Решение иррациональных уравнений

Ощущение тайны – наиболее прекрасное из доступных нам переживаний. Именно это чувство стоит у колыбели истинного искусства и настоящей науки.

А .Эйнштейн

Найти область определения

I г Y= $\sqrt{x-6}$

II г Y= $\sqrt{\frac{7}{x}}$

III г Y= $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$

IV г Y= $\sqrt{x}$

X ≥ 6

X > 0

X > -2

X ≥ 0

Из последнего промежутка найти наименьшее положительное целое число.

Выбрать нужное уравнение

I г Линейные

II г Квадратные

III г Дробно-рациональные

IV г вадратные

$10=6y-8$

$5a^2-4a=33$

$$-\frac{6}{x}+\frac{x}{3}=-1$$

$-5b^4-4b^2-6=0$

$-5b^4-4b^2-6=0$, $10=6y-8$, $-\frac{6}{x}+\frac{x}{3}=-1$, $5a^2-4a=33$

- Является ли **3** корнем вашего уравнения
- $x^2=-4$

Является ли число x_0 корнем уравнения?

I г	$\sqrt[3]{x} = -3$	$x_0 = 27$	нет
II г	$\sqrt{x} - 5 = 1$	$x_0 = 36$	да
III г	$\sqrt{x+1} - 2 = 0$	$x_0 = 8$	нет
IV г	$2 = x^2$	$x_0 = \sqrt{2}$	да

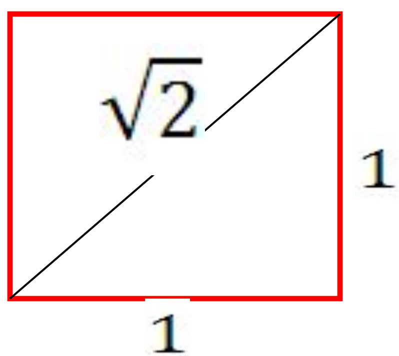
- $\sqrt{2}$ - какое число?

- Избавьтесь от иррациональности $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

«История неразумных чисел»

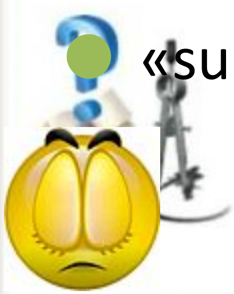
Удивительное открытие пифагорийцев.

Каким числом выражается длина диагонали квадрата со стороной **1**?



$\sqrt{2}$ – ?

- С латыни слово «irrationalis» означает «неразумный».
- «surdus» - «глухой» или «немой»



«ни высказать, ни

ПОНЯТИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Если в уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, то уравнение называют **иррациональным**.

Примеры:

$$\sqrt{2x+1}=3$$

$$\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x-7}$$

$$\sqrt{2x^2+5x-2}=x-6$$

Выбрать иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x-1}=3$$

$$y^2+3y\sqrt{2}=4$$

$$x+\sqrt{x^2+9}=2$$

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{6y}=0$$

$$\sqrt[3]{x-9}=-3$$

$$\sqrt{3}y-4=5$$

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$$

$$\sqrt{x}=x-2$$

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- возведение в степень обеих частей уравнения;

- введение новой переменной;

- метод анализа уравнения.

Метод возведения в квадрат обеих частей уравнения

Пример №1 $\sqrt{2x+1}=3$

$$2x+1=3^2$$

$$2x+1=9$$

$$2x=8$$

$$x=4$$

Ответ: $x=4$

Метод возведения в квадрат обеих частей уравнения

Пример №2 $\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x-7}$

$$(\sqrt{2x-5})^2=(\sqrt{4x-7})^2$$

$$2x-5=4x-7$$

$$x=1$$

Проверим!!!

ПРОВЕРКА

Подставим 1 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2\cdot 1-5}=\sqrt{4\cdot 1-7}$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{-3}$$

$x=1$ **- посторонний корень**

Ответ: *иррациональное уравнение не*

имеет корней

ЗАПОМНИ

1) Возвести обе части уравнения в квадрат.
2) Обязательно сделать проверку!!!

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

1) Если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно записать так, чтобы в одной части знака равенства оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилась рациональное уравнение.

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

2) Если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Решите устно

$$\sqrt{x-16}=1 \qquad x=17$$

$$\sqrt{25x^2}=10 \qquad x=\pm 2$$

Решите устно

$$\sqrt{x^2-1}=2 \qquad x=\pm\sqrt{5}$$

$$\sqrt{7x-1}=3 \qquad x=\frac{10}{7}$$

$$\sqrt{x^2-5x+4}=0 \qquad x=1, x=4$$

ТРЕНИРУЕМСЯ РЕШАТЬ

1) $\sqrt{x+2}=3$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=3^2$$

$$x+2=9$$

$$x=7.$$

$$\textit{Проверка}:$$

$$\sqrt{7+2}=3$$

$$\sqrt{9}=3$$

$$3=3(\textit{верно})$$

2) $\sqrt{6+5x^2}=2$

$$\left(\sqrt{6+5x^2}\right)^2=2^2$$

$$6+5x^2=4$$

$$x^2=-\frac{2}{3}.$$

Корней нет

<u>Пример №2</u> $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1$$

$$3x^2-9x=0$$

$$3x(x-3)=0$$

$x=0$ или $x=3.$

Проверка: 1) $x=0$: $\sqrt{0+5*0+1}=2*0-1$

1≠-1

2) $x=3$: $\sqrt{9+15+1}=6-1$

5=5

Ответ: $x=3.$

<u>Пример №3</u> Решите уравнение $\sqrt{2x-3}=4-x$

<u>Пример №3</u> Решите уравнение $\sqrt{2x-3}=4-x$

$$\begin{cases} 2x-3=(4-x)^2 \\ 4-x\geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x^2-10x+19=0 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

$\underline{x=5-\sqrt{6}}$

$x=5+\sqrt{6}>4$ – посторонний корень

Ответ: $x=5-\sqrt{6}$.

Пример№4

Решите уравнение $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$

$$\begin{cases} x^2-2=x \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x=-1<0 - \text{посторонний корень} \\ x=2 \end{matrix}$$

Ответ: 2.

Пример №5 Решите уравнение

$\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-2}=3$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} => x \geq 2$

$$\sqrt{3x-1}=3+\sqrt{x-2}$$
$$3x-1=9+6\sqrt{x-2}+x-2$$
$$3x-1=7+x+6\sqrt{x-2}$$
$$2x-8=6\sqrt{x-2}$$
$$x-4=3\sqrt{x-2}$$
$$x^2-8x+16=9(x-2)$$

$$x^2-17x+34=0$$

$$D=17^2-4*1*34=289-136=153$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{153}=\sqrt{9*17}=3\sqrt{17}$$

$$x=\frac{17+3\sqrt{17}}{2} \in \text{ОДЗ}$$

$$x=\frac{17-3\sqrt{17}}{2}<4 \notin ОДЗ - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $\frac{17+3\sqrt{17}}{2}$

Пример №6 Решить уравнение

$$x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$$

$$(x-1)^3=x^2-x-1$$

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1$$

$$x^3-4x^2+4x=0$$

$$x(x^2-4x+4)=0$$

$$x=0 \ \text{ или } \ x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

Ответ: $x=0;\ 2.$

Пример №7 Решите уравнение

$$\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}=1$$

$$\left(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}\right)^3=1^{\,3}$$

$$5-x+3\sqrt[3]{(5-x)^2}*\sqrt[3]{x+5}+3\sqrt[3]{5-x}*\sqrt[3]{(x+5)^2}+x+5=1$$

$$3\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}\left(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}\right)=-9$$

$$3\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}*1=-9$$

$$\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}=-3$$

$$(5-x)(5+x)=-27$$

$$25-x^2=-27$$

$$x^2=52$$

$$x=\pm2\sqrt{13}$$

Ответ: $x=\pm2\sqrt{13}$.

Пример №8 Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$$

Пример №8 Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$$

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = (x - 1)^2$$

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1$$

$$-x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x$$

$$-x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2)$$

$$-x\left(\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)\right) = 0$$

$x = 0 -$ постороний корень

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{4}$$

Ответ: $x = \frac{5}{4}$

Метод введения новой переменной

Данный метод применяется в том случае, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл принять это выражение за новую переменную и решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом найти исходную величину.

Пример №9 Решите уравнение

$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0 \qquad x \geq 0$

$\sqrt[8]{x} = y, \quad y \geq 0$

$y^2 + y - 2 = 0$

$\underline{y = 1}$

$y = -2 < 0$ – посторонний корень

$y = 1, \qquad \sqrt[8]{x} = 1, \quad => x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Метод замены переменной

Пример №10

$$2x+\sqrt{x}-5=0$$

Делаем замену :

$$\sqrt{x}=t$$

$$x=t^2$$

$$t^2+5t-6=0$$

$$D=25+24=49$$

$$t_1=-6,\ t_2=1$$

Подставляем :

$\sqrt{x}=-6$ - посторонний корень

$$\sqrt{x}=1,\ x=1$$

Ответ : x = 1

Пример №11 Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=a,\quad a>0$$

$$a-2*\frac{1}{a}=1$$

$$a^2-a-2=0$$

$a=-1<0$ – посторонний корень

$\underline{a=2}$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2$$

$$2x+1=4(x-1)$$

$$2x=5\ \ =>x=2{,}5$$

Ответ: $x=2{,}5$.

Метод анализа уравнения

Свойства корней, которые используют при решении уравнений данным способом:

1. Все корни четной степени являются арифметическими, то есть если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения.

3. Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$

являются возрастающими в своей области определения.

Пример

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{20}=\sqrt{5}$$

$$\sqrt{x+1}=-\sqrt{5}$$

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

Пример $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2+5} = 1$

$$x^2 + 1 < 2x^2 + 5$$

Уравнение не имеет решений.

Пример $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2$

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Уравнение не имеет решений.

Домашняя работа
решите уравнения

1). $\sqrt{5x-16}=x-2$

2). $\sqrt{2x^2+8x+16}=44-2x$

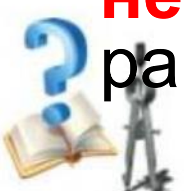
3). $\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+2}=3$

4). $2x+\sqrt{x}-3=0$

Итоги урока

- Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**.

- **При возведении обеих частей уравнения**
  - в **четную** степень (показатель корня – **четное** число) – возможно появление постороннего корня (**проверка необходима**).
  - в **нечетную** степень (показатель корня – **нечетное** число) – получается уравнение, равносильное исходному (**проверка не нужна**).



- **Решая иррациональные уравнения с помощью равносильных преобразований** –