближений. Процесс Зейделя сходится к точному решению СЛАУ быстрее метода итераций.

Пусть система (2) приведена к нормальному виду (3).

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

Начальное приближение выбираем аналогично методу итераций:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

В методе Зейделя при вычислении ($k+1$)-го приближения неизвестного x_i ($i>1$) учитываются уже найденные ранее ($k+1$)-е приближения неизвестных $x_1, x_2 \ldots, x_{i-1}$.

1 итерация.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \alpha_{13}x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(0)} \\ x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)} \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \cdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

К моменту нахождения $x_2^{(1)}$ уже

Найдено $x_1^{(1)}$, его и используем при вычислении, а не $x_1^{(0)}$.

К моменту нахождения $x_n^{(1)}$ уже найдены $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}$, их и используем вместо $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$.

И т.д.

$(k+1)$-я итерация.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \end{cases}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

И т.д.

Таким образом, на каждой итерации используется информация, только что полученная на этой же итерации.

3. Условия сходимости и окончания итерационного процесса

Рассмотрим СЛАУ (2).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Условие сходимости итерационного процесса

Доказано, что для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения были не меньше ($\geq$) суммы модулей всех остальных коэффициентов этого уравнения, т.е.

$$\begin{aligned}
&|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}| \\
&|a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| + \ldots + |a_{2n}| \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (4) \\
&|a_{nn}| \geq |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{n,n-1}|
\end{aligned}$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенства (4) должны выполняться строго.

Если условие сходимости (4) не выполнено, то мы получаем расходящийся процесс, при котором последовательные приближения $x^{(0)}, x^{(1)} ..., x^{(k)}, ...$ все дальше «уходят» от точного решению СЛАУ.

Условие окончания итерационного процесса

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение $x^{(k)}$, не станет достаточно близким к $x^{(k+1)}$.

Близость двух векторов

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \cdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$ и $$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$ характеризуется максимальной абсолютной величиной их разности $\delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)} \right|$.

Тогда при заданной точности вычислений $\varepsilon > 0$ критерием окончания итерационного процесса является: $\delta < \varepsilon$, т.е.

$$\delta = \max_i | x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)} | < \varepsilon \quad (5)$$

.

Запишем условие (5) более подробно

$$|x_1^{(k)} - x_1^{(k+1)}| < \varepsilon$$

$$|x_2^{(k)} - x_2^{(k+1)}| < \varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(k+1)}| < \varepsilon$$

При выполнении этого условия итерационный процесс называется ***сходящимся***. В этом случае максимальные разности между значениями соответствующих неизвестных в двух последовательных итерациях убывают, а сами значения стремятся к решению системы.

Таким образом, при выполнении условия (5), приближенным решением СЛАУ (2) с точностью ε считается $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$.

Пример применения метода итераций и метода Зейделя

Решим ту же систему, которую решали методом Гаусса $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$, методом итераций и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Напомним, что точное решение системы нами уже получено:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение.

Напомним, что точное решение системы нами уже получено: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

Проверим условие сходимости

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

1. Проверим условие сходимости:

$|8| \geq |1| + |1|$ верно

$|5| \geq |1| + |-1|$ верно

$|5| \geq |-1| + |1|$ верно

Условие сходимости выполнено (иначе можно было бы переставить уравнения в системе).

1. Приводим систему к нормальному виду.

$$\begin{cases} 8x_1 = 26 - x_2 - x_3 \\ 5x_2 = 7 - x_1 + x_3 \\ 5x_3 = 7 - x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3{,}25 - 0{,}125x_2 - 0{,}125x_3 \\ x_2 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \end{cases}$$

Выбираем начальное приближение

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3 \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3 \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$$

***Итерационный процесс*.**

Метод итераций	Метод Зейделя
1 итерация	1 итерация

Метод итераций	Метод Зейделя
1 итерация	1 итерация
$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(0)} - 0{,}125x_3^{(0)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(0)} - 0{,}125x_3^{(0)} \end{cases}$

Метод итераций	Метод Зейделя
1 итерация	1 итерация
$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 x_2^{(0)} - 0{,}125 x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 x_1^{(0)} + 0{,}2 x_3^{(0)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 x_2^{(0)} - 0{,}125 x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 x_1^{(1)} + 0{,}2 x_3^{(0)} \end{cases}$

Метод итераций	Метод Зейделя
1 итерация	1 итерация
$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(0)} - 0{,}125x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(0)} + 0{,}2x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(0)} + 0{,}2x_2^{(0)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(0)} - 0{,}125x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3,25 - 0,125 \cdot 1,4 - 0,125 \cdot 1,4 = 2,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3,25 - 0,125 \cdot 1,4 - 0,125 \cdot 1,4 = 2,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 = 2{,}9 \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 3{,}25 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}03 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 = 2{,}9 \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}1 \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 = 2{,}9 \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 3{,}25 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}03 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 3{,}25 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}03 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 = 2{,}9 \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}1 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}04 \end{cases}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}9 \\ 1{,}03 \\ 1{,}03 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}9 \\ 1{,}1 \\ 1{,}04 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(0)} - x_1^{(1)}| = |3,25 - 2,9| = 0,35$$

$$|x_1^{(0)} - x_1^{(1)}| = |3,25 - 2,9| = 0,35$$

$\lvert x_1^{(0)} - x_1^{(1)} \rvert = \lvert 3{,}25 - 2{,}9 \rvert = 0{,}35$ $\lvert x_2^{(0)} - x_2^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}03 \rvert = 0{,}37$	$\lvert x_1^{(0)} - x_1^{(1)} \rvert = \lvert 3{,}25 - 2{,}9 \rvert = 0{,}35$ $\lvert x_2^{(0)} - x_2^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}1 \rvert = 0{,}3$

$\lvert x_1^{(0)} - x_1^{(1)} \rvert = \lvert 3{,}25 - 2{,}9 \rvert = 0{,}35$	$\lvert x_1^{(0)} - x_1^{(1)} \rvert = \lvert 3{,}25 - 2{,}9 \rvert = 0{,}35$
$\lvert x_2^{(0)} - x_2^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}03 \rvert = 0{,}37$	$\lvert x_2^{(0)} - x_2^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}1 \rvert = 0{,}3$
$\lvert x_3^{(0)} - x_3^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}03 \rvert = 0{,}37$	$\lvert x_3^{(0)} - x_3^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}04 \rvert = 0{,}36$

$$|x_1^{(0)} - x_1^{(1)}| = |3{,}25 - 2{,}9| = 0{,}35$$

$$|x_2^{(0)} - x_2^{(1)}| = |1{,}4 - 1{,}03| = 0{,}37$$

$$|x_3^{(0)} - x_3^{(1)}| = |1{,}4 - 1{,}03| = 0{,}37$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} |x_i^{(0)} - x_i^{(1)}| = 0{,}37 > \varepsilon$$

$$|x_1^{(0)} - x_1^{(1)}| = |3{,}25 - 2{,}9| = 0{,}35$$

$$|x_2^{(0)} - x_2^{(1)}| = |1{,}4 - 1{,}1| = 0{,}3$$

$$|x_3^{(0)} - x_3^{(1)}| = |1{,}4 - 1{,}04| = 0{,}36$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} |x_i^{(0)} - x_i^{(1)}| = 0{,}36 > \varepsilon$$

Требуемая точность не достигнута	Требуемая точность не достигнута

2 итерация	2 итерация
$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(1)} - 0{,}125x_3^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(1)} - 0{,}125x_3^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}2x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}2x_2^{(2)} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 = 2{,}993 \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}03 = 1{,}026 \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}03 = 1{,}026 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 = 2{,}983 \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}993 + 0{,}2 \cdot 1{,}04 = 1{,}011 \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}983 + 0{,}2 \cdot 1{,}011 = 1{,}006 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}993 \\ 1{,}026 \\ 1{,}026 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}983 \\ 1{,}011 \\ 1{,}006 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}| = |2{,}9 - 2{,}993| = 0{,}093$$
$$|x_2^{(1)} - x_2^{(2)}| = |1{,}03 - 1{,}026| = 0{,}004$$
$$|x_3^{(1)} - x_3^{(2)}| = |1{,}03 - 1{,}026| = 0{,}004$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}| = |2{,}9 - 2{,}983| = 0{,}083$$
$$|x_2^{(1)} - x_2^{(2)}| = |1{,}1 - 1{,}011| = 0{,}089$$
$$|x_3^{(1)} - x_3^{(2)}| = |1{,}04 - 1{,}006| = 0{,}034$$

$\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \| = 0{,}093 > \varepsilon$ Требуемая точность не достигнута	$\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \| = 0{,}089 > \varepsilon$ Требуемая точность не достигнута

3 итерация	3 итерация
$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(2)} - 0{,}125x_3^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}2x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}2x_2^{(2)} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}026 - 0{,}125 \cdot 1{,}026 = 2{,}994 \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}993 + 0{,}2 \cdot 1{,}026 = 1{,}007 \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}993 + 0{,}2 \cdot 1{,}026 = 1{,}007 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(2)} - 0{,}125x_3^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(3)} + 0{,}2x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(3)} + 0{,}2x_2^{(3)} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}011 - 0{,}125 \cdot 1{,}006 = 2{,}998 \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}998 + 0{,}2 \cdot 1{,}006 = 1{,}002 \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}998 + 0{,}2 \cdot 1{,}002 = 1{,}001 \end{cases}$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}994 \\ 1{,}007 \\ 1{,}007 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}998 \\ 1{,}002 \\ 1{,}001 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(3)}| = |2{,}993 - 2{,}994| = 0{,}001$$
$$|x_2^{(2)} - x_2^{(3)}| = |1{,}026 - 1{,}007| = 0{,}019$$
$$|x_3^{(2)} - x_3^{(3)}| = |1{,}026 - 1{,}007| = 0{,}019$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(3)}| = |2{,}983 - 2{,}998| = 0{,}015$$
$$|x_2^{(2)} - x_2^{(3)}| = |1{,}011 - 1{,}002| = 0{,}009$$
$$|x_3^{(2)} - x_3^{(3)}| = |1{,}006 - 1{,}001| = 0{,}005$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} | x_i^{(2)} - x_i^{(3)} | = 0{,}019 > \varepsilon$$

Требуемая точность не достигнута

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} | x_i^{(2)} - x_i^{(3)} | = 0{,}015 > \varepsilon$$

Требуемая точность не достигнута

4 итерация	4 итерация
$\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125\,x_2^{(3)} - 0{,}125\,x_3^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(3)} + 0{,}2x_3^{(3)} \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(3)} + 0{,}2x_2^{(3)} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}007 - 0{,}125 \cdot 1{,}007 = 2{,}998 \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}994 + 0{,}2 \cdot 1{,}007 = 1{,}003 \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}994 + 0{,}2 \cdot 1{,}007 = 1{,}003 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125\,x_2^{(3)} - 0{,}125\,x_3^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(4)} + 0{,}2x_3^{(3)} \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(4)} + 0{,}2x_2^{(4)} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}003 - 0{,}125 \cdot 1{,}003 = 2{,}999 \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}999 + 0{,}2 \cdot 1{,}003 = 1{,}001 \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}999 + 0{,}2 \cdot 1{,}001 = 1{,}000 \end{cases}$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}998 \\ 1{,}003 \\ 1{,}003 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}999 \\ 1{,}001 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}$$

$$| x_1^{(3)} - x_1^{(4)} | = |2,994 - 2,998| = 0,004$$

$$| x_2^{(3)} - x_2^{(4)} | = |1,007 - 1,003| = 0,004$$

$$| x_3^{(3)} - x_3^{(4)} | = |1,007 - 1,003| = 0,004$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} | x_i^{(3)} - x_i^{(4)} | = 0,004 < \varepsilon$$

Требуемая точность достигнута

$$| x_1^{(3)} - x_1^{(4)} | = |2,998 - 2,999| = 0,001$$

$$| x_2^{(3)} - x_2^{(4)} | = |1,002 - 1,001| = 0,001$$

$$| x_3^{(3)} - x_3^{(4)} | = |1,001 - 1,000| = 0,001$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} | x_i^{(3)} - x_i^{(4)} | = 0,001 < \varepsilon$$

Требуемая точность достигнута