Введение в асимптотические методы. Лекция 2

Асимптотические разложения

1. Сходимость

Ряд $\sum_n f_n(z)$ **сходится** при фиксированном z если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_0(z,\varepsilon) : \forall M, N > N_0 \quad \left| \sum_{n=M}^{N} f_n(z) \right| < \varepsilon$$

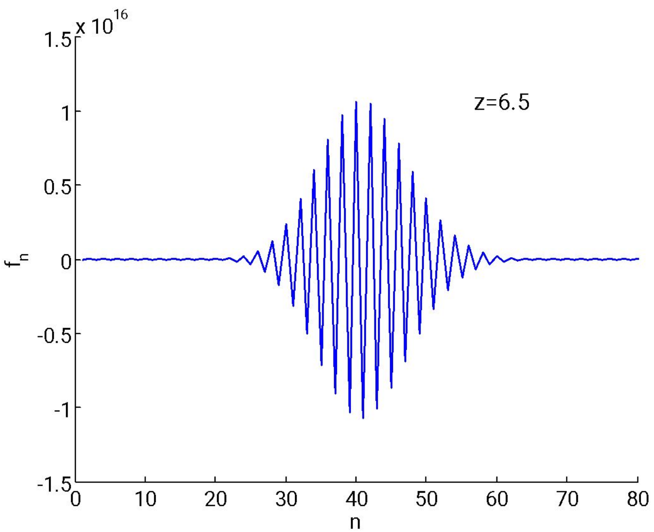
Свойство сходимости не столь полезно на практике как принято думать:

$$\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_0^\infty \frac{(-t)^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^9}{216} - \dots \right)$$

Точность 10^{-5}

$$z = 1 \quad n = 8$$
$$z = 2 \quad n = 16$$
$$z = 3 \quad n = 31$$
$$z = 7 \quad n = 98$$



2. Асимптотичность

Альтернативное выражение для Erf при больших z:

$$\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}dt$$

Ряд расходится

Интегрирование по частям:

$$\int_z^\infty e^{-t^2}dt = -\int_z^\infty \frac{de^{-t^2}}{2t} = \frac{e^{-z^2}}{2z} - \int_z^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2}dt = \ldots$$

$$= \frac{e^{-z^2}}{2z}\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1\cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2z^2)^3} + \ldots\right)$$

Точность 10^{-5}

$z = 2.5 \quad n = 3$

$z > 3 \quad n = 2$

$$\boxed{\mathrm{Erf}(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{2z}\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1\cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2z^2)^3} + O(z^{-8})\right)}$$

Это разложение обладает тем важным свойством, что (при больших z) главный член дает очень хорошее приближение, а последующие члены все в меньшей и меньшей степени его корректируют. Такого сорта разложения называют асимптотическими. Более конкретно, в данном случае мы имеем дело с асимптотическим разложением функции $\mathrm{Erf}\, z$ по степеням z^{-k} при $z \to \infty$

3. Асимптотичность и сходимость

Идеология работы с асимптотическими разложениями в корне отличается от работы со сходящимися рядами.

- **Сходимость** требует, чтобы при $n \to \infty$ члены ряда быстро убывали. Не обязательно сразу, рано или поздно.
- **Асимптотичность** требует чтобы уже главный член был хорошим приближением при $z \to \infty$. Поэтому, как правило, он вполне достаточен, если нас интересует указанная асимптотика. Лишь в том случае, когда он тривиален (как в рассмотренном примере) нужен следующий член.

Определенные проблемы возникают, если значение z не достаточно велико. Добавка нескольких дополнительных членов в этом случае оказывается полезной. **Общим правилом** является ограничение их количества требованием того, чтобы **следующий член разложения был меньше предыдущего**.

4. Определения: Асимптотическая последовательность

Последовательность функций $\delta_0(z), \delta_1(z), \ldots$ называется *асимптотической последовательностью* при $z \to a$, если при всех

$$z \to a: \qquad \delta_{n+1} / \delta_n \to 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta_{n+1} = o\left(\delta_n\right)$$

Примеры

$$1, z, z^2, z^3, \ldots \qquad z \to 0$$

$$1, z^{1/2}, z^1, z^{3/2}, \ldots \qquad z \to 0$$

$$1, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, \ldots \qquad z \to \infty$$

5. Определения: Асимптотическое разложение

Говорят, что функция $f(z)$ имеет ***асимптотическое разложение*** по последовательности $\delta_0(z), \delta_1(z), \ldots$, если существуют константы $c_0, c_1, \ldots$ такие что, для каждого $n < N$

$$f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k \delta_k(z) = o\left(\delta_n(z)\right) \qquad z \to a$$

В этом случае пишут $f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} c_n \delta_n(\varepsilon)$

Если $N = \infty$ то говорят об **асимптотическом ряде**

6. Единственность

Если асимптотическая последовательность фиксирована и асимптотическое разложение функции f существует, то константы c_k определяются однозначно.

$$\lim_{z\to a}\left[\frac{f(z)-\sum_0^n c_k\delta_k(z)}{\delta_n(z)}\right]=0$$

$$\frac{f(z)-\sum_0^{n-1} c_k\delta_k(z)}{\delta_n(z)}=\frac{f(z)-\sum_0^{n} c_k\delta_k(z)+c_n\delta_n(z)}{\delta_n(z)}=c_n+\frac{f(z)-\sum_0^{n} c_k\delta_k(z)}{\delta_n(z)}$$

$$\boxed{c_n=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-\sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\delta_k(z)}{\delta_n(z)}}$$

7. АР не обязательно существует

При заданной асимптотической последовательности $\delta_0(z), \delta_1(z), \ldots$ асимптотического разложения $f(z)$ может не существовать. Это выражается в том, что предела

$$c_n = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_k(z)}{\delta_n(z)}$$

в этом случае нет (например, он равен бесконечности). Мы сталкивались с такой ситуацией на предыдущей лекции, когда пытались формально построить асимптотическое разложение

$$f = \frac{1 \pm \varepsilon^{1/2}}{1 - \varepsilon}$$

по целым степеням ε

Вывод: выбор «родной» асимптотической последовательности для данной функции является ответственным шагом при построения ее асимптотического разложения

8. Неединственность

Различные функции могут иметь одинаковое асимптотическое разложение по заданной асимптотической последовательности, равно как и заданная функция может иметь различные асимптотические разложения по разным асимптотическим последовательностям.

Примеры

$$\mathrm{tg}(\varepsilon) \sim \varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon^3 + \tfrac{2}{15}\varepsilon^5$$

$$\sim \sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}(\sin\varepsilon)^3 + \tfrac{3}{8}(\sin\varepsilon)^5$$

$$\sim \varepsilon\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\varepsilon\right) + \tfrac{31}{270}\left(\varepsilon\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\varepsilon\right)\right)^5$$

$$\exp(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \qquad (\varepsilon \to 0)$$

$$\exp(\varepsilon) + \exp(-\varepsilon^{-2}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}$$

9. Операции над АР

- Можно складывать, вычитать, делить, умножать. При этом, возможно, придется расширить асимптотическую последовательность
- Можно подставлять одно АР в другое. При этом, однако, надо соблюдать осторожность.

$$f(z) = \exp(z^2) \quad f(z(\varepsilon)) = \exp(\varepsilon^{-2} + 2 + \varepsilon^2) \sim \exp(\varepsilon^{-2}) e^2 \left(1 + \varepsilon^2 + \ldots\right)$$

$$z = \varepsilon + \varepsilon^{-1} \qquad f(z(\varepsilon)) \neq f(\varepsilon^{-1}) \sim \exp(\varepsilon^{-2})$$

- Можно интегрировать.
- В общем случае нельзя дифференцировать.

Трудности приходят от членов типа $\varepsilon \cos(\varepsilon^{-1})$ которые при дифф-ии дают не ожидаемые $O(1)$ а $O(\varepsilon^{-1})$. Это не аналитические члены. Если $f(\varepsilon)$ аналитична в некотором секторе ε-плоскости, то в этом секторе можно диф-ть

10. Еще раз о терминологии.

$$\left.\begin{array}{l} f(\varepsilon)=O(g(\varepsilon)) \\[2em] f(\varepsilon)=o(g(\varepsilon)) \\[2em] f(\varepsilon)\sim g(\varepsilon) \\[2em] f(\varepsilon)\propto g(\varepsilon) \end{array}\right\} \quad \text{если} \quad \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \left\{\begin{array}{l} \text{ограничено} \\[2em] \to 0 \\[2em] \to 1 \\[2em] \to C \quad (C\neq 0,\pm\infty) \end{array}\right. \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0$$

11. Разложения, зависящие от параметра

В данном курсе мы будем рассматривать главным образом функции двух (или большего числа) переменных $f(x,\varepsilon)$, изучая их асимптотическое поведение, когда одна из переменных, ε, мала. В типичных ситуациях $f(x,\varepsilon)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению по отношению к x, а ε выступает в роли параметра задачи.

Естественное обобщение определения асимптотического разложения

$$f(x,\varepsilon) \sim \sum c_k(x)\delta_k(\varepsilon)$$

Если это разложение равномерно пригодным для всех x из области определения этой переменной, то говорят о **регулярном** (или **равномерно пригодном**), в противном случае – о **сингулярном** (или **неравномерно пригодном**) разложении.

12. Пример 1: внешнее разложение

$$f(x,\varepsilon) = \frac{1}{1+x+\varepsilon+e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \ge 0$$

«естественное» асимптотическое представление f при $x = O(1)$

$$f(x,\varepsilon) \sim \frac{1}{1+x}\left(1-\frac{\varepsilon}{1+x}+\ldots\right)$$

на самом деле верно при $x \gg \varepsilon$

совершенно неверный результат в малой окрестности $x = 0$

$$f(0,\varepsilon) \sim 1-\varepsilon+\ldots \qquad f(0,\varepsilon) = \frac{1}{2+\varepsilon} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\varepsilon + \ldots$$

типичное сингулярное разложение, которое, как говорят, «разваливается» в окрестности нуля

13. Пример 1: внутреннее разложение

$$f(x,\varepsilon)=\frac{1}{1+x+\varepsilon+e^{-x/\varepsilon}},\quad x\geq 0$$

причина сингулярности – в том, что предположение о малости ε по сравнению с x несправедливо при малых x. Оно нарушается, когда x есть величина порядка ε

Перенормировка $X=x/\varepsilon$

$$f(x,\varepsilon)\equiv F(X,\varepsilon)=\frac{1}{1+e^{-X}+\varepsilon\left(1+X\right)}$$

$$F(X,\varepsilon)\approx\frac{1}{1+e^{-X}}\left(1-\frac{\varepsilon\left(1+X\right)}{1+e^{-X}}+\ldots\right)$$

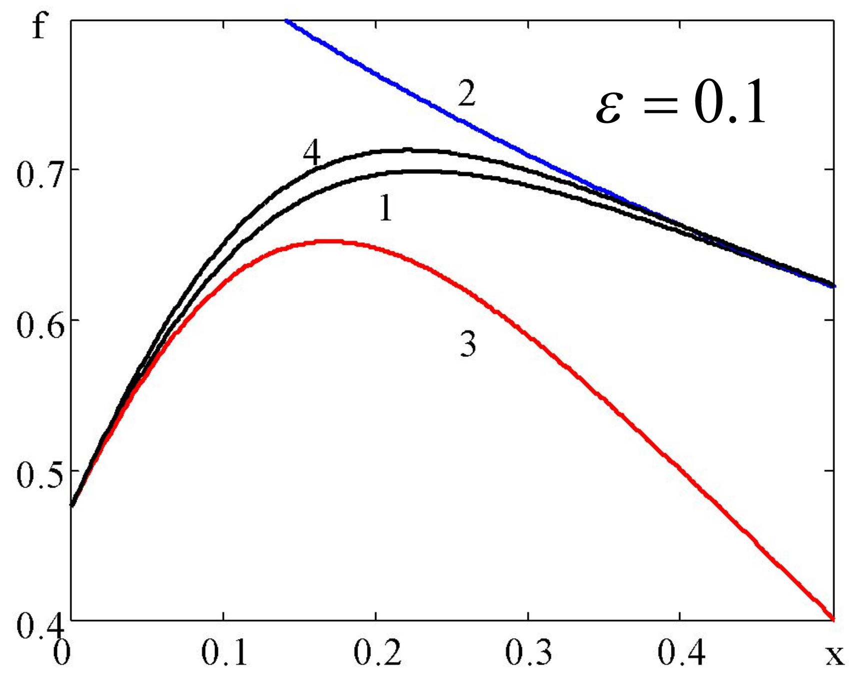
на самом деле верно при

$$\varepsilon X\ll 1\Leftrightarrow x\ll 1$$

14. Пример 1: вывод

$$f(x,\varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0$$

- *Параметрическое разложение во многих практически важных задачах не является равномерно пригодным; в этом случае приходится конструировать несколько асимптотических разложений, каждое из которых пригодно на своем интервале изменения параметра*



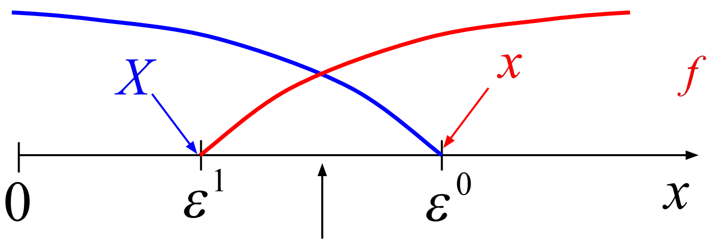
1 –точное решение, 2 – внешнее разложение, 3 – внутреннее разложение

15. Область перекрытия и промежуточная переменная

$$f(x,\varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \ge 0$$

$X = x/\varepsilon$

$$F(X,\varepsilon) \approx \frac{1}{1+e^{-X}}\left(1 - \frac{\varepsilon(1+X)}{1+e^{-X}} + \dots\right)$$



$$f(x,\varepsilon) \approx \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+x} + \dots\right)$$

промежуточная переменная $\chi = x/\delta$ $\quad \varepsilon \ll \delta \ll 1$

$$\delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon/\delta(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

$$F \approx \frac{1}{1+e^{-\delta\chi/\varepsilon}}\left(1 - \frac{\varepsilon(1+\delta\chi/\varepsilon)}{1+e^{-\delta\chi/\varepsilon}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \delta\chi - \varepsilon$$

$$f \approx \frac{1}{1+\delta\chi}\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\delta\chi}\right) \approx$$

$$\approx (1 - \delta\chi + \dots)\left(1 - \varepsilon(1 - \delta\chi + \dots)\right) \approx$$

$$\approx 1 - \delta\chi - \varepsilon$$

Внешнее и внутреннее разложения идентичны в области перекрытия

16. Сращивание разложений

$$f(x,\varepsilon)=\frac{1}{1+x+\varepsilon+e^{-x/\varepsilon}},\quad x\ge 0$$

Внешнее и внутреннее разложения записываются одинаково при переходе к **любой** промежуточной переменной $\chi = x/\delta \qquad \varepsilon \ll \delta \ll 1$

Можно принять, например $\delta=\varepsilon^{p} \qquad 0<p<1$

Рассмотрим предельные случаи $p=0, p=1$

Рассматривая случай $p=1$, мы должны во внешнем разложении положить $x=\varepsilon\chi$. Но это, то же самое, что перейти во внешнем разложении к внутренней переменной .

$$f \sim \frac{1}{1+\varepsilon X}\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon X}\right) \sim \left(1-\varepsilon X+O\left(\varepsilon^{2}\right)\right)\left(1-\varepsilon+O\left(\varepsilon^{2}\right)\right) \sim 1-\varepsilon\left(1+X\right)$$

=

Аналогично при $p=0$ во внутреннем разложении переходим к внешней переменной x

$$F \sim \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}\left(1-\frac{\varepsilon\left(1+x/\varepsilon\right)}{1+e^{-x/\varepsilon}}\right) \sim 1-x-\varepsilon$$

Внешнее и внутреннее разложения ***сращиваются*** друг с другом

17. Принцип сращивания Ван Дайка

$E_1^{(n)}$ оператор, который дает n членов асимптотического представления функции $f(x,\varepsilon)$ для $x = O(1)$

$E_2^{(m)}$ оператор, который дает m членов асимптотического представления функции $F(X,\varepsilon)$ для $X = O(1)$

Функции $f(x,\varepsilon)$ и $F(X,\varepsilon)$ идентичны с некоторым множителем $\delta(\varepsilon)$

$$F(X,\varepsilon) \equiv f(\delta(\varepsilon)X,\varepsilon)$$

$$\boxed{E_2^{(m)}\left\{\left(E_1^{(n)}f\right)(X,\varepsilon)\right\} \equiv E_1^{(n)}\left\{\left(E_2^{(m)}F\right)(x,\varepsilon)\right\}}$$

обе части при их сравнении, разумеется, должны быть записаны в терминах одной переменной

m-членное внутреннее разложение n-членного внешнего разложения должно совпадать с n-членным внешним разложением m-членного внутреннего разложения.

18. Пример применения

$$f(x,\varepsilon) = \sqrt{x + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1+x}}, \quad x \ge 0 \qquad n = 3, m = 2$$

1) Строим трехчленное разложение f при $x = O(1)$

$$E_1^{(3)} f \sim \sqrt{x}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{(3x-1)}{x^2(1+x)}\right)$$

2) Строим 2-членное внутреннее разложение той же функции при

$X = x/\varepsilon = O(1)$

$$f(x,\varepsilon) \equiv F(X,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon(1+X) + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon X}}, \qquad E_2^{(2)} F \sim \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+X}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2(1+X)}\right)$$

3) Подставляем во внешнее разложение $x = \varepsilon X$ и проводим разложение полученного выражения по ε с удержанием 2-х главных членов

$$E_2^{(2)}\left\{\left(E_1^{(3)} f\right)(X,\varepsilon)\right\} = \sqrt{\varepsilon X}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2X\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{(1-3X\varepsilon)}{\varepsilon^2 X^2(1+X\varepsilon)}\right) \sim$$

$$\sim \sqrt{\varepsilon X}\left(1 + \frac{1}{2X} - \frac{1}{8X^2} + \frac{\varepsilon}{2X}\right)$$

19. Пример применения

$$f(x,\varepsilon)=\sqrt{x+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{1+x}},\quad x\ge 0 \qquad\qquad n=3, m=2$$

4) Подставляем во внутреннее разложение $X=x/\varepsilon$ и проводим разложение полученного выражения по ε с удержанием 3-х главных членов

$$E_1^{(3)}\left\{\left(E_2^{(2)}F\right)(x,\varepsilon)\right\}=\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+\frac{x}{\varepsilon}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2\left(1+x/\varepsilon\right)}\right)\approx\sqrt{x}\left(1+\frac{\varepsilon}{2x}-\frac{\varepsilon^2}{8x^2}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2x}\right)\approx\sqrt{x}\left(1+\frac{\varepsilon}{2x}+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}\right)\right) \qquad (1)$$

5) Переходим в $E_2^{(2)}\left\{\left(E_1^{(3)}f\right)(X,\varepsilon)\right\}$ от переменной X к переменной x

$$E_2^{(2)}\left\{\left(E_1^{(3)}f\right)(X,\varepsilon)\right\}\Big|_{X=x/\varepsilon}=\sqrt{x}\left(1+\frac{\varepsilon}{2x}-\frac{\varepsilon^2}{8x^2}+\frac{\varepsilon^2}{2x}\right) \qquad (2)$$

6) Убеждаемся в идентичности выражений (1) и (2).

20. Составное разложение

- $f_n(x,\varepsilon), F_m(X,\varepsilon)$ - внешнее и внутреннее разложения

  $g_{n,m}(x,\varepsilon)$ - их общая часть в области перекрытия

$$\boxed{\phi_{n,m}(x,\varepsilon) = f_n(x,\varepsilon) + F_m(x/\delta(\varepsilon),\varepsilon) - g_{n,m}(x,\varepsilon)}$$

составное (равномерно пригодное) разложение

Пример
$$f(x,\varepsilon) = \frac{1}{1+x+\varepsilon+e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \ge 0 \qquad n=2, m=2$$

$$f \sim f_2(x,\varepsilon) \sim \frac{1}{1+x}\left(1-\frac{\varepsilon}{1+x}\right), \quad x = O(1)$$

$$f \sim F_2(X,\varepsilon) \sim \frac{1}{1+e^{-X}}\left(1-\frac{\varepsilon(1+X)}{1+e^{-X}}\right), \quad X = O(1)$$

$$g_{22} \sim 1-x-\varepsilon$$

$$\boxed{\phi_{2,2}(x,\varepsilon) = \frac{1}{1+x}\left(1-\frac{\varepsilon}{1+x}\right) + \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}\left(1-\frac{x+\varepsilon}{1+e^{-x/\varepsilon}}\right) - 1 + x + \varepsilon}$$

21. Упражнения к лекции 2

1) Получите асимптотическое разложение при $x \to \infty$ и выясните, является оно сходящимся или расходящимся.

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

2) Используйте интегрирование по частям для того, чтобы найти при $x \to \infty$ асимптотическое разложение интеграла

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt, \quad x > 0$$

Покажите, что разложение расходится. Получите оценку для остатка и используйте ее, чтобы найти число членов при данном x , минимизирующих погрешность вычисления $I(x)$

22. Упражнения к лекции 2

3) Найдите разложения при $\varepsilon \to 0$ с точностью до двух членов для данных ниже функций. Постройте составное разложение

$$f(x,\varepsilon)=\frac{x+\varepsilon+e^{-x/\varepsilon}}{1+x+\varepsilon}, \qquad f(x,\varepsilon)=\sqrt{1+\frac{\varepsilon(1+x)}{x+\varepsilon}}$$