Проектный продукт

Прогрессии в нашей жизни

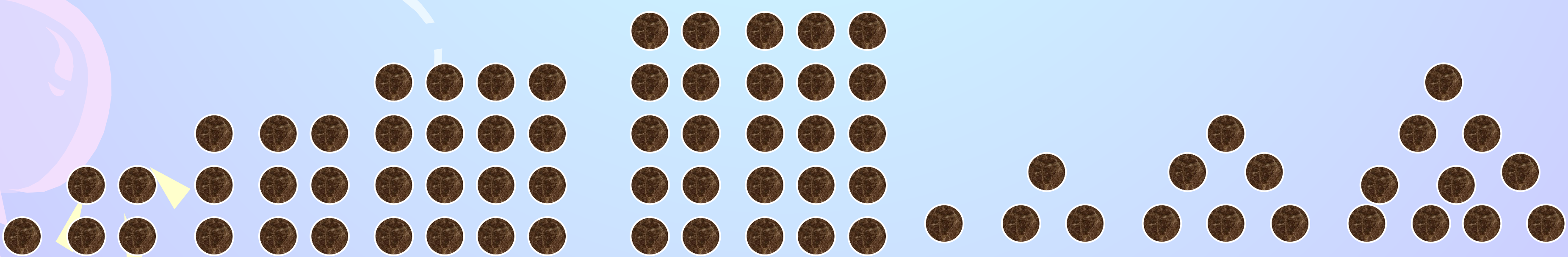
Исторические сведения

Прогрессия – «движение вперед»

Первые теоретические сведения, связанные с прогрессиями, дошли до нас в документах Древней Греции.

Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами. Подсчитывая число кружков в треугольниках, квадратах, пятиугольниках, они получали:

- последовательность *(a_n)* треугольных чисел 1, 3, 6, 10, 15, ... ;
- последовательность (b_n) квадратных чисел 1, 4, 9, 16, 25, ... ;
- последовательность *(C_n)* пятиугольных чисел 1, 5, 12, 22, 35, ...




Карл Фридрих Гаусс

1. В Германии молодой Карл Гаусс (1777-1855) нашел сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, будучи ещё учеником начальной школы.

$$1+2+3+4+\ldots+98+99+100 == (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)=$$

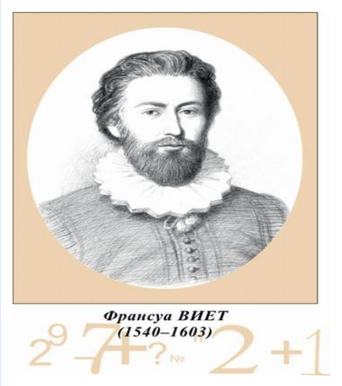
$$=101\text{x}50 =5050.$$

2. Общее правило для суммирования любой конечной геометрической прогрессии встречается в книге Н. Шюке «Наука о числах», увидевшей свет в 1484 году.


Архимед

3. На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий Архимед.

4. Общая формула для вычисления суммы любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии была выведена в первой половине XVII века несколькими математиками (среди них был французский математик Пьер Ферма)




М. Штефель

Задачи на прогрессии

Древняя индийская ле

Царь древней Индии Шерам пригласил к себе изобретателя шахмат Сета и спросил, какую бы награду хотел бы он получить за изобретение стольмудрой игры.

Тогда Сета попросил царя на первую клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4, на четвертую – 8 и т.д., т.е. на каждую клетку вдвое больше зерна, чем на предыдущую клетку.

Поначалу царь удивился столь “скромному” запросу изобретателя и поспешно повелел выполнить ту просьбу. Однако, как выяснилось, казна царя оказалось слишком “ничтожной” для выполнения этой просьбы.

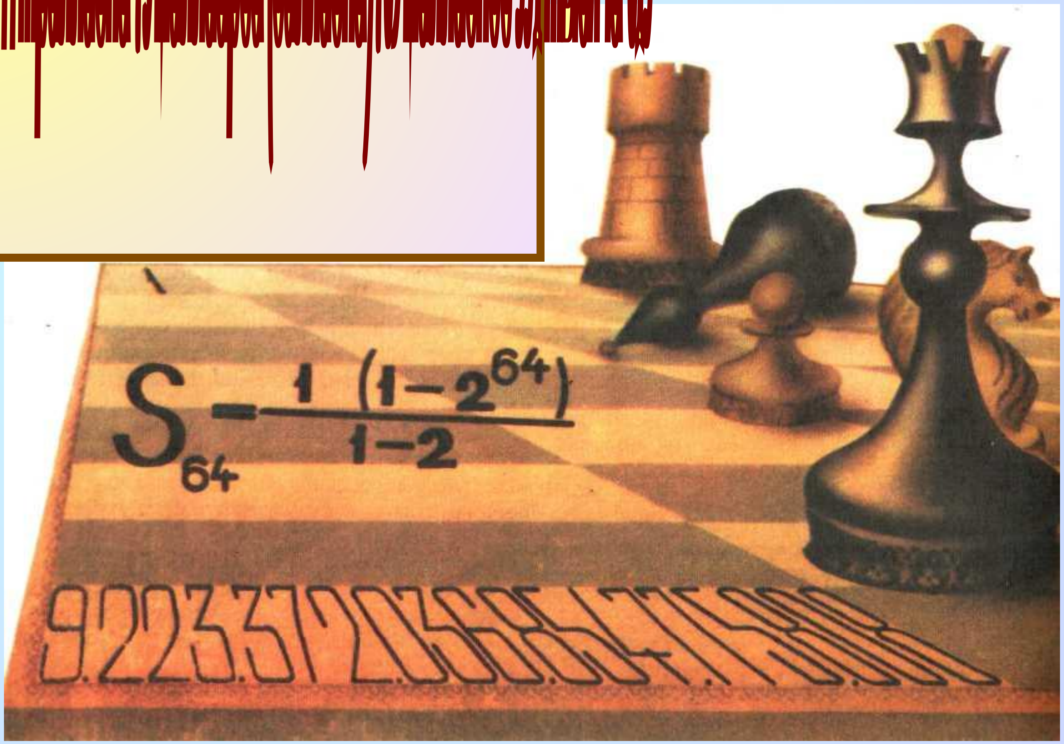
Действительно, чтобы выполнить эту просьбу, потребовалось бы количество зерен, равное сумме $1 + 2 + 2^2 + .. + 2^{63}$, а эта сумма равна

18.446.744.073.709.551.615.

Если считать, что 1 пуд зерна содержит 40000 зерен, то для выполнения просьбы потребовалось бы 230 584 300 921 369 пудов зерна. Если полагать, что в среднем ежегодно собирается 1 000 000 000 пудов зерна, то для выполнения указанной просьбы нашей стране нужно работать (не расходуя ни одного зерна) на протяжении 230584 лет.

Столько зёрен должен был получить изобретатель шахмат!

$$S_{64}=2^{64}-1=$$
$$=18.446.744.073.704.551.615$$


$S_{64} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2}$
9.223.372.036.854.775.808

Задачи на прогрессии

- **Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день — на 5 капель больше, чем в предыдущий. Приняв 40 капель, он 3 дня пьет по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?**

- **Решение:**

$$\underbrace{5,\ 10,\ 15,\ldots,40}_{\text{возрастающая ар. пр.}},\ 40,\ \underbrace{40,\ 35,\ 30,\ldots,5}_{\text{убывающая ар.пр.}}$$

$a_1 = 5 \quad d = 5$ $\qquad$ $a_1 = 5 \quad d = -5$

$a_1 = a_1 + d(n-1)$

$40 = 5 + 5(n-1)$

$n = 8$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \qquad S_8 = \frac{(5+40)\cdot 8}{2} = 180$$

180 капель больной принимал по схеме в первый период и столько же по второй период. Всего он принял 180+40+180=400(капель), всего больной выпьет 400:250=1,6 (пузырька). Значит, надо купить 2 пузырька лекарства.

Задача 2

Улитка ползет по дереву. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту — на 5 см больше, чем за предыдущую. За какое время достигнет улитка вершины дерева длиной 5,25 м, если считать, что движение начато от его основания?

Решение.

$a1 = 30$, $d = 5$, $Sn = 525$, $n > 0$.

$Sn = (2a1 + d\,(n-1))n : 2$; $525 = (2 \cdot 30 + 5\,(n-1))n : 2$;
$1050 = (60 + 5\,(n-1))n^{2}$;

$1050 = 55\,n + 5n^{2}$;

$n^{2} + 11\,n - 210 = 0$, $n_1 = -21$, $n_2 = 10$ $(n > 0)$.

Улика достигнет вершины за 10 дней.

Это задача из «Сборника старинных занимательных задач по математике»

Однажды богач заключил выгодную, как ему казалось, сделку с человеком, который целый месяц ежедневно должен был приносить по 100 тыс. руб., а взамен в первый день месяца богач должен был отдать 1 коп., во второй-2 коп., в третий-4 коп., в четвертый-8 коп. и т. д. в течении 30 дней. Сколько денег получил богач и сколько отдал? Кто выиграл от этой сделки?

Считают “мужик” и “купец”

“Мужик” заплатил: S_{30} = 100 000• 30 = 3 000 000 (рублей).

“Купец” заплатил: 1; 2; 4;… q=2/1=2.

S_{30} =1• (2^{30} – 1):(2-1)= 2 ^{30} -1= =1 073 741 824 -1 =1 073 741 823 (коп.) т.е. 10 738 418 руб.23коп

Прогрессии в нашей жизни

В поселковых слухах

В природе

В банковских расчетах

В поселке 16 000 жителей. Приезжий в 8.00 рассказывает новость трем соседям; каждый из них рассказывает новость уже трем своим соседям и т. д. Во сколько эта новость станет известна половине посёлка?

- Удивительно, как быстро разбегаются по посёлку слухи! Иной раз не пройдет и двух часов со времени какого–либо происшествия, которое видели всего несколько человек, а новость уже облетела весь посёлок: все о ней знают, все слышали.
- Решение: используем формулу суммы *n* первых членов геометрической 8000 =

$$\frac{1\cdot\left(3^n-1\right)}{3-1} \qquad 3^n=16001$$

$$S_n=\frac{b_1\left(q^9-1\right)}{q-1}=\frac{1\cdot\left(3^9-1\right)}{3-1}=\frac{19683-1}{2}=9841>8000$$

на 9-ом шаге более половины жителей города будут знать новость. Легко подсчитать, что это произойдёт в 10.00 утра.

В геометрической прогрессии

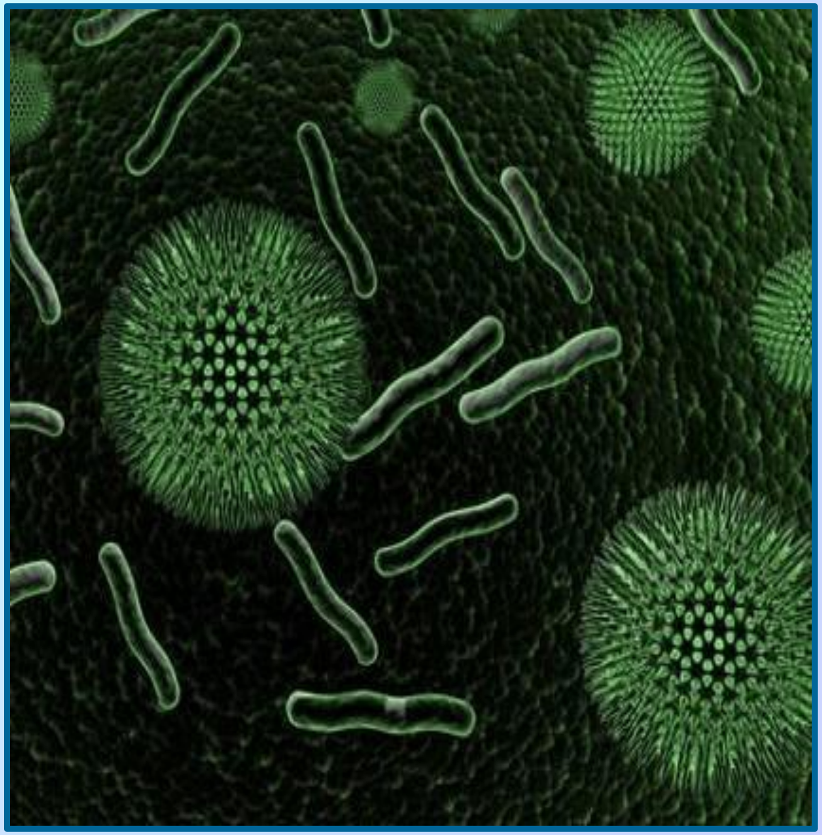
- Число женщин-водителей в России за последние 5 лет увеличилось почти вдвое. За период с 2006 по 2012 год их численность выросла с 1,7 до 3,07млн. Человек(Gudok.ru исследовательская группа TNS Global)
- Согласно результатам опросов, 60% российских водителей приходится на мужчин в возрасте от 25 до 64 лет.

газета «Новгородские ведомости»

Прогрессии в природе

Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. Результат каждого удвоения будем называть поколением.

Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а беспрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.



Задача №17.51. **[Алгебра. 9 класс, Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений/ Мордкович А.Г., П.В. Семенов , - М.: Мнемозина, 2010]**

- Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.
- Решение: В сутках 1440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение - за сутки 72 поколения. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=2$, $n=72$, находим, что $S_{72}=2^{72}-1=$

$$4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,696 - 1=$$

$$= 4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,695.$$

[illegible]

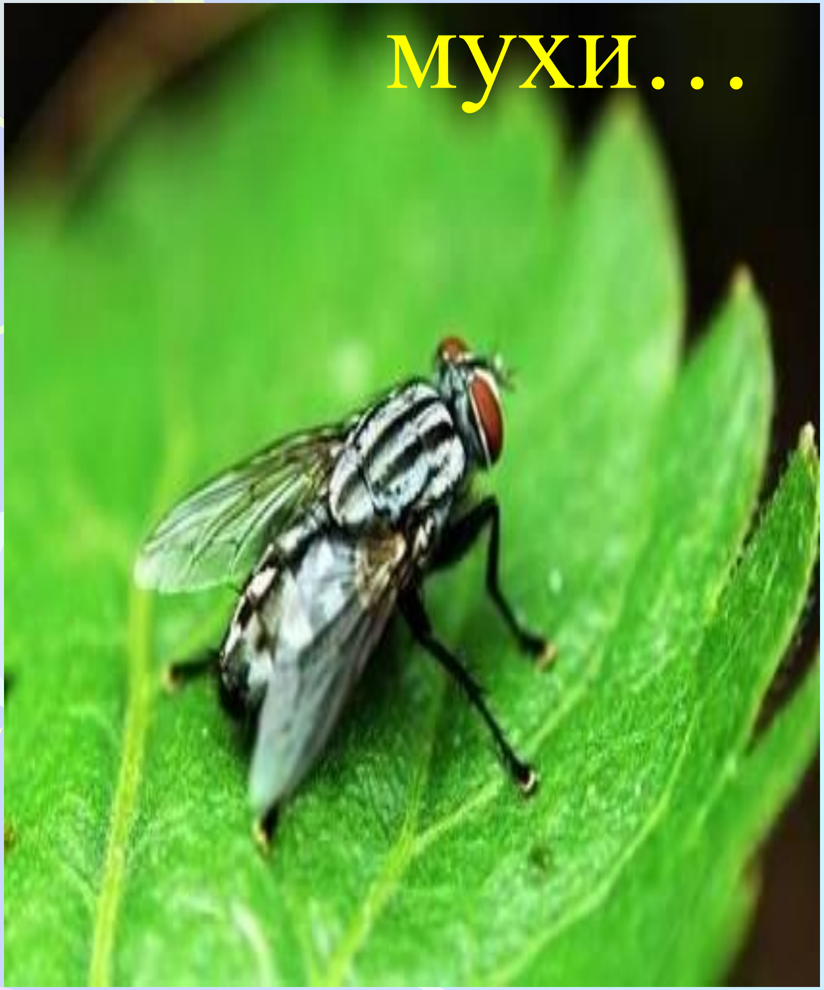
Интенсивность размножения бактерий используют…

в пищевой промышленности (для приготовления напитков, кисломолочных продуктов, при квашении, солении и др.)

в фармацевтической промышленности (для создания лекарств, вакцин)

в сельском хозяйстве (для приготовления силоса, корма для животных и др.)

в коммунальном хозяйстве и природоохранных мероприятиях (для очистки сточных вод,ликвидации нефтяных пятен)



“Потомство пары мух съест мёртвую лошадь также скоро как лев”.

Карл Линней

Девятое поколение одной пары мух наполнило бы куб, сторона которого равна 140 км, или же составило бы нить, которой можно опоясать земной шар 40 млрд. раз.

Прогрессии и банковские расчеты

- Представьте себе, что вы открыли в банке вклад в сумме *a* р. *Под p%* годовых на *t* лет. У вас есть две стратегии поведения: либо в конце каждого года хранения вклада снимать проценты по вкладу, т.е. полученную прибыль в размере $\frac{p}{100}\cdot a$ р., либо прийти в банк один раз — в конце срока хранения вклада. Какой доход вы получите в том и другом случаях?
- В первом случае при $t = 1$ вы получите $\frac{p}{100}\cdot a$ $(a + \frac{p}{100}\cdot a)$р., при

$t = 2$ ваша итоговая сумма составит $(a + \frac{2p}{100}\cdot a)$р., при $t = 3$ $(a + \frac{3p}{100}\cdot a)$р. и т. д. Математическая модель ситуации — конечная арифметическая прогрессия a, $a + \frac{p}{100}\cdot a$, $a + \frac{2p}{100}\cdot a$, $a + \frac{3p}{100}\cdot a$..., $a + \frac{tp}{100}\cdot a$.

- Итак, при первой стратегии поведения за *t* лет вы получит)

$a(1 + \frac{tp}{100}\cdot)$— это так называемая *формула простых процентов*

Прогрессии и банковские расчеты

Пусть вклад составляв 10 000 р., банк дает 10% годовых, срок хранения вклада - 5 лет. Если вы выбрали стратегию простых процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную10 000 • $(1 + \frac{5 \cdot 10}{100})$, т. е. 15 000 р. Если же вы выбрали стратегию сложных процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную 10 000 • $(1 + \frac{10}{100})^5$, т. е. 16 105,1 р.
Как говорится в одном рекламном слогане, почувствуйте разницу.

Спасибо за внимание