Натуральные числа $\mathbb{N}$

Множество X называется ***индуктивным***, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также и число $x+1$. ***Множеством натуральных чисел*** $\mathbb{N}$ называют наименьшее индуктивное множество, содержащее число 1.

Свойства натуральных чисел

1. Сумма и произведение натуральных чисел – натуральные числа.

2. Если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$, то $n-1 \in \mathbb{N}$.

3. Если $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < m$, то $n+1 \leq m$.

4. В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.

5. ***Аксиома индукции.*** Натуральное число $n+1$ непосредственно следует за натуральным числом n (или, что то же самое, число $n-1$ предшествует числу n), т.е. нет натуральных чисел x, удовлетворяющих условию $n < x < n+1$.

Метод математической индукции:

Пусть $A(n)$ – зависящее от $n \in \mathbb{N}$ утверждение. Если доказано, что выполняется $A(1)$ и из справедливости $A(n)$ вытекает справедливость $A(n+1)$, то $A(n)$ справедливо $\forall n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Индукция может начинаться с любого числа $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда утверждение $A(n)$ верно $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Целые числа $\mathbb{Z}$

Действительное число z называется ***целым***, если существуют такие $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, что $z = n_1 - n_2$.

Свойства целых чисел

1. Сумма и произведение целых чисел – целые числа.

2. Если $n \in \mathbb{Z}$, то $n-1 \in \mathbb{Z}$.

3. Если $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n < m$, то $n+1 \leq m$.

4. Целое число $n+1$ непосредственно следует в $\mathbb{Z}$ за целым числом n, т.е. нет целых чисел x, удовлетворяющих условию $n < x < n+1$.

Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Действительное число a называется ***рациональным***, если существуют $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_2 \neq 0$ такие, что $a = \dfrac{z_1}{z_2}$ (z_1 и z_2 не определены однозначно числом a).

Множество $\mathbb{Q}$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевой элемент.

Иррациональные числа $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют ***иррациональными***. Необходимость введения иррациональных чисел доказал Пифагор (570-496 г. до н.э) через теорему о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Теорема о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Диагональ единичного квадрата на координатной плоскости не может измеряться рациональным числом. Другими словами, $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом.

Докажем от противного.

Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, $m, n \in \mathbb{N}$.

Способ 1. Возможны три варианта:

m – четное,
n – нечетное.
Обозначим:
$m = 2k$, $n = 2l + 1$.
Тогда
$$2(2l+1)^2 = (2k)^2,$$
$$(2l+1)^2 = 2k^2,$$
«нечетное» = «четное».

m – нечетное,
n – четное.
Обозначим:
$m = 2k+1$, $n = 2l$.
Тогда
$$2(2l)^2 = (2k+1)^2,$$
«четное» = «нечетное».

n – нечетное,
m – нечетное.
Обозначим:
$m = 2k+1$, $n = 2l+1$.
Тогда
$$2(2l+1)^2 = (2k+1)^2,$$
«четное» = «нечетное».

В каждом случае получили противоречие.

Способ 2. Возводя $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ в квадрат, получим: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, т.е. $2n^2 = m^2$. Отсюда получаем: $m^2 \vdots 2$, а значит, $m \vdots 2$, поэтому можно записать $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(2k)^2 = 2n^2$, но тогда и $n \vdots 2$, а это противоречит условию о несократимости дроби $\frac{m}{n}$.

Расширенная числовая ось

Соотношения, принятые между числами $x \in \mathbb{R}$ и символами $-\infty$, $+\infty$.

1. $-\infty < x < +\infty$.

2. $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$.

3. $x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, \text{ если } & x > 0; \\ -\infty, \text{ если } & x < 0, \end{cases}$

$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{ если } & x > 0; \\ +\infty, \text{ если } & x < 0. \end{cases}$

4. $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$,

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$,

$x - (+\infty) = -\infty + x = -\infty$,

$x - (-\infty) = +\infty + x = +\infty$.

Для символов $-\infty$, $+\infty$ определены действия:

1. $+\infty + (+\infty) = +\infty$,

$-\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$.

2. $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$,

$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

Подмножества точек числовой оси (***числовые промежутки***):

– ***интервал***: $(a,b)\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad a<x<b\}$;

– ***отрезок*** или ***сегмент***: $[a,b]\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad a\le x\le b\}$;

–***полуинтервалы***: $[a,b)\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad a\le x<b\}$,

$$(a,b]\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad a<x\le b\};$$

конечные промежутки

– ***лучи***: $[a,+\infty)\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad a\le x\}$,

$$(-\infty,a]\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad x\le a\},$$

$$(a,+\infty)\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad a<x\},$$

$$(-\infty,a)\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\quad x<a\};$$

– ***вещественная ось***: $(-\infty,+\infty)\overset{df}{=}\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$.

бесконечные промежутки

Окрестности

$\boxed{\varepsilon > 0}$

1) ε-окрестность точки a:

$$B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon, a+\varepsilon);$$

2) проколотая ε-окрестность точки a:

$$\overset{0}{B}(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\setminus\{a\};$$

3) ε-окрестность бесконечности: $(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty);$

4) ε-окрестность плюс-бесконечности: $(\varepsilon,+\infty);$

5) ε-окрестность минус-бесконечности: $(-\infty,-\varepsilon).$

ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Множество $X \subset \mathbb{R}$ ***ограничено сверху*** (***снизу***), если

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \le c \ (x \ge c).$$

c – ***верхняя*** (***нижняя***) ***грань*** множества X или ***мажоранта*** (***миноранта***) множества X.

Множество ***ограничено***, если оно ограниченно и сверху, и снизу.

Элемент $a \in X$ называется ***наибольшим*** или ***максимальным*** (***наименьшим*** или ***минимальным***) элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in X \ x \le a \ (x \ge a).$$

Обозначения: $a = \max X = \max\limits_{x \in X} x \quad (a = \min X = \min\limits_{x \in X} x)$.

Лемма. Если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он единственный.

◄ Справедливость леммы следует из аксиом порядка и определения максимального (минимального) элементов.►

Замечание. Существуют множества, не имеющие максимального (минимального) элемента.

Точной верхней (***нижней***) ***гранью ограниченного множества*** X называется наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху (снизу).

Обозначения:

$$\sup X \text{ или } \sup_{x \in X} x \qquad (\inf X \text{ или } \inf_{x \in X} x)$$

«супремум X» («инфимум X»):

$$s = \sup_{x \in X} x \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ \forall x \in X \quad x \le s, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in X \quad x' > s - \varepsilon \text{ или } \forall s' < s \ \exists x' \in X \quad s' < x'. \end{array}$$

$$i = \inf_{x \in X} x \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ \forall x \in X \quad i \le x, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in X \quad x' < i + \varepsilon \text{ или } \forall i' > i \ \exists x' \in X \quad x' < i'. \end{array}$$

Верхней гранью неограниченного сверху (снизу) ***множества*** X принято считать «$+\infty$» («$-\infty$»).

Теорема (принцип верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет и притом единственную точную верхнюю (нижнюю) грань.

□ Докажем, что непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань.

Пусть $Y = \left\{ y \middle| y \in \mathbb{R} \text{ и } \forall x \in X,\ y \geq x \right\}$ множество верхних граней множества X. По условию $X \neq \varnothing$ и ограничено, а значит, и $Y \neq \varnothing$.

Так как $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$, то, в силу аксиомы полноты,

$$\exists d \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leq d \leq y,$$

причем число $d \in Y$.

С другой стороны, $\forall y \in Y,\ d \leq y \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ «d – минимальный элемент множества Y, причем единственный».

Существование и единственность точной нижней грани ограниченного снизу множества доказывается аналогично.□

Аксиома полноты. Принцип непрерывности Дедекинда.

Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, у которых для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует такое число γ, что $\forall a \in A \ \ \forall b \in B \quad a \leq \gamma \leq b$.

Свойства точных граней

1. $\sup\left\{-x \middle| x \in X\right\} = -\inf X$, $\quad \inf\left\{-x \middle| x \in X\right\} = -\sup X$.

2. $\sup\left\{x + y \middle| x \in X,\ y \in Y\right\} = \sup X + \sup Y$,

$\inf\left\{x + y \middle| x \in X,\ y \in Y\right\} = \inf X + \inf Y$.

3. $\sup\left\{x - y \middle| x \in X,\ y \in Y\right\} = \sup X - \inf Y$.

4. Если $\lambda \geq 0$, то

$$\sup\left\{\lambda x \middle| x \in X\right\} = \lambda \sup X,\ \inf\left\{\lambda x \middle| x \in X\right\} = \lambda \inf X.$$

5. Пусть $X \subset \left\{x \middle| x \geq 0\right\}$, $Y \subset \left\{y \middle| y \geq 0\right\}$. Тогда

$$\sup\left\{xy \middle| x \in X,\ y \in Y\right\} = \sup X \sup Y,$$

$$\inf\left\{xy \middle| x \in X,\ y \in Y\right\} = \inf X \inf Y.$$

Теорема Архимеда. Если $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, то

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! k \in \mathbb{Z} \quad (k-1)h \le x < kh.$$

Следствия:

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

2. Если число $x \in \mathbb{R}$ таково, что $0 \le x$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x < \dfrac{1}{n}$, то $x = 0$.

3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \{a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \quad a < r < b\}$.

4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \{a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad a < r < b\}$.

5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! k \in \mathbb{Z} \quad k \le x < k+1$.

6. Числовую прямую можно покрыть не более чем счетным количеством непересекающихся интервалов.

П р и м е р. Множество всех правильных дробей:

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}, \quad < m < n \right\},$$

не имеет наименьшего и наибольшего элементов; $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

Пример. Множество всех правильных дробей: $A = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N},\ 0 < m < n \right\}$,

не имеет наименьшего и наибольшего элементов; $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

□ Докажем от противного отсутствие наименьшего (наибольшего) элемента.

Пусть $\frac{m}{n}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ – наименьшее (наибольшее) число. Тогда

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0 \qquad \left(\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1\right), \tag{1.10}$$

т.е. получили меньший (больший), чем указанный наименьший (наибольший) элемент множества.

Инфимум. Согласно теореме Архимеда ($x := m,\ h := \varepsilon,\ k := n$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N} \quad n > m/\varepsilon .$$

$\Rightarrow \ \frac{m}{n} < \varepsilon$ и, учитывая (1.10) $\frac{m}{n} > 0$, а значит: $\inf A = 0$.

Супремум. Согласно теореме Архимеда ($x := p,\ h := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ k := m$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \exists m \in \mathbb{N} \quad m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon} .$$

$\Rightarrow \ \frac{m}{p+m} > 1-\varepsilon$, т.е. при $n = p+m$ имеем $\frac{m}{n} > 1-\varepsilon$ и, учитывая (1.10) $\frac{m}{n} < 1$, а значит, $\sup A = 1$. □

Системой вложенных отрезков называют множество S отрезков таких, что

$$\forall\, I_1, I_2 \in S \quad I_1 \subset I_2 \text{ или } I_2 \subset I_1.$$

Лемма о вложенных отрезках, или принцип Коши-Кантора

Пусть S – система вложенных отрезков, тогда $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall I \in S \quad x \in I$.

Система вложенных отрезков называется ***последовательностью вложенных отрезков***, если они занумерованы и $\forall n\ \forall k\ \ I_n \subset I_{n+k}$.

Последовательность вложенных отрезков называется ***стягивающейся***, если в ней есть отрезки сколь угодно малой длины.

Лемма о последовательности стягивающихся отрезков

Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом единственную.

Лемма о вложенных отрезках, или принцип Коши-Кантора.

Пусть S – система вложенных отрезков, тогда $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall I \in S \ \ x \in I$.

◄ Пусть A – множество левых, а B – множество правых концов отрезков. Тогда

$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \ a \le b.$$

Действительно, пусть $[a,b'],[a',b] \in S$ – произвольные отрезки, тогда возможны 2 случая:

1) $[a,b'] \subset [a',b]$,

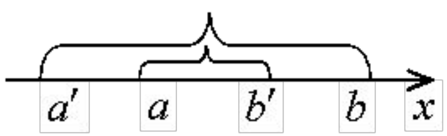
$a' \le a < b' \le b$,

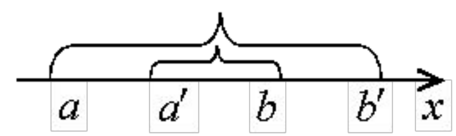
$a < b$;

2) $[a',b] \subset [a,b']$,

$a \le a' < b \le b'$,

$a < b$.





Поэтому, в силу аксиомы полноты, , а значит,

.►

Системой вложенных отрезков называют множество отрезков таких, что

или .

Лемма о последовательности стягивающихся отрезков.

Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом единственную.

Наличие этой точки следует из предыдущей леммы.

Пусть все отрезки содержат две различных точки a и b, тогда длина всех отрезков больше, чем $|b-a|>0$, но это противоречит тому, что отрезки стягивающиеся.

Система вложенных отрезков называется ***последовательностью вложенных отрезков***, если они занумерованы и $\forall n \ \forall k \ \ I_n \subset I_{n+k}$.

Последовательность вложенных отрезков называется ***стягивающейся***, если в ней есть отрезки сколь угодно малой длины.

Теорема Кантора о мощности отрезка

Множество точек отрезка несчетно.

Лемма Бореля-Лебега о конечном покрытии)

В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

Точка a называется ***предельной точкой множества*** $X \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности содержится бесконечное количество точек множества X, или, что то же самое, в любой ее окрестности есть хотя бы одна точка множества X, отличная от a.

Лемма о предельной точке (принцип Больцано-Вейерштрасса)

Всякое бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

Теорема Кантора о мощности отрезка. Множество точек отрезка несчетно.

▯ Докажем от противного.

Пусть все точки отрезка занумерованы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Делим отрезок на 3 части и выбираем ту, которой x_1 **не** принадлежит.

Делим новый отрезок на 3 части и выбираем ту, которой x_2 **не** принадлежит.

…

Получим систему вложенных отрезков. По лемме о вложенных отрезках, существует точка, принадлежащая сразу всем отрезкам. Но эта точка не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по построению.▯

Лемма Бореля-Лебега о конечном покрытии). В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

◄ Доказательство от противного

Пусть система интервалов S покрывает отрезок $[a,b]=I_1$ и в ней нельзя выбрать конечную подсистему, покрывающую I_1.

Делим I_1 пополам и выбираем тот отрезок, который нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S. Обозначим его I_2.

Делим I_2 пополам и выбираем тот отрезок, который нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S. Обозначим его I_3.

…

Получаем последовательность вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S.

$|I_{n+1}| = \dfrac{|I_1|}{2^n}$ $\Rightarrow$ в последовательности $I_1, I_2, I_3, \ldots$ есть сколь угодно малые отрезки.

По лемме о вложенных отрезках $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ c \in I_n$.

$c \in I_1 = [a,b]$ $\Rightarrow$ найдется интервал $(\alpha,\beta) \in S$, содержащий точку c, т.е. $\alpha < c < \beta$.

Найдем в последовательности $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ такой отрезок I_n, что

$$|I_n| < \min\{c-\alpha, \beta - c\}.$$

Тогда $c \in I_n$ и $I_n \subset (\alpha,\beta)$, а это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы.►

Лемма о предельной точке, или принцип Больцано-Вейерштрасса.

Всякое бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

◄ X – ограничено $\Rightarrow$ $X \subset [a,b] = I$.

Докажем от противного, что, по крайней мере, одна из точек отрезка I является предельной для X.

Пусть это не так, тогда каждая точка $x \in I$ имеет окрестность, в которой не более чем конечное количество точек множества X.

Совокупность S таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие I интервалами $U(x) = (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$.

Из S по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_n)$ интервалов, покрывающих I, а значит, и множество X (т.к. $X \subset I$).

По построению в каждом интервале $U(x_i)$ не более чем конечное число точек множества X, значит, в их объединении тоже конечное число точек X, то есть X – конечное множество. А по теореме Кантора множество точек отрезка бесконечно.►

Точка a является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности содержится бесконечное количество точек множества X..