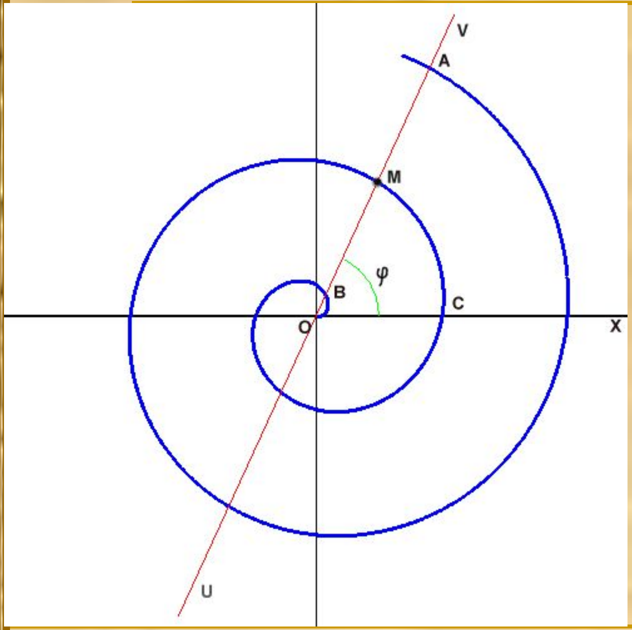
Сибирский государственный университет путей сообщения

О. И. Хаустова

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ



Лекции по дисциплине:
Математика

Новосибирск - 2010

Содержание:

Далее

ВВЕДЕНИЕ

Положение любой точки в пространстве (в частности, на плоскости) может быть определено при помощи той или иной системы координат.

Наиболее употребительны - *декартовы прямоугольные системы координат*, изучению которых посвящены многие разделы школьного курса математики.

Зачастую на плоскости задают *полярные системы координат*, а в пространстве - *цилиндрические* или *сферические системы координат.*

Применение полярных координат позволяет существенно упростить решение многих теоретических задач, а также находит широкое практическое приложение.

Далее

Цель:

изучить основные понятия полярной системы координат, методы построения кривых в полярной системе координат, возможности перехода от полярной системы координат к прямоугольной декартовой, и обратно.

Далее

Задачи:

- изучить основные понятия полярной системы координат;
- развить умения и навыки по построению линий в полярной системе координат;
- вывести формулы взаимосвязи полярной и прямоугольной декартовой систем координат;
- изучить способы задания некоторых линий в полярной системе координат.

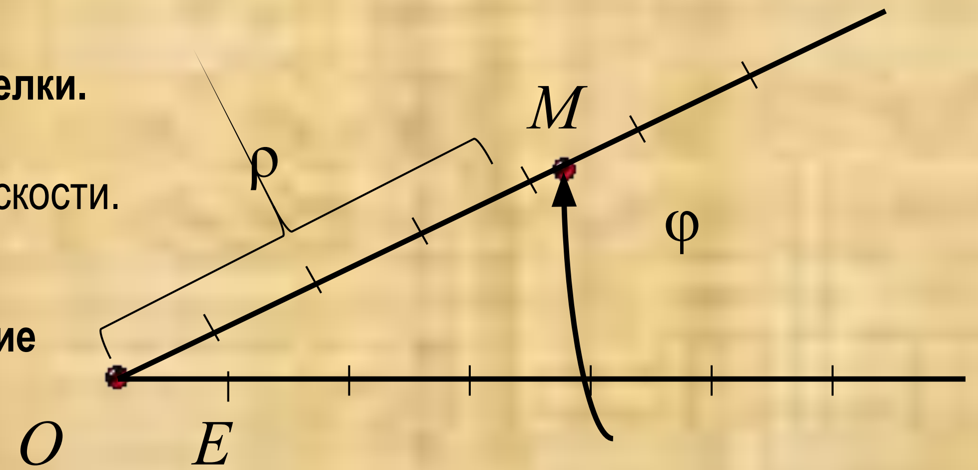
Далее

Полярная система координат на плоскости

Фиксируем на плоскости точку *О* и назовем ее *полюсом*; луч [*ОЕ*), исходящий из этой точки, назовем *полярной осью*.

Выберем масштаб для измерения длин. Пусть $|\overline{OE}| = 1$.
Условимся считать положительными повороты вокруг точки *О*, совершаемые против часовой стрелки.

Пусть М - произвольная точка плоскости.



Этой точке поставим в соответствие упорядоченную пару чисел (ρ, φ),

где

$$\rho = |\overline{OM}|,$$

причем: $\varphi = (\overrightarrow{OE}, \wedge \overrightarrow{OM}),$

.

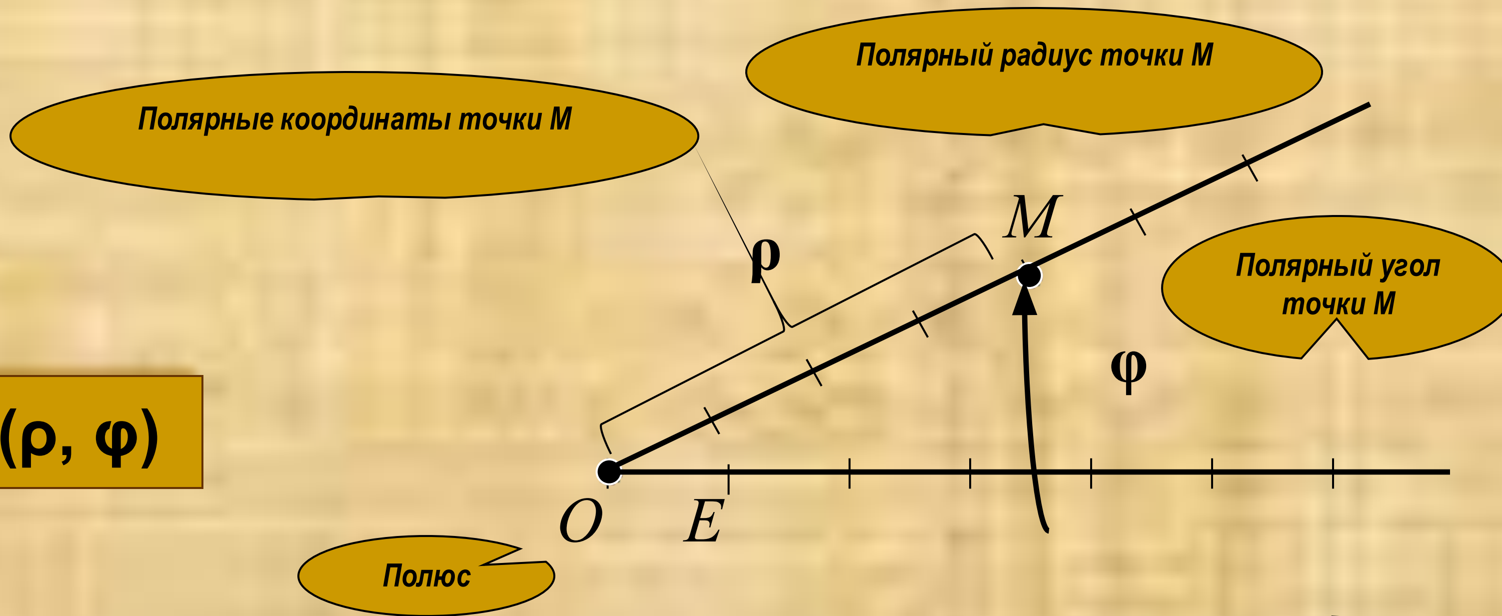
$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Полюс

Полярная ось

Далее

Полярная система координат на плоскости
Основные понятия:



M (ρ, φ)

$\rho = |\overline{OM}|$

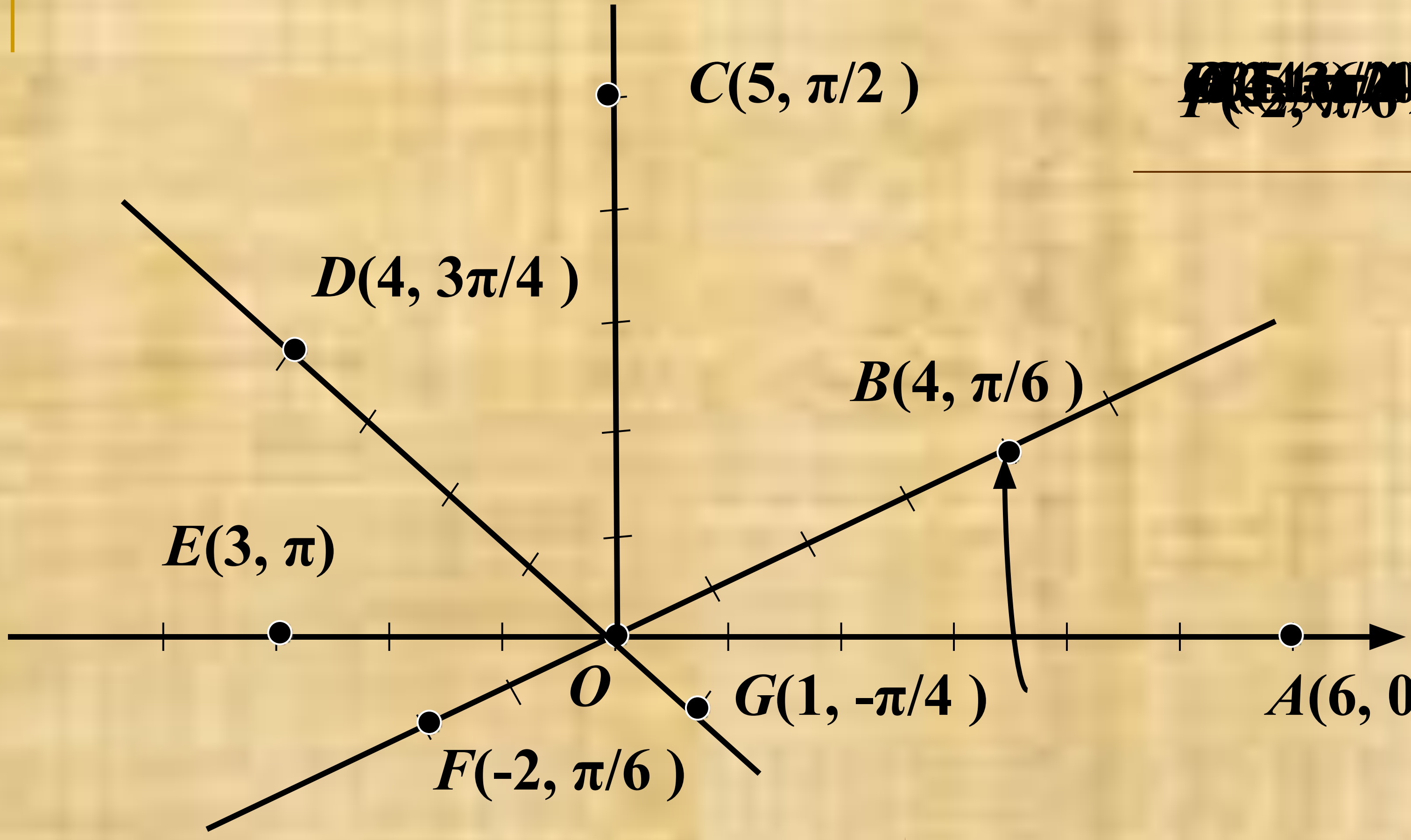
$\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OM}})$

$0 \le \rho < \infty$

$0 \le \varphi < 2\pi$

Далее

Примеры построения точек в полярной системе координат



Это интересно!

Далее

Взаимосвязь прямоугольной декартовой и полярной систем координат

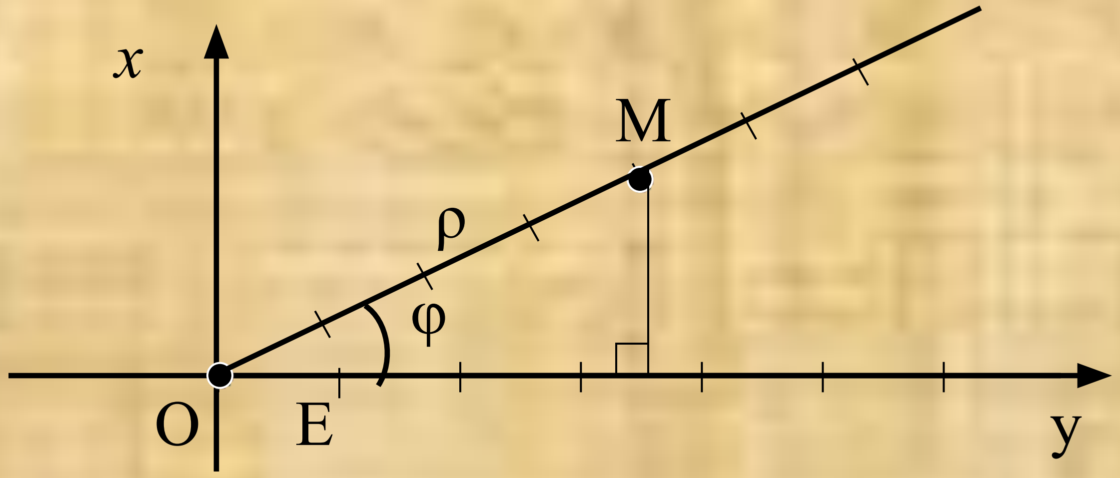
Присоединим к полярной системе координат прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось *Ox* совмещалась с осью *Oy* поворотом на угол φ= 90°.

Тогда полярные координаты выражаются через декартовы формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Декартовы координаты точки *M* выражаются через ее полярные координаты так:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

Далее

Построение графиков функций в полярной системе коорди…т

Постройте кривую, заданную уравнением ρ=sinϕ.

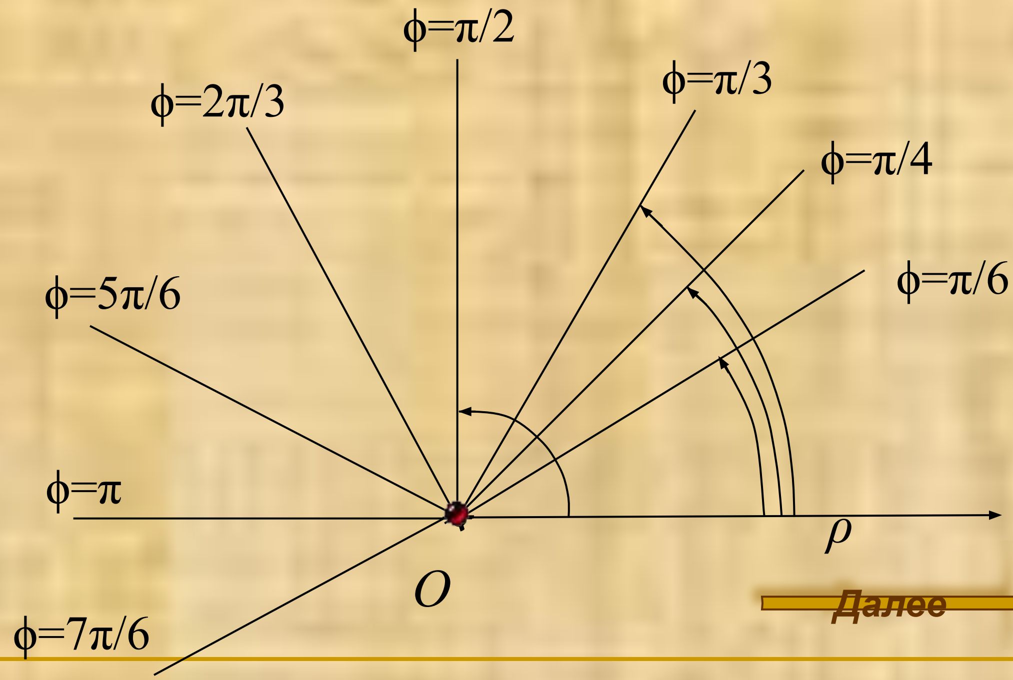
1) подготовим таблицу значений ϕ и ρ:

ϕ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6
ρ	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	1/2	0	- √3/2

2) выберем полюс *O*, проведем полярный радиус **ρ** горизонтально.

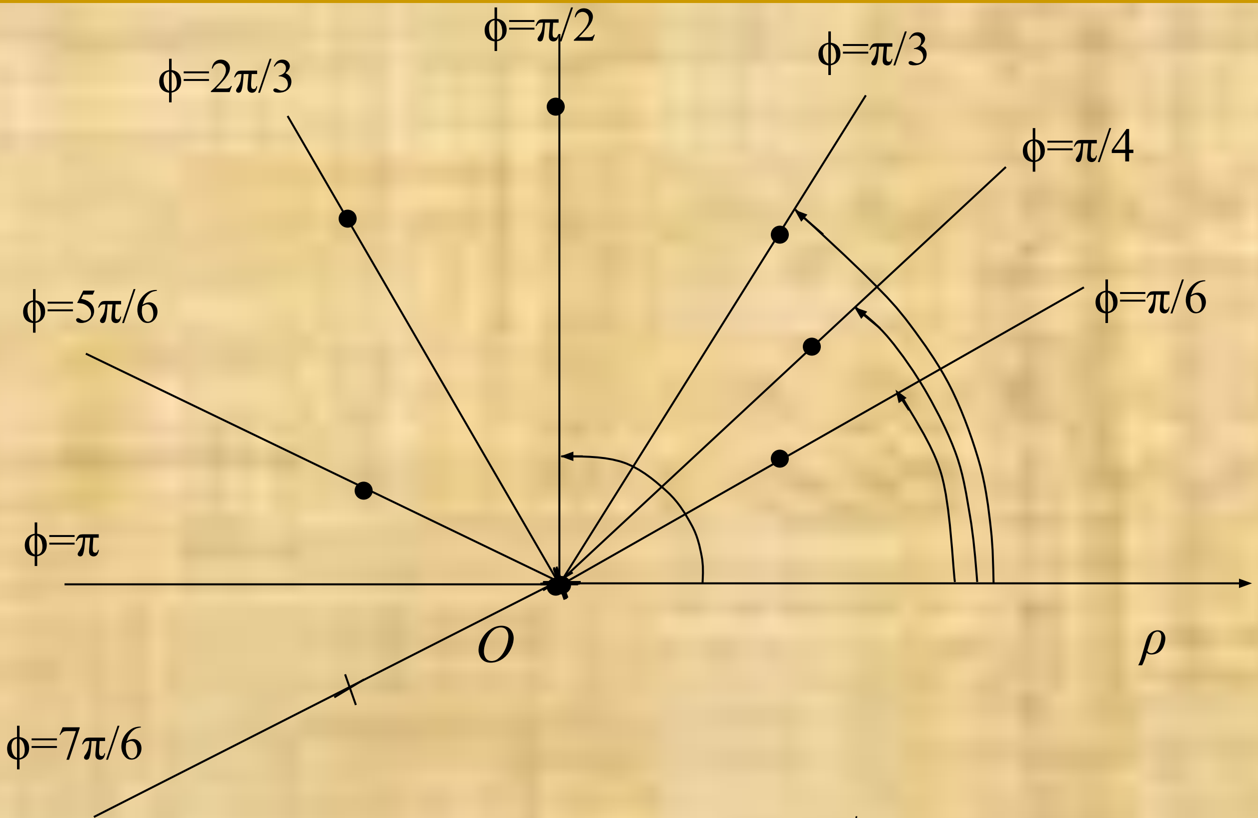
Это соответствует ϕ=0.

Все остальные углы будем откладывать от него против часовой стрелки.



Далее

3) для каждого выбранного ϕ отложим от полюса вычисленные ρ;

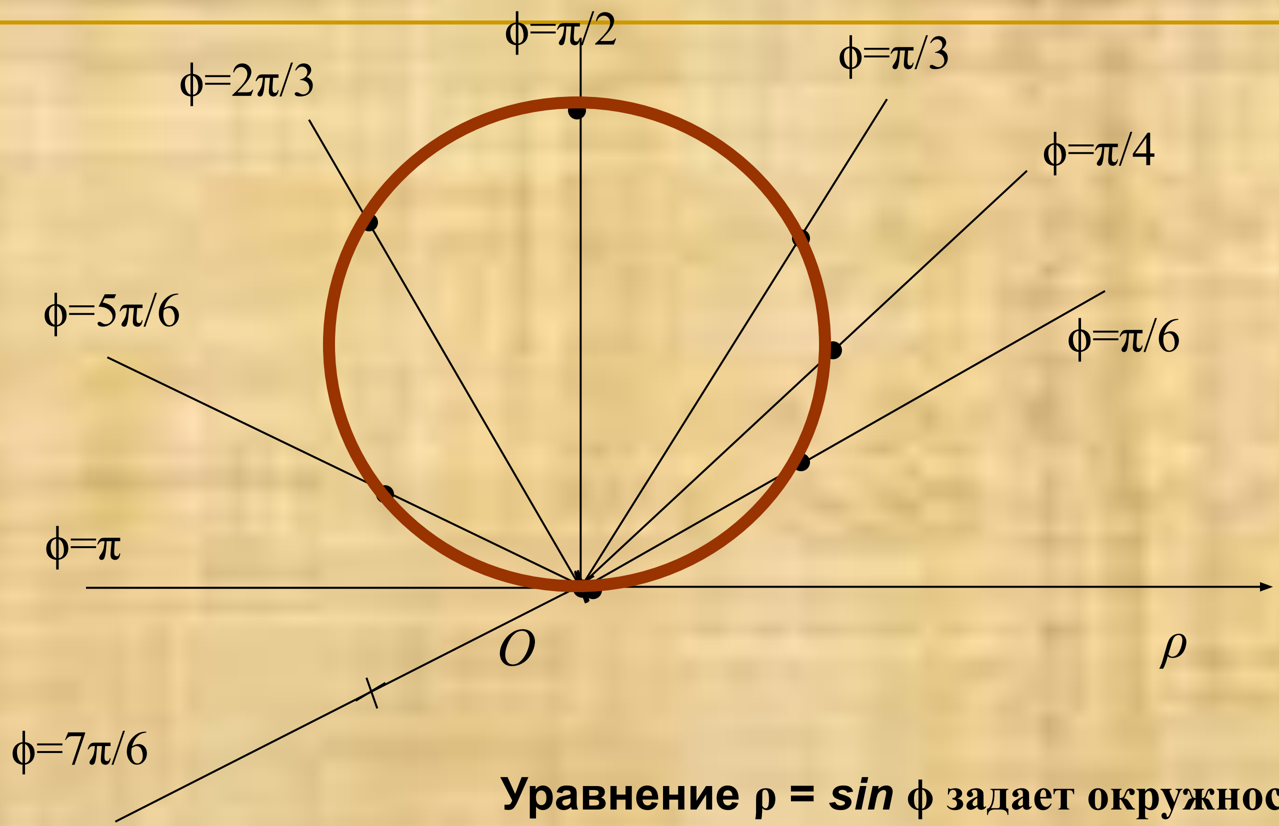


4) для отрицательных значений ρ ($\rho = -\sqrt{3}/2$) расстояние от полюса откладывается вдоль противоположного направления ρ;

5) остальные отрицательные ρ совпадут с имеющимися точками;

Далее

6) соединяем все точки плавной линией:

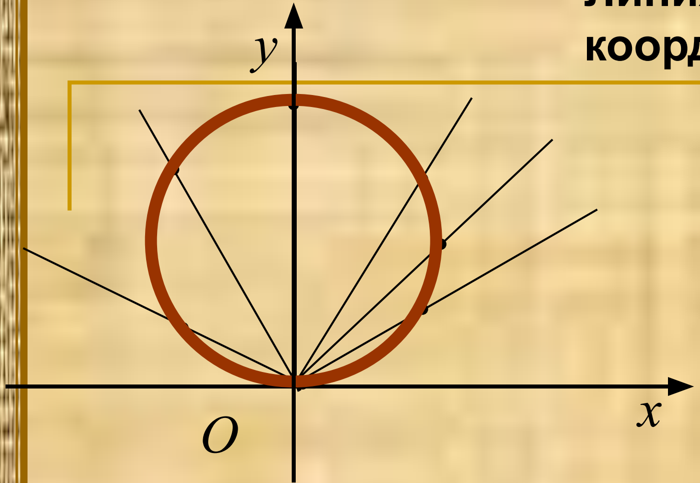


Уравнение ρ = *sin* ϕ задает окружность!

Определим аналитически центр и радиус полученной окружности.

Далее

Линия задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \sin\phi$.



Найдем уравнение этой линии в прямоугольной декартовой системе координат с началом в полюсе и осью Ох, совпадающей с полярной осью.

Согласно формулам перехода имеем: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Тогда:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$x^2 + y^2 = y,$$

$$x^2 + y^2 - y = 0,$$

Выделив полный квадрат, получим:

$$x^2 + \left(y^2 - 2\cdot\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Уравнение окружности

с центром в точке $\left(0; \dfrac{1}{2} \right)$, радиусом $\dfrac{1}{2}$.

Далее

Некоторые линий в полярной системе координа

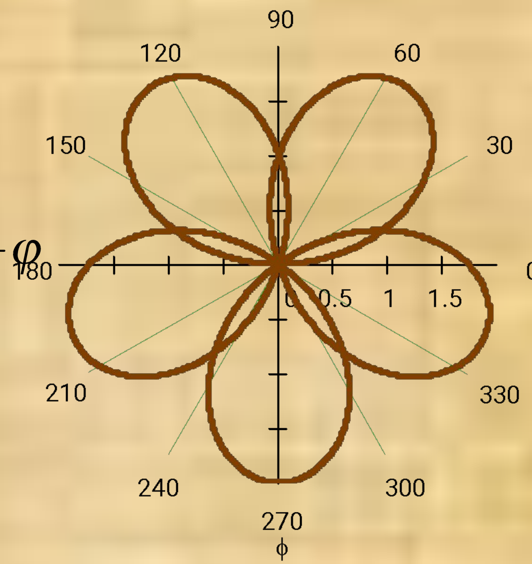
Некоторые линий в полярной системе координат

Розы

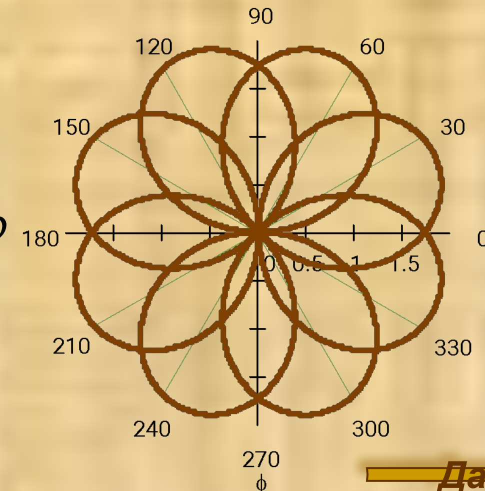
$\rho = \sin 3\varphi$

$\rho = 2\sin 2\varphi$

$\rho = 2\sin\dfrac{5}{3}\varphi$



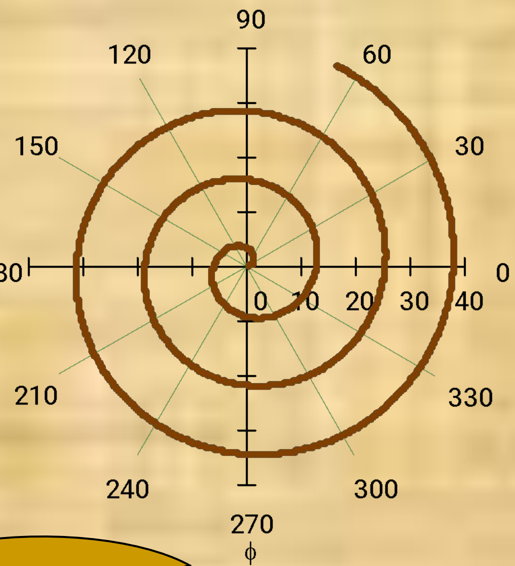
$\rho = 2\sin\dfrac{4}{3}\varphi$



Далее

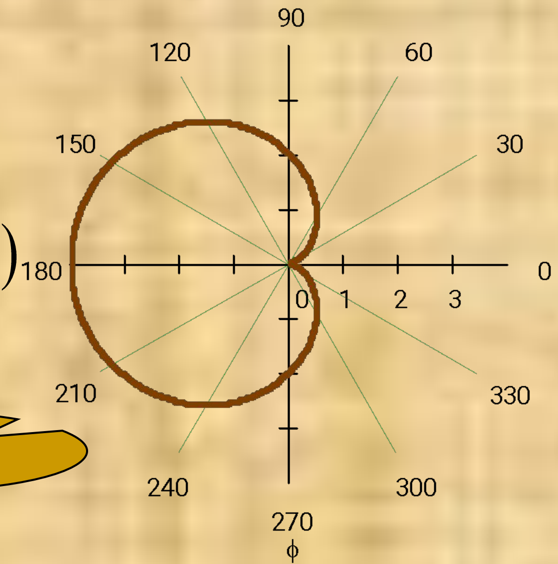
Далее

$\rho = 2\varphi$



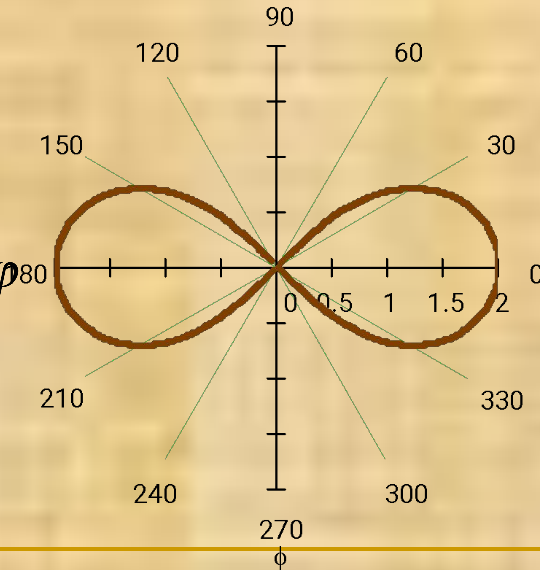
Спираль Архимеда

$\rho = 2(1 - \cos\varphi)$



Кардиоида

$\rho^2 = 4\cos 2\varphi$



Лемниската Бернулли

Далее

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В лекции было дано определение и рассмотрены основные понятия полярной системы координат, приводились примеры построения линий в полярной системе координат, были выведены формулы взаимосвязи полярной и прямоугольной декартовой систем координат, а также рассмотрены примеры задания некоторых линий в полярной системе координат.

Далее

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

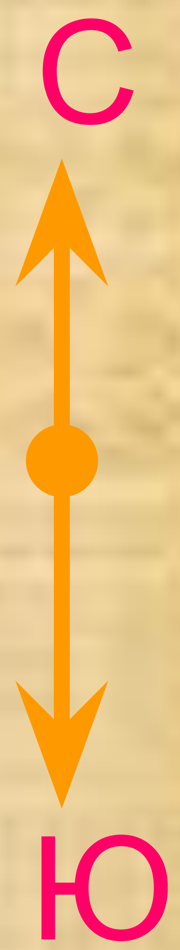
- Гусак, А. А. Справочник по высшей математике [Текст] / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 1999. – 640 с.
- Дмитриева, А. В. Элективный курс по геометрии «Инверсия и ее приложения к решению задач»: учебно-дидактический комплекс [Текст] / А. В. Дмитриева. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2005. – 193 с.
- Свободная энциклопедия «Википедия» [Электронный ресурс] / URL:http://ru.wikipedia.org/wiki/

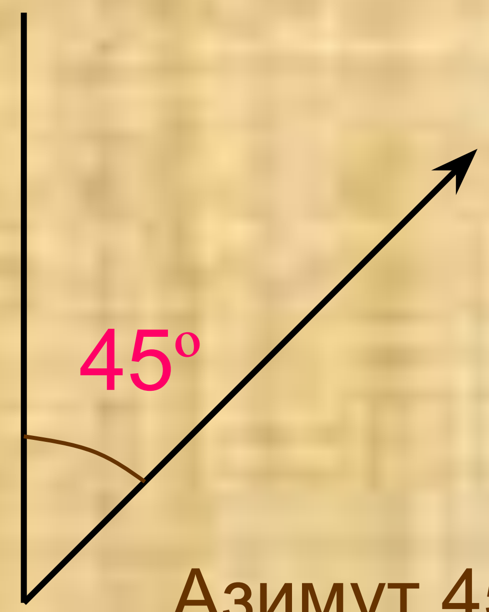
Азимут

Туристы в походах пользуются полярными координатами.

Азимут – это угол между направлением на север и направлением на некоторый предмет из точки, где находится турист.

Артиллеристы отсчитывают азимуты от направления на ЮГ.





Азимут 45°