

Лекция 9. Производные основных элементарных функций, сложных, обратных, функций, заданных неявно, параметрически.

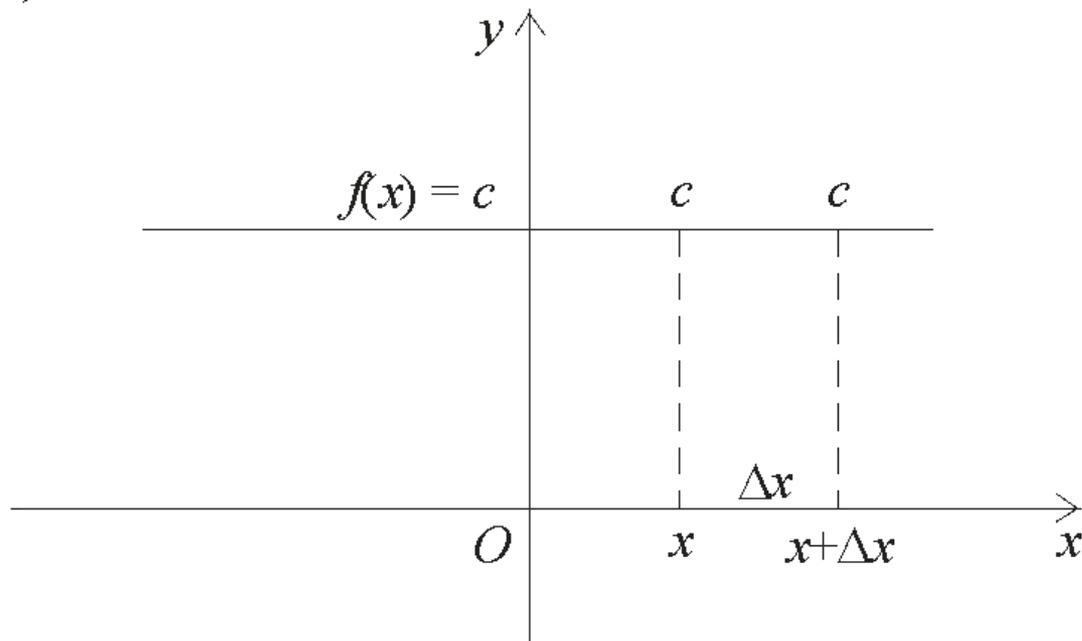
Таблица производных

1. $y = c$	$y' = 0$ (производная постоянной величины = 0)
2. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
2a. $y = x^2$	$y' = 2x$
2b. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
2c. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
3a. $y = e^x$	$y' = e^x$
4. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$
4a. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
5. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
6. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
7. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\operatorname{csc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Th (О производной константы). Производная постоянной функции тождественно равна 0.

Доказательство

Пусть $f(x) = c$.



Возьмем произвольную точку x . Придадим аргументу в этой точке некоторое приращение Δx . Найдем соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Поэтому

Ч.т.д.

Th (О производной суммы, произведения и частного). Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда функции $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$)

также дифференцируемы в точке x_0 и при этом:

1. $y = u \pm v$ $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $y = u \cdot v$ $y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. $y = \frac{u}{v}$ $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Эти формулы называют также правилами нахождения производных.

Доказательство

Докажем правило 1.

Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение $\Delta x \neq 0$. Функции u и v при этом получают некоторые приращения

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0),$$

а функция $y = u \pm v$ получит некоторое приращение

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = [u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)] = \\ &= [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] \pm [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)] = \Delta u \pm \Delta v. \end{aligned}$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$$

Мы воспользовались тем, что по условию теоремы указанные пределы существуют и равны соответствующим производным.

Докажем правило 2.

Все приращения функций в точке используем из доказательства правила

1. Так как $y = u \cdot v$, то

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x) + u(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= v(x_0 + \Delta x) \cdot [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + u(x_0) \cdot [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)] = \\ &= v(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta u + u(x_0) \cdot \Delta v. \end{aligned}$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x_0 + \Delta x) \Delta u + u(x_0) \Delta v}{\Delta x} \quad (1)$$

Прежде, чем переходить к пределу в равенстве (1), заметим следующее:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x_0) = v(x_0)$$

Последний шаг справедлив, поскольку v непрерывна в точке x_0 . Непрерывность вытекает из дифференцируемости функции в этой точке.

По условию

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0); \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0).$$

Перейдем теперь к пределу в равенстве (1)

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) \Delta u + u(x_0) \Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x_0 + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v(x_0) u'(x_0) + u(x_0) v'(x_0) \end{aligned}$$

или, короче

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Докажем правило 3.

Все приращения функций в точке используем из доказательства правила

1. Так как $y = \frac{u}{v}$, то

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - v(x_0 + \Delta x)u(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) + u(x_0)v(x_0) - v(x_0 + \Delta x)u(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \\ &= \frac{v(x_0)[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] - u(x_0)[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)}\end{aligned}$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} \quad (2)$$

Переходя к пределу в равенстве (2), получаем:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{v(x_0)u'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)}{v^2(x_0)}$$

или, короче

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Замечание. Нами доказана формула для производной суммы двух слагаемых. Она оказывается справедливой и для любого конечного числа слагаемых:

$$[u_1(x) \pm u_2(x) \pm \dots \pm u_n(x)]' = u_1'(x) \pm u_2'(x) \pm \dots \pm u_n'(x)$$

Мы доказали формулу $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, рассмотрим, как будет выглядеть формула для трех сомножителей:

$$(u \cdot v \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w' = (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot w + u \cdot v \cdot w' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

Окончательно:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot (v \cdot w) + v' \cdot (u \cdot w) + w' \cdot (u \cdot v)$$

Аналогично можно доказать и для n сомножителей:

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n)' = u_1' \cdot (u_2 \cdot \dots \cdot u_n) + u_2' \cdot (u_1 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot \dots \cdot u_n) + \dots + u_n' \cdot (u_1 \cdot \dots \cdot u_{n-1})$$

Следствие. Постоянную можно выносить за знак производной (свойство однородности производной).

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

Действительно: $[k \cdot f(x)]' = k' \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = 0 + k \cdot f'(x) = k \cdot f'(x)$.

Th (О производной обратной функции). Пусть имеется функция $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – обратная ей функция. Обе функции предполагаются непрерывными. Пусть, далее существует производная $f'(x_0) \neq 0$ в некоторой точке x_0 . Тогда в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ существует производная обратной функции и она равна:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

т.е. производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции.

Доказательство

Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0); \quad \Delta y \neq 0.$$

Придадим y в точке y_0 некоторое приращение $\Delta y \neq 0$, тогда x получит соответствующее приращение

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0); \quad \Delta x \neq 0.$$

(Если бы $\Delta x = 0$, тогда было бы $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Leftrightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$, что не так)

Составим отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (3)$$

Перейдем к пределу в равенстве (3) при $\Delta y \rightarrow 0$, что $\Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$. Это справедливо потому, что функции f и g непрерывны по условию (бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции).

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow x'_y(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

или, в исходных обозначениях

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ч.т.д.

Докажем некоторые из формул таблицы производных.

Доказательство формулы 2.

Для случая $n \in \mathbb{N}$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n.$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

Ч.т.д.

Для случая $n \in \mathbb{R}$. Обозначим $n = \alpha$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \\ &= \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

При вычислении предела мы воспользовались следующей эквивалентной бесконечно малой: $(1 + x)^\alpha \sim \alpha x + 1$.

Ч.т.д.

Доказательство формулы 5 $y = \sin x$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x$$

Ч.т.д.

Аналогично доказывается формула $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство формулы 2 $y = x^n$,
 $y' = nx^{n-1}$.

Для случая $n \in \mathbb{N}$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n.$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$
$$= nx^{n-1}$$

Ч.т.д.

Для случая $n \in R$. Обозначим $n = \alpha$.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \\ &= \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

При вычислении предела мы воспользовались следующей эквивалентной бесконечно малой: $(1 + x)^\alpha \sim \alpha x + 1$.

Доказательство формулы $y = \sin x$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x\end{aligned}$$

Ч.т.д.

Аналогично доказывается формула
 $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство формулы 7 $y = \operatorname{tg} x$,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Действительно

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Аналогично доказывается формула

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доказательство формулы 9 $y = \arcsin x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Обратная к ней функция $x = \sin y$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняются условия теоремы о производной обратной функции. Действительно $x_y' = \cos y \neq 0$.

Таким образом, по указанной теореме:

$$y'_x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

В последнем выражении квадратный корень берется со знаком «+», поскольку $\cos x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ положительный.

Аналогично доказывается формула

$$y = \arccos x, y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство формулы 11 $y = \operatorname{arctg} x$,

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Рассмотрим обратную функцию $x = \operatorname{tgy}$.

При $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяет условиям

теоремы о производной обратной функции.

Действительно $x_y' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$ при $y \in$

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В силу указанной теоремы

$$y'_x = \frac{1}{x'} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ч.т.д.

Здесь использовано тригонометрическое соотношение: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

Аналогично доказывается формула

$$y = \operatorname{arcctg} x, y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Th (О производной сложной функции).

Пусть имеется композиция функций

$$X \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} Y$$

$$x_0 \in X; u_0 \in U; y_0 \in Y;$$

$$u_0 = \varphi(x_0); y_0 = f(u_0);$$

По сути дела имеем сложную функцию

$$y = f(\varphi(x)).$$

Пусть функция φ дифференцируема в точке x_0 (т.е. существует $\varphi'(x_0)$), а функция f дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$ (т.е. существует $f'(u_0)$), тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также дифференцируема в точке x_0 и при этом

$$y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$$

или, короче

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Без доказательства

Понятие функции, заданной параметрически.

Определение. Пусть заданы уравнения:

$$\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \quad (2),$$

где $t \in T$ – промежутки, причём функция $x = \Phi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi^{-1}(x)$, тогда определена функция $y = \Psi(\Phi^{-1}(x)) = \phi(x)$ – эта функция называется функцией, заданной параметрически уравнениями (2).

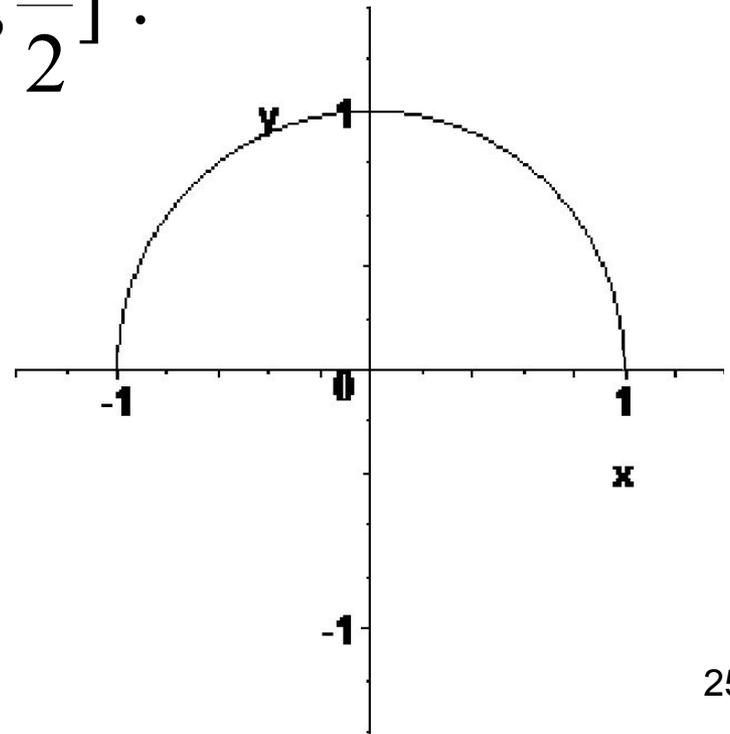
Пример. Пусть

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$t = \arcsin x$, т.к. на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ \sin имеет обрыв

$$y = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (\dots), \text{ т.к.}$$

$$y = \cos(\arcsin x) > 0 \text{ на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$



Теорема (о производной функции, заданной параметрически). Пусть функция $y = \Psi (\Phi^{-1} (x))$

задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \Phi (t) \\ y = \Psi (t) \end{cases}, t \in T, \text{ причём функции } \Phi (t)$$

и $\Psi (t)$ дифференцируемы в некоторой точке t_0 и

$\Phi'(t_0) \neq 0$. Тогда функция $y = \Psi (\Phi^{-1} (x))$ дифференцируема в точке x_0 и её производная может быть найдена по формуле:

$$y'_x (x_0) = \left(\frac{\psi (t_0)}{\Phi(t_0)} \right), \text{ т.е. } \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dt}{dt}$$

Доказательство

Рассмотрим функцию $y = \Psi (\Phi^{-1} (x))$. Она является композицией двух функций. Её производная в точке x_0 :

$$y'_x (x_0) = \Psi'_t (t_0) t'_x (x_0) = \left(\frac{\psi'_t (t_0)}{\Phi'_t (t_0)} \right) = \left(\frac{\psi' (t_0)}{\Phi' (t_0)} \right) \quad (*)$$

Равенство (*) справедливо в силу теоремы о производной обратной функции.