Тема: ***Числовые ряды***

Основные понятия теории числовых рядов

1. Основные определения

Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение вида*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\mathrm{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют ***числовым рядом***.

При этом, члены последовательности $\{u_\mathrm{n}\}$ называются ***члена-ми ряда*** (1-м, 2-м, …, *n*-м (общим членом))

Если начиная с некоторого номера N для членов ряда справедливо равенство

$$u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \ldots = 0\ ,$$

то ряд называют ***конечным***. В противном случае ряд называется ***бесконечным .***

Ряд $\sum u_n$ называют

- ***знакоположительным***, если $u_n \geq 0\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ;$
- ***знакоотрицательным***, если $u_n \leq 0\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ;$
- ***знакопостоянным***, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда $\sum u_n$ запишем последовательность

$$S_1 = u_1 , \quad S_2 = u_1 + u_2 , \quad \dots , \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n , \quad \dots$$

Числа $S_1, S_2, \dots, S_n$ называют ***частичными суммами ряда*** $\sum u_n$ (1-й, 2-й, …, n-й).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд $\sum u_n$ называется* ***сходящимся****, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм* $\{ S_n \}$.

При этом, число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *называют* ***суммой ряда*** $\sum u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \nexists)$ *то говорят, что ряд* $\sum u_n$ ***расходится*** *и не имеет суммы*.

Если S – сумма ряда $\sum u_n$, то записывают: $\sum u_n = S$.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЯДОВ

1) Рассматривается в математическом анализе:

Определить, сходится или расходится заданный ряд

(говорят: «исследовать ряд на сходимость»)

2) Рассматривается в вычислительной математике:

Найти сумму сходящегося ряда.

Найти точное значение суммы S сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают $S \approx S_n$ где n выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число R_n называют ***остатком ряда***.

Пример 1.1.1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

Решение. Члены данного ряда образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 1$ и $a_1 = 1$. Поэтому n -частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n$ имеет вид $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n$ расходится.

Пример 1.1.2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} .$$

Решение. Для данного ряда всякая частичная сумма s_k с чётным номером равна 0, а всякая сумма с нечётным номером равна 1. Последовательность частичных сумм этого ряда $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, … хотя и ограничена, но предела не имеет. Значит, ряд расходится.

Пример 1.1.3. Исследовать на сходимость ряд

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n .$$

Решение. Данный ряд составлен из элементов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q. Тогда сумма n первых членов ряда имеет вид

$$s_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \ q \neq 1 .$$

Заметим, что

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}, \text{ если } |q|<1, \\ \infty, \quad \text{ если } |q|>1. \end{cases}$$

Если $q=1$, то n-частичная сумма имеет вид $s_n = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_1}_{n \text{ штук}} = n b_1$ и $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_1 n = b_1 \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Если $q=-1$, то n-частичная сумма имеет вид $s_n = \underbrace{b_1 - b_1 + b_1 - \cdots + b_1}_{n \text{ штук}} = b_1(1-1+\cdots+1)$. При чётном $n=2k$ $s_{2k}=0$ и $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = 0$. При нечётном $n=2k+1$ $s_{2k+1}=1$ и $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = 1$. Это означает, что $\lim_{n\to\infty} s_n$ не существует.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$ сходится при $|q|<1$ и его сумма равна $\dfrac{b_1}{1-q}$; при $|q|\geq 1$ он расходится.

2. Основные свойства числовых рядов

ТЕОРЕМА 1.

Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) ***Произведением ряда*** $\sum u_n$ ***на число*** $c \in \mathbb{R}$ *называется ряд*

$$\sum c \cdot u_n .$$

2) ***Суммой (разностью) рядов*** $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *называется ряд*

$$\sum (u_n + v_n) \quad [\ \sum (u_n - v_n)\ ].$$

ОБОЗНАЧАЮТ: $c \cdot \sum u_n$ – произведение ряда на число c ;

$\sum u_n \pm \sum v_n$ – сумма (разность) рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$

ТЕОРЕМА 2 (об арифметических действиях над сходящимися рядами)

Если ряд $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* U,

ряд $\sum v_n$ *сходится и его сумма равна* V,

то а) *ряд* $\sum c u_{\mathrm{n}}$ – *сходится и его сумма равна* cU $(\forall c \in \mathbb{R})$;

б) *ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *сходится и его сумма равна* $U \pm V$.

СЛЕДСТВИЯ теоремы 2.

1) *Если* $\sum u_n$ *расходится, то* $\forall c \neq 0$ $(c \in \mathbb{R})$ *ряд* $\sum c u_{\mathrm{n}}$ – *тоже расходится*.

2) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится, а ряд* $\sum v_n$ *расходится, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *расходится*.

ТЕОРЕМА 3 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum u_{\mathrm{n}}$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

СЛЕДСТВИЕ теоремы 3 (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд* $\sum u_{\mathrm{n}}$ *расходится.*

ТЕОРЕМА 4 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).

Пусть ряд $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* U

Если сгруппировать члены этого ряда, НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА, то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму U.

Пример 1.3.2. Установить расходимость следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+6}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Решение. *а*) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+6}$ расходится, так как не выполняется необходимый признак $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+6} = \frac{2}{5} \neq 0$.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \neq 0$.

Таким образом, приведённый признак сходимости следует понимать так:

Если $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$ (или не существует), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Но если $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Сходимость знакоположительных рядов

ЛЕММА (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного ряда).

Знакоположительный ряд сходится $\Leftrightarrow$ последовательность его частичных сумм ограничена.

ТЕОРЕМА (первый признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды, причем*

$$u_n \le v_n\,, \ \forall\, n \ge N\ (N \in \mathbb{N}).$$

Тогда

1) *если ряд* $\sum v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum u_n$ *тоже сходится;*
2) *если ряд* $\sum u_n$ *расходится, то и ряд* $\sum v_n$ *тоже расходится.*

ТЕОРЕМА (второй признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды.*
Если при $n \to \infty$ *существует конечный и отличный от нуля предел отношения их общих членов, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут себя одинаково по отношению к сходимости.*

ЭТАЛОННЫЕ РЯДЫ, которые используются в признаках сравнения:

а) **гармонический ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

б) **обобщенный гармонический ряд** (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad - \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если } \alpha > 1, \\ \text{расходится}, & \text{если } \alpha \le 1. \end{cases}$$

в) **ряд геометрической прогрессии**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} \quad - \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если } |q| < 1, \\ \text{расходится}, & \text{если } |q| \ge 1. \end{cases}$$

Пример 1.4.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}.$$

Решение. Поскольку $\frac{\cos^2 n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$, то члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$ меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, составленного из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$.

Пример 1.4.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n+n^2}.$$

Решение. Общий член данного ряда $u_n = \dfrac{1+n}{2+n+n^2}$ эквивалентен при $n \to \infty$ дроби $\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$. Поэтому в качестве эталонного ряда выбираем гармонический ряд, общий член которого $v_n = \dfrac{1}{n}$. Воспользуемся вторым признаком сравнения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1+n+n^2} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+n)}{2+n+n^2} = 1 \neq 0.$$

Так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то и исследуемый ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1+n}{2+n+n^2}$ также расходится.

ТЕОРЕМА (признак Даламбера).

Пусть $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell .$$

Тогда

а) если $\ell < 1$ *, то ряд сходится;*

б) если $\ell > 1$ *, то ряд расходится;*

в) если $\ell = 1$ *, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Пример 1.4.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. Имеем $u_n = \frac{n}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Найдём их отношение

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^n} : \frac{n}{2^n} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$. Тогда

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 1.4.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение. Имеем $u_n = \frac{n^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} \frac{n!}{n!(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

следовательно, ряд расходится.

ТЕОРЕМА (**признак Коши**).

Пусть $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell .$$

Тогда

а) если $\ell < 1$, *то ряд сходится;*

б) если $\ell > 1$, *то ряд расходится;*

в) если $\ell = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

***Замечания*.**

1) В признаках Коши и Даламбера случай $\ell = \infty$ включается в $\ell > 1$.

2) В ходе доказательства теорем показывается, что если $\ell > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

Пример 1.4.10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2+1}\right)^{2n}.$$

Решение. Имеем $u_n = \left(\frac{2n^2+5}{n^2+1}\right)^{2n}$, тогда

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+5}{n^2+1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2+1}\right)^{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = 4 > 1,$$

следовательно, ряд расходится.

ТЕОРЕМА (**интегральный признак Коши**).

Пусть $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд,*
$f(x)$ *– непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая на* $[c;+\infty)$ *(где* $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$*) функция такая, что*

$$f(n) = u_n \quad (\text{для любого } n = 1,2,3 \ldots).$$

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ *и ряд* $\sum\limits_{n=c}^{\infty} u_n$ *ведут себя одинаково относительно сходимости.*

Пример 1.4.1. С помощью интегрального признака исследовать на сходимость *обобщённый гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^{p}}$ $(x \ge 1)$.

Пусть $p > 1$, тогда

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{p}} = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \frac{1}{-p+1}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{x^{b-1}} - 1\right) =$$

$= -\dfrac{1}{-p+1} = \dfrac{1}{p-1}$. В этом случае значение интеграла есть конечное число, т.е. интеграл сходится, а значит, и ряд сходится.

Если $0 < p < 1$, имеем $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{-p+1}\lim\limits_{b\to\infty}\left(x^{1-b} - 1\right) = \infty$ и несобственный интеграл расходится, следовательно, и ряд расходится.

При $p < 0$ обобщённый гармонический ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости

Сходимость знакопеременных рядов

1. Знакочередующиеся ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки, называется* ***знакочередующимся***.

Будем считать, что 1-й член знакочередующегося ряда положителен.

$\Rightarrow$ знакочередующийся ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum (-1)^{n+1} \cdot u_n , \qquad (1)$$

где $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА (признак сходимости Лейбница).

Пусть знакочередующийся ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ *удовлетворяет условиям:*

1) *члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Тогда ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ *сходится, причем его сумма* S *положительна и не превосходит первого члена ряда.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{n^3+2}$$

Данный ряд является знакочередующимся. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^3+2}=0$, условие выполняется;

$б)$ $u_n>u_{n+1}$

В нашем случае

$$u_n=\frac{2n}{n^3+1}, u_{n+1}=\frac{2(n+1)}{(n+1)^3+1},$$

$$u_n-u_{n+1}=\frac{2(n+1)((n+1)^3+1)-2n(n^3+1)}{(n^3+1)((n+1)^3+1)}=\frac{2(4n^3+4n+6n^2+1)}{(n^3+1)((n+1)^3+1)}>0.$$

Следовательно, $u_n>u_{n+1}$, и второе условие также выполняется.

Так как оба условия признака Лейбница выполняются, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{n^3+1} \text{ сходится.}$$

Замечания.

1) Ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ будет сходиться и в том случае, когда условие теоремы Лейбница выполняется, начиная с некоторого номера N. Но утверждение о сумме ряда в этом случае не будет иметь места.

2) Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то погрешность, получаемая при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n, не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, т.е.

$$|R_n| = |S - S_n| < u_{n+1}$$

3) Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ не удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, то он расходится (т.к. не выполнено необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, но не удовлетворяет ее 1-му условию, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

2. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Пусть $\sum u_n$ – знакопеременный ряд.
Рассмотрим ряд $\sum |u_n|$.

ТЕОРЕМА (признак абсолютной сходимости).

Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

Замечание. Признак абсолютной сходимости достаточный, но не необходимый. Т.е. существуют сходящиеся знакопеременные ряды $\sum u_n$, для которых $\sum |u_n|$ – расходится.

ОПРЕДЕЛНИЕ. *Ряд $\sum u_n$ называют* ***абсолютно сходящимся****, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.*

Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют ***условно сходящимся****.*

Исследовать на сходимость ряд $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. О сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ на основании достаточного признака сходимости ничего сказать нельзя, так как ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд – расходится. Но для этого ряда выполняются оба условия теоремы Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; 2) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $\forall\, n$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится. Отметим, что он сходится условно, так как ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1) ТЕОРЕМА.

Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum (\alpha u_n \pm \beta v_n)$ тоже сходится абсолютно $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

СЛЕДСТВИЕ.

Если ряд $\sum u_n$ – сходится абсолютно,

$\sum v_n$ – сходится условно,

то ряд $\sum (\alpha u_n \pm \beta v_n)$ сходится условно $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$.

2) ТЕОРЕМА (о перестановке членов ряда).

а) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится абсолютно*, *то ряд*, *полученный из него в результате перестановки членов*, *также сходится абсолютно и имеет ту же сумму*.

б) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится условно*, *то можно так переставить члены ряда*, *что сумма получившегося ряда будет равна любому*, *заранее заданному числу*.

Более того, *можно так переставить члены ряда*, *что получившийся ряд будет расходиться* (теорема Римана).

3) ТЕОРЕМА (о сходимости произведения рядов).

Пусть ряды $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся абсолютно и их суммы равны* U *и* V *соответственно.*

Тогда ряд $\sum u_n \cdot \sum v_n$ *тоже сходится абсолютно и его сумма равна* $U \cdot V$.

4) ТЕОРЕМА (признак Дирихле).

Пусть 1) *последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) *последовательность частичных сумм ряда* $\sum b_n$ *ограничена.*

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ – *сходится* .

5) ТЕОРЕМА (признак Абеля).

Пусть 1) $\{a_n\}$ *монотонная и ограниченная;*

2) *ряд* $\sum b_n$ – *сходится.*

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ – *сходится*