Спецкурс «Математическое моделирование в гуманитарных науках» Лекция 2

Шведовский В.А.,
д.соц.н., к.ф.-м.н
МГУ им. М.В.Ломоносова

Методологический постулат о нестационарной компоненте социальных процессов

- Процессы в естественных науках породили представления об устойчивых стационарных моделях как основе описания явлений мира:

- Существующее устойчиво

- Исследования сложных систем в науках о живой материи (биологии, физиологии, психологии и т.д.) и неравновесных процессов в физике, физи- ческой химии обосновали заглавный постулат:

- ***Предсказуемость***

Зависимость класса математической модели от типа **объекта первичной идеализации (ОПИ)** и цели решаемой задачи

Любой конкретный социальный процесс имеет **конечные** временные рамки: сроки возникновения и завершения.

Внутри этого интервала времени может быть выбран такой срок, в пределах которого структура отношений между факторами неизменна, а т.е. возможны такие постановки задач, для которых имеет содержательный смысл стационарная модель (см).

В случае, когда в рамках некоторого подинтервала времени проис-

ходят перестройки структуры социального процесса, то логично определиться с нестационарной моделью (нм).

Нестационарная модель может оказаться **устойчивой, частично устойчивой и неустойчивой** в соответствии с типом процесса.

Все эти классы моделей приемлемы в сфере задач прогнозирования, если число обусловленности матрицы оператора модели < 500

Базовая математическая модель социального процесса

- Дискретная динамическая система - Д.Д.С.:

$\mathbf{X_{n+1} = A(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m})}$, где X_n – вектор в k – мерном признаковом пространстве с метрикой не хуже, чем в интервальных шкалах, n – дискретное время, т.е. это СРС – система рекуррентных соотношений с m – лагом.

Условием перехода СРС в конечно-разностные уравнения (КРУ) являются требования (на примере 2-х слойной схемы; рассматриваются также модели процессов с числом слоев ≤ 3):

$$\mathbf{X_{n+1} = X_n + \tau * F(t_n, X_n)}, \text{ где } \mathbf{t_n = n * \tau}$$

Условием перехода КРУ в ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения является существование конечного предела:

$$\mathbf{\lim (X_{n+1} - X_n)/(t_{n+1} - t_n) \text{ при } (t_{n+1} - t_n) \to 0}$$

Классификация динамических систем

- По виду оператора: *линейные* $\left(\varphi_t[x(t)+y(t)]=\varphi_t[x(t)]+\varphi_t[y(t)]\right)$ и *нелинейные*
- Системы с непрерывным и дискретным временем (*потоки* и *каскады*)
- Колебательные системы:
  - линейные и нелинейные
  - сосредоточенные и распределенные
  - автономные и неавтономные
  - автоколебательные
- Консервативные (гамильтоновы) и неконсервативные

Тезис А.Ляпунова о корректности формулирования модели

- Математическими объектами нелинейной динамики являются модели — явно заданные динамические системы, зависящие от конечного числа параметров. Важнейшим требованием к модели является то, что она должна правильно, по крайней мере качественно, описывать природу соответствующего физического или социально-экономического явления.
- В связи с этим вспомним следующее замечание, сделанное Ляпуновым: «. . . нельзя использовать сомнительные аргументы при решении конкретной проблемы, не важно механики или физики, если она задана корректно с математической точки зрения. С того момента, как система определена, она становится предметом чистого анализа и ее нужно трактовать только таким образом».
- Дом. задание: привести пример некорректной модели

Условие корректности задания модели

- Она должна быть «грубой» или структурно устойчивой, т.е. не менять свой топологический тип фазовой диаграммы при «малом шевелении» векторного поля д.с.
- Дано множество двумерных систем на плоскости, заданных уравнением $\dot{x} = X(x)$, где $X(x1, x2)$ — C^r -гладкая ($r \geq 1$) функция, определенная в замкнутой ограниченной области $G \subset R2$.

Определение 7.1. **Динамическая система X называется грубой** в области G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

1) все системы в δ-окрестности X топологически эквивалентны X;
2) гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε-близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε)

- При этом δ-окрестность системы X как множество всех систем X^1, удовлетворяющих
- условию $||X^1 - X||_{C1} < \delta$, где
- На множестве введена следующая норма : $|| X ||_{C1} = \sup\limits_{x \in G} (||X|| + || \partial X / \partial x||)$.

Л.П.Шильников, А.Л.Шильников, Д.В.Тураев, Л.Чуа. Методы качественной теории в нелинейной динамике, часть 2,

Определение блуждающих и не блуждающих точек

- Рассматриваем систему $x^{\cdot} = X(x)$, где $X \in C1$ в ограниченной и замкнутой области $G \subset Rn$, границы которой состоят из гладких $(n - 1)$-мерных поверхностей без контакта с векторным полем, ориентированным внутрь, G.

- Следовательно, для любой точки $x0 \in G$ положительная полутраектория $x(t, x0)$ определена при любой начальной точке $x0$.

- Определение 7.3. Точка $x0$ называется блуждающей, если у нее существует такая окрестность $U(x)$, что при некотором $T > 0$ и всех $t > T$ $U(x) \cap x(t, U) = \varnothing$.
- Здесь, как и ранее: $$x(t, U) = \bigcup_{\xi \in U} x(t, \xi).$$

- Из определения следует, что каждая точка $\xi \in U$ также является блуждающей. Поэтому множество всех блуждающих точек открыто. Кроме того, легко видеть, что если точка $x0$ — блуждающая, то точка $x(t, x0)$ также блуждающая для любого t.
- Из открытости множества блуждающих точек вытекает, что его дополнение – множество неблуждающих точек M_1 замкнуто.

Центральные движения

- Множество M1 может рассматриваться как фазовое пространство динамической системы, и поэтому можно повторить процедуру и построить множество M2, состоящее из неблуждающих точек для системы, ограниченной на M1.

- Очевидно, что M2 $\subseteq$ M1. Подобно M1, множество M2 также является компактным инвариантным множеством.

- Если M2 = M1, то говорят, что M1 — **центр или множество центральных движений**. Ситуация в точности такова, когда мы рассматриваем грубые двумерные системы.

- В общем случае имеем M1 $\supset$ M2 $\supset$ ... $\supset$ Mk $\supset$ ... Если Mk = Mk+1, начиная с некоторого k, тогда *Mk также называется* ***центром***, а k называется порядковым числом центральных движений.

Классификация движений Андронова-Понтрягина для двумерной поверхности (плоскости)

- Все движения
  - Центральные
    - Устойчивые по Пуассону
      - Рекуррентные
        - Почти периодические
          - Квазипериодические
            - Периодические
              - Состояния равновесия
              - Собственно периодические
            - Апериодические (собственно квазипер.)
          - Не квазипериодические (предельно квази.)
        - Не почти периодические
      - Нетривиальные
    - Неустойчивые по Пуассону
  - Нецентральные

Устойчивость по Пуассону

Определение. Точка x_0 называется **устойчивой по Пуассону в положительном направлении (P +-устойчивой),** если существует такая последовательность t_n, где $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, что $\lim_{n\to+\infty} x(t_n, x_0) = x_0$. Другими словами, точка x_0 является ω-предельной*) точкой своей положительной полутраектории.

Определение точки, устойчивой по Пуассону в отрицательном направлении, аналогично вышеприведенному за исключением того, что $t_n \to -\infty$. В случае когда точка одновременно P +-устойчива и P −-устойчива, говорят, что она устойчива по Пуассону.

Устойчивые по Пуассону траектории могут быть, в свою очередь, разделены на два типа в зависимости от того, ограничена или нет последовательность $\{\tau_k(\varepsilon)\}$ времен возвращения Пуанкаре P-траектории в ее ε-окрестность. Биркгоф называл траектории первого типа **рекуррентными т**раекториями.

*) Точку x^* называют ω – предельной точкой траектории L, если для некоторой
Последовательности $\{t_k\}$, где $t_k\to\infty$, $\lim (t_k) = x^*$ при $k\to\infty$

Теорема Пуанкаре о возвращении как следствие существования инвариантной меры у эндоморфизма T

Обратимся теперь к другому следствию существования инвариантной меры — так называемой теореме Пуанкаре о возвращении. Пусть T — эндоморфизм пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Возьмем $C \in \mathcal{M}$, для которого $\mu(C) > 0$.

Теорема Пуанкаре о возвращении. *Для почти каждой точки* $x \in C$ *существует бесконечная последовательность* $\{k_i\}$ *такая, что* $T^{k_i} x \in C$.

Доказательство. Обозначим через C_s множество точек $x \in C$ таких, что $T^k x \notin C$ для всех $k \geqslant s$. Мы покажем, что $\mu(C_s) = 0$ для любого $s \geqslant 1$. Сначала заметим, что $C_s \cap T^{-m} C_s = \varnothing$ для всех $m \geqslant s$. В самом деле, если $x \in C_s \cap T^{-m} C_s$, то $T^m x \in C_s \subseteq C$, что противоречит определению C_s. Более того, $T^{-n} C_s \cap T^{-m} C_s = \varnothing$, если $n - m \geqslant s$. Действительно, если $x \in T^{-n} C_s \cap T^{-m} C_s$, то $T^m x \in C_s \cap T^{n-m} C_s$, вопреки предыдущему утверждению. Таким образом, множества $T^{-ps} C_s$, $p = 0, 1, \ldots$, попарно не пересекаются и имеют одинаковую меру. Следовательно, $\mu(C_s) = 0$. Теорема доказана.

Ступени стохастичности

- Существование у преобразования Т инвариантной меры
- Существование у преобразования Т средней по траектории (т. Биркгофа-Хинчина)
- Равенство средней по траектории для Т среднему по (М, *M*, μ)
- Существование слабого перемешивания – сходимости по Чезаро, т.е. в квадратичной степени
- Существование сильного перемешивания
- Выполнение ЦПТ –центральной предельной теоремы
- Экспоненциальное убывание корреляций

Инвариантная мера как проявление стационарности (пример существования)

Определение 3. *Мера* μ *называется инвариантной мерой эндоморфизма* T, *если* $\mu(C)=\mu(T^{-1}C)$ *для любого* $C\in\mathcal{M}$.

Если T — автоморфизм, то, обозначив $C'=T^{-1}C$, имеем $\mu(TC')=\mu(C')$. В случае автоморфизмов множества C' пробегают всю σ-алгебру $\mathcal{M}$, когда множества C пробегают всю σ-алгебру $\mathcal{M}$. Таким образом, в случае автоморфизмов инвариантность меры означает, что $\mu(C)=\mu(TC)=\mu(T^{-1}C)$ для любого $C\in\mathcal{M}$.

Лемма 1. *Для произвольного эндоморфизма* T *и инвариантной меры* μ

$$\int f(\mathrm{x})\,d\mu(\mathrm{x})=\int f(T\mathrm{x})\,d\mu(\mathrm{x}).$$

Утверждение леммы для индикаторов множеств эквивалентно инвариантности меры. Для конечных линейных комбинаций индикаторов утверждение следует из линейности интеграла. Общий случай получается предельным переходом.

Доказательство существования инвариантной меры для Т - преобразования

Теорема о $\exists$ inv меры (гауссова мера)

1. Пусть $M \overset{T}{\leftrightarrow} [0,1]$ и T: $Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ (1)

2. Пусть точка $x_0 \in [0,1]$ - фиксирована. Найти $\forall x$: $Tx = x_0$ (2)

3. Из (1) и (2) $\Rightarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] = x_0$

4. Обозначим: $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, а соответствующие точки - x_n $\left(\frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}\right)$

5. Тогда $\frac{1}{x_n} - \left[\frac{1}{x_n}\right] = \frac{1}{x_n} - n = x_0$, т.е. $x_n = \frac{1}{x_0 + n}$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$ (3)

6. Это значит, что у x_0 счётное число прообразов из-за того, что $T\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] = [0,1]$

7. В каждом отрезке $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ровно 1 точка – прообраз x_0.

8. Ищем плотность inv меры в виде $\rho(x_0)\,dx_0$.

9. Гаусс показал, что $\rho(x_0) = \frac{1}{1+x_0}$.

10. Проверим, что $\rho(x_0)\,dx_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n)\,dx_n$

11. Запишем с учётом (3): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n}{1+x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n}{1+\frac{1}{x_0+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0+n)}{(x_0+n+1)}\,dx_n$ (4)

12. Продифференцируем (3) по dx_0 и от результата возьмём модуль

$$\left|\frac{dx_n}{dx_0}\right| = x_n^2 \qquad (5)$$

13. Учитывая (3,5) запишем (4) в новой форме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+n}{x_0+n+1}\,dx_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+n}{x_0+n+1}\,x_n^2\,dx_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_0}{(x_0+n)(x_0+n+1)} \qquad (6)$$

14. Но (6) переписывается в виде: $dx_0 \sum \left(\frac{1}{x_0+n} - \frac{1}{x_0+n+1}\right)$ (7)

15. Где сумма в выражении (7) равняется $\frac{1}{1+x_0}$, т.е.

Т сохраняет меру: $\rho(x_0)\,dx_0 = \frac{dx_0}{1+x_0}$ ч.т.д.

Первым и очень важным следствием инвариантности меры является так называемая эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина. Мы приведем ее в подробной формулировке.

Эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина. *Пусть* $(M, \mathscr{M}, \mu)$ — *пространство с мерой*, $f \in L^1(M, \mathscr{M}, \mu)$. *Для* μ-*почти каждой точки* x *и* $f \in L^1(M, \mathscr{M}, \mu)$:

1) *в случае эндоморфизма* T *существует предел*

$$\bar{f}(\mathrm{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(T^k \mathrm{x});$$

Определение 7. *Динамическая система* $\{T^t\}$ *называется перемешивающей, если для любых* f, $h \in L^2(M, \mathscr{M}, \mu)$

$$\lim_{t\to\infty} \int f(T^t \mathrm{x})\, h(\mathrm{x})\, d\mu = \int f(\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}) \int h(\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}).$$

Пусть $\{T^t\}$ — эргодическая динамическая система. Возьмем произвольную функцию $f \geqslant 0$, для которой $\int f(\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}) = 1$. Тогда мы можем рассмотреть «неравновесную» меру μ_0, $\frac{d\mu_0(\mathrm{x})}{d\mu(\mathrm{x})} = f(\mathrm{x})$. Сдвиг этой меры определяется соотношением $\mu_t(C) = \mu_0(T^{-t}C)$. Последнее равенство эквивалентно, как легко видеть, тому, что μ_t абсолютно непрерывна относительно μ и $\frac{d\mu_t(\mathrm{x})}{d\mu(\mathrm{x})} = f(T^t\mathrm{x})$.

Определение 7. *Динамическая система $\{T^t\}$ называется перемешивающей, если $\mu_t \to \mu$ при $t \to \infty$ в том смысле, что для любой ограниченной измеримой функции h*

$$\lim_{t\to\infty} \int h(\mathrm{x})\, d\mu_t(\mathrm{x}) = \lim_{t\to\infty} \int h(\mathrm{x}) f_0(T^t\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}) = \int h(\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}).$$

Определение перемешивания допускает и другую эквивалентную формулировку.

Определение 7. *Динамическая система $\{T^t\}$ называется перемешивающей, если для любых f, $h \in L^2(M, \mathscr{M}, \mu)$*

$$\lim_{t\to\infty} \int f(T^t\mathrm{x})\, h(\mathrm{x})\, d\mu = \int f(\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}) \int h(\mathrm{x})\, d\mu(\mathrm{x}).$$

Эргодичность как следствие перемешивания

Ясно, что перемешивание влечет эргодичность. В самом деле, если $A \in \mathcal{M}^{(\mathrm{inv})}$, χ_A—индикатор A, то, полагая $f(\mathrm{x}) = \chi_A(\mathrm{x})$, будем иметь

$$\int f(T^t \mathrm{x}) h(\mathrm{x}) d\mu(\mathrm{x}) = \int \chi_{T^{-t}A}(\mathrm{x}) h(\mathrm{x}) d\mu(\mathrm{x}) =$$

$$= \int \chi_A(\mathrm{x}) h(\mathrm{x}) d\mu(\mathrm{x}) \underset{t\to\infty}{\to} \mu(A) \int h(\mathrm{x}) d\mu(\mathrm{x}).$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\mu(A) = 1$.

Выполнение центральной предельной теоремы –Ц. П.Т.

показано, что $M\mu_n = np$, $D\mu_n = npq$

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i .$$

Пусть $a = -\infty$, $b = x$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\frac{\mu_n - M\mu_n}{\sqrt{D\mu_n}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x) .$$

Сформулируем ЦПТ для одинаково распределенных случайных величин:

Теорема. Пусть с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $M\xi_i = a$ и дисперсию $D\xi_i = \sigma^2$. Тогда к этой последовательности применима Ц˙ П

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x).$$

Экспоненциальное убывание корреляций (эук)

- Существует **q, 0** < **q** < **1** такое, что

$$\left|\int (f(T^k x)) f(x)\, d\mu(x)\right| \leq C(f) q^k \qquad (*)$$

Группа (T^k) обладает свойством (эук), если (*)

имеет место для достаточно богатого запаса функций.

Теорема Андронова-Понтрягина

Теорема 7.1 (Андронов–Понтрягин). Система X является грубой в области G тогда и только тогда, когда
(1) не существует состояний равновесия с характеристическим показателем на мнимой оси;
(2) не существует периодических орбит с мультипликатором на единичной окружности и
(3) не существует сепаратрис, идущих из седла в другое (или то же самое) седло.

Последнее условие может быть переформулировано как отсутствие гомоклинических и гетероклинических траекторий. Из приведенной выше теоремы следует, что грубая система на плос- кости может обладать только грубыми состояниями равновесия (узлами, фокусами и седлами) и грубыми предельными циклами и их конечное число.

Что такое динамическая система?

- Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие ***состояния***, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий ***эволюцию*** начального состояния с течением времени.
- Динамические системы – физические, биологические, социальны
е
химические объекты, вычислительные процессы или процессы преобразования информации…
- Закон эволюции – диф. уравнения, дискретные отображения…

Динамическая система

«Состояние» - совокупность значений некоторых характеристик системы в данный момент времени

«Эволюционный оператор» - описывает изменение состояния системы во времени

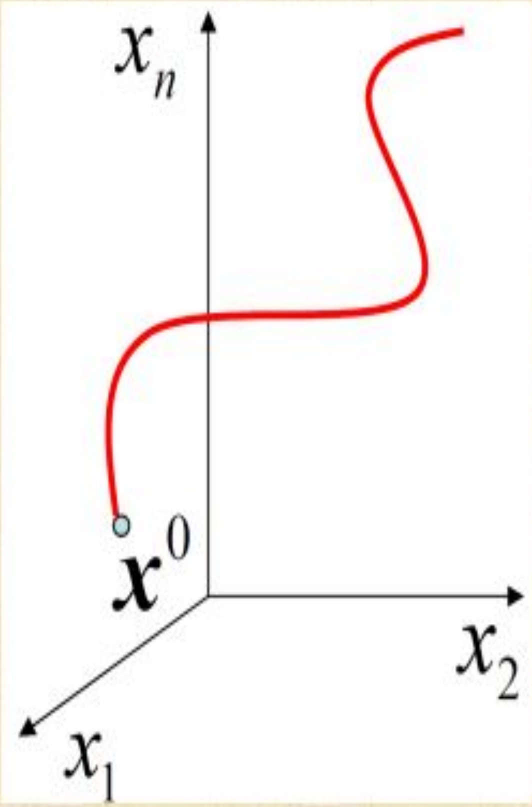
Математическая модель динамической системы:

введены параметры *(координаты)*, характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор φ_t, позволяющий установить изменение координат во времени.

Сосредоточенные динамические системы

Если M – область евклидова пространства, а t – непрерывно меняющийся параметр, эволюцию можно задать с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяют состояние системы в каждый момент времени.



Изменение состояния системы может быть описано системой ОДУ

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

…

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

Постановка задачи и вывод системы ОДУ базовой модели динамики этноконфликта

- Q = c (|X0| - |Y0|) + c (|X1| - |Y1|),

$$P = P(Q,S) = \chi_1 P_1(Q) + \chi_2 P_2(S) + \chi_3 P_3(Q,S) \qquad S = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = \left(\chi_1 \frac{\partial P_1}{\partial Q} + \chi_3 \frac{\partial P_3}{\partial Q}\right)\frac{dQ}{dt} + \left(\chi_2 \frac{\partial P_2}{\partial S} + \chi_3 \frac{\partial P_3}{\partial S}\right)\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = S \\ \dfrac{dS}{dt} = -S * \left(\chi_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial Q} + \chi_3 \dfrac{\partial P_3}{\partial Q}\right) \Big/ \left(\chi_2 \dfrac{\partial P_2}{\partial S} + \chi_3 \dfrac{\partial P_3}{\partial S}\right) \end{cases}$$

$$P_1(Q) = \frac{\alpha \times Q^2}{Q^2 + \beta} \qquad P_2(S) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S^2 \exp\left(-\frac{S^2}{2\rho^2}\right)}{\rho^3}$$

Графики зависимости от стимулов статичной P(Q) и динамичной P(S) компонент СПП – P(Q, S)

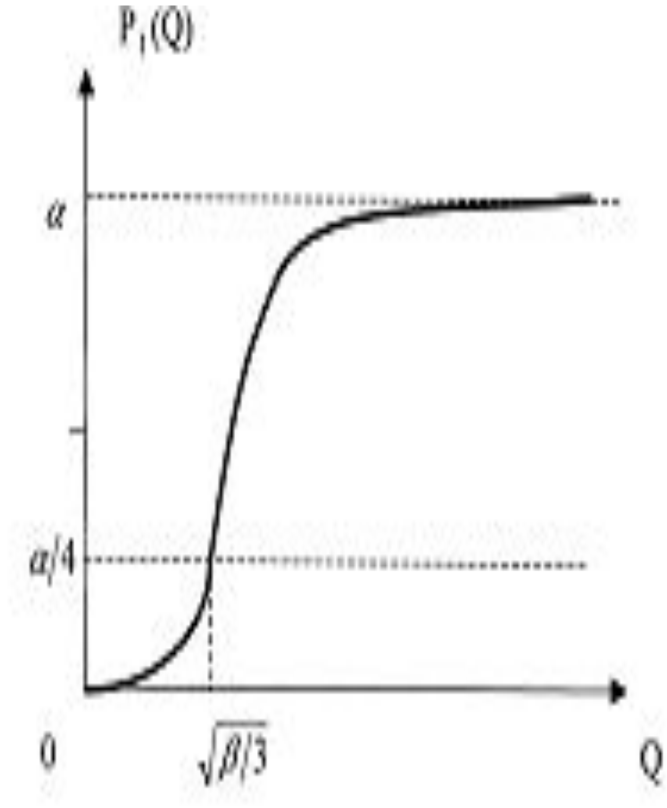


Рис.1а.

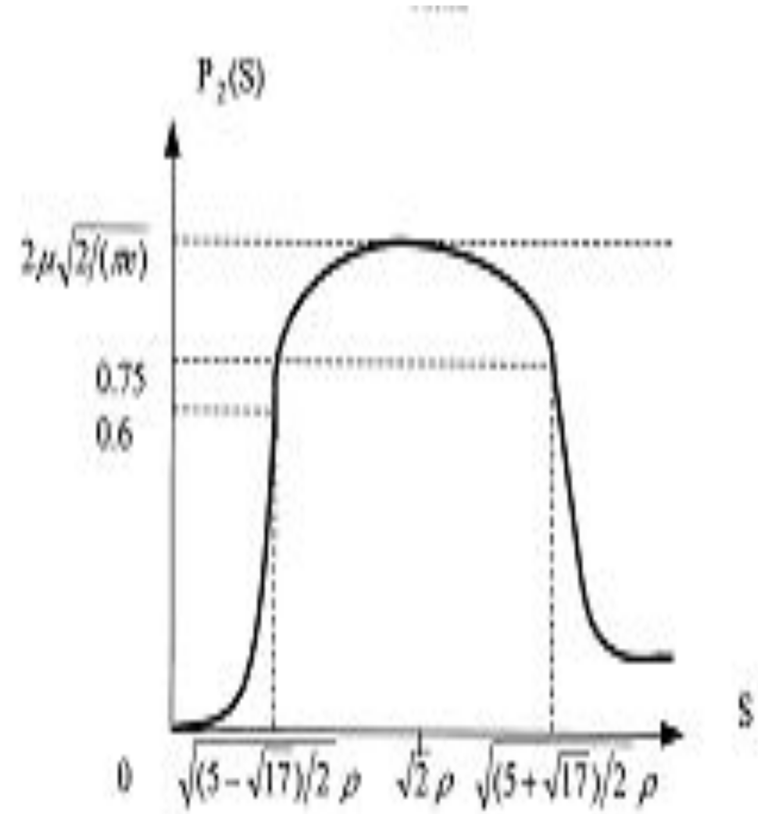
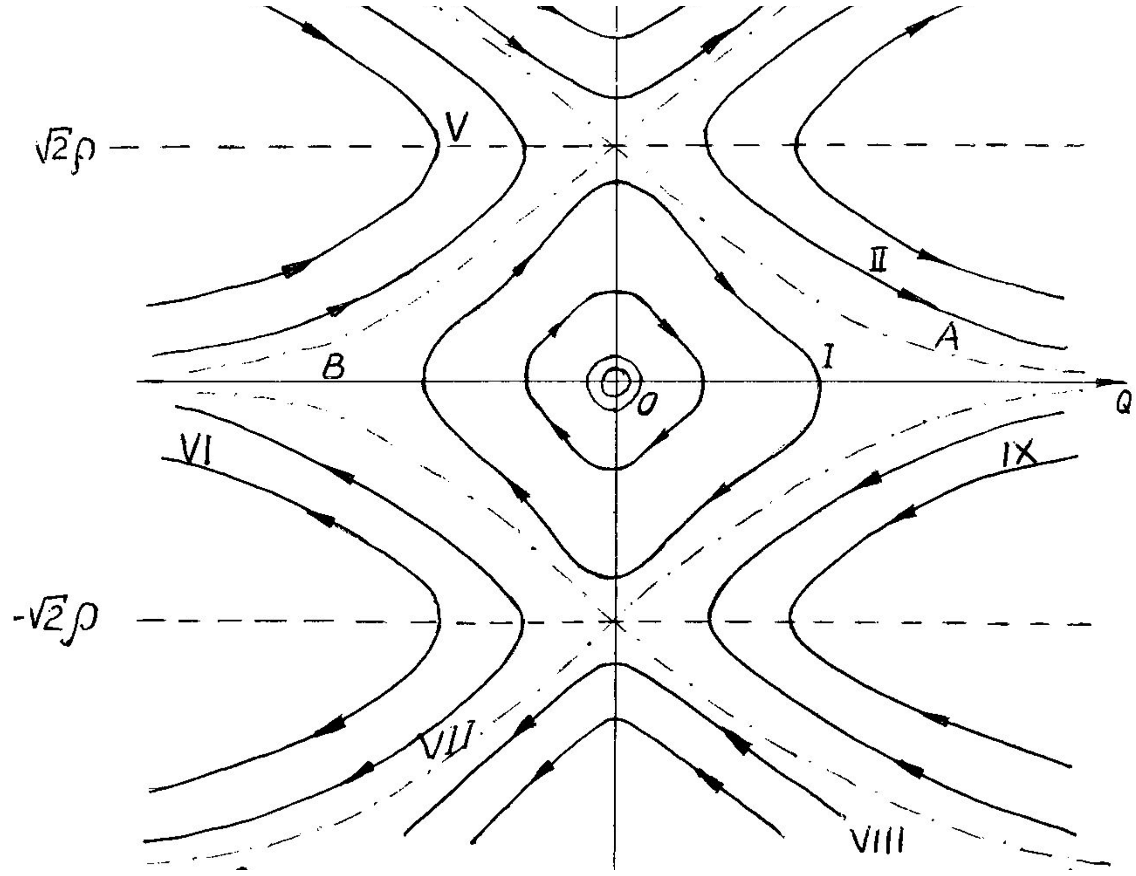


Рис.1б.



Фазовый портрет динамической системы этнополитического конфликта

Регулярные и странные аттракторы

Аттрактор – притягивающее предельное множество.

Пусть с течением времени произвольное начальное состояние из притягивающей области G, включающей в себя аттрактор G_0, релаксирует к G_0.

Движение, которому отвечает фазовая кривая в области притяжения, есть ***переходный процесс***.

Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий к некоторому ***инвариантному предельному множеству***, то есть аттрактору G_0.

Аттракторы типа состояний равновесия, предельных циклов или n-мерных торов называют ***простыми*** или ***регулярными***

Странный аттрактор – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве размерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения динамических систем.

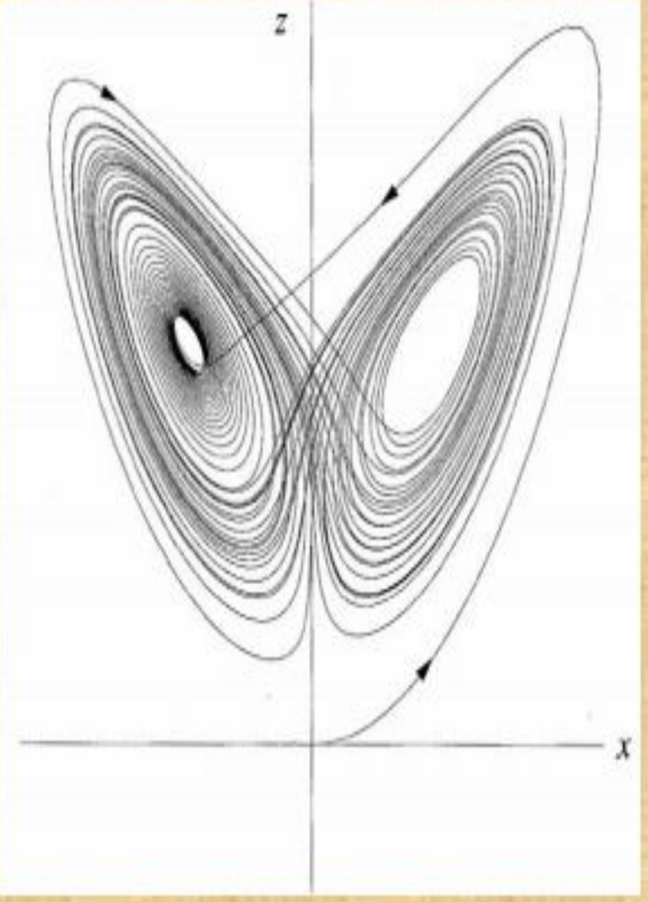
Аттрактор Лоренца

Аттрактор Лоренца (E. Lorenz, 1963):

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$



Система диссипативная: фазовый объем сжимается со скоростью $\sigma + \beta + 1$. Зафиксируем σ=10, β=8/3. При ρ >24.06 возникает «странный аттрактор» с хаотическим движением.

НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА + НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
=
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Отличия от регулярного движения:

1. Сложные, неповторяющиеся траектории
2. Непредсказуемость поведения системы на больших временах (зависимость от начальных условий)

Отличия от случайного процесса:

1. Нерегулярность происходит из самой системы, а не от внешнего фактора (шум, флуктуации)

Неустойчивость и нелинейность

Непредсказуемость

Предположим, что точность определения начальных условий $\Delta \ll 1$, т.е. две фазовые точки, расстояние между которыми равно или меньше Δ, мы различить не можем. Пусть вся эволюция происходит в конечной области фазового пространства с характерным размером $R \sim 1$. За время

$$T_1 \sim \frac{1}{h} \ln \frac{R}{\Delta}$$

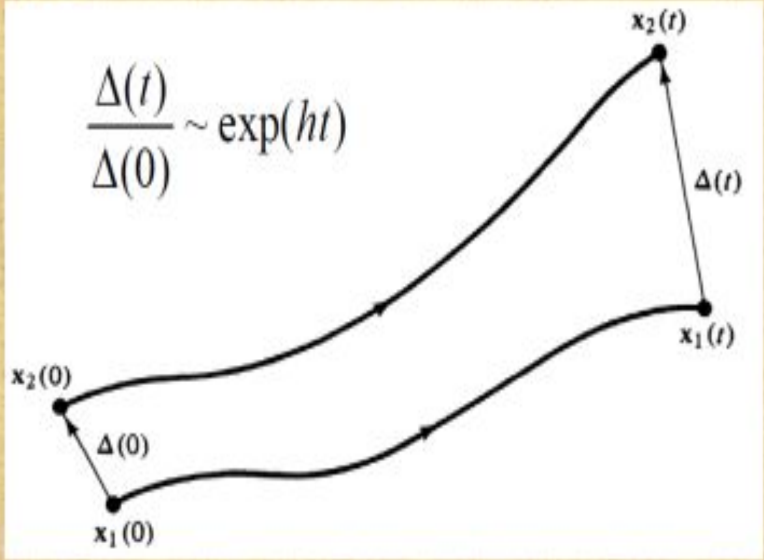
траектории разойдутся на расстояние порядка размера системы, т.е. предсказать уже ничего нельзя. Чтобы увеличить время прогноза вдвое, нужна точность

$$\Delta_2 \sim exp(-2hT_1) \sim \Delta^2$$

Неустойчивость и нелинейность

Экспоненциальное разбегание фазовых траекторий

Рассмотрим две фазовые точки, расстояние между которыми $\Delta(0)$ в начальный момент времени мало. В момент времени t оно равно $\Delta(t)$

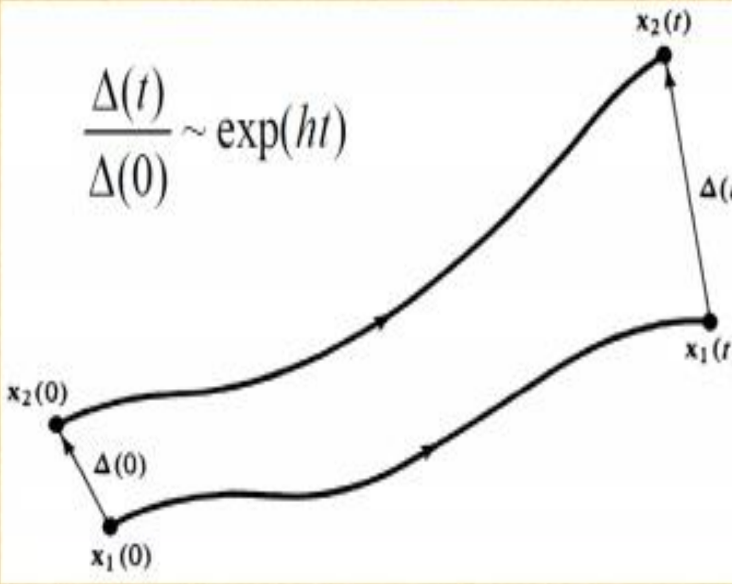


В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к «запутыванию траекторий»

Показатель Ляпунова

Характеристика экспоненциального разбегания

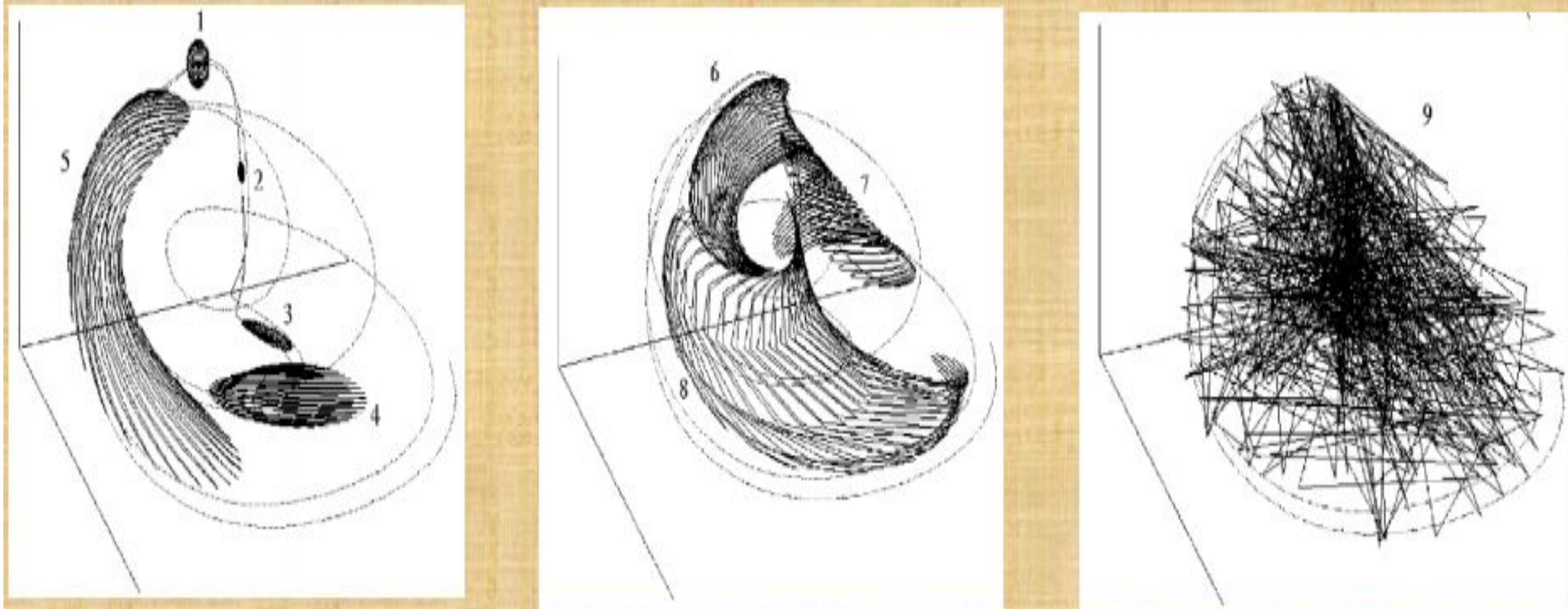
$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}$$



В трехмерном пространстве существуют 4 типа аттракторов:

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-,-,-)$ – устойчивая неподвижная точка
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,-,-)$ – устойчивый предельный цикл
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,-)$ – устойчивый двумерный тор
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+,0,-)$ – странный аттрактор

Перемешивание



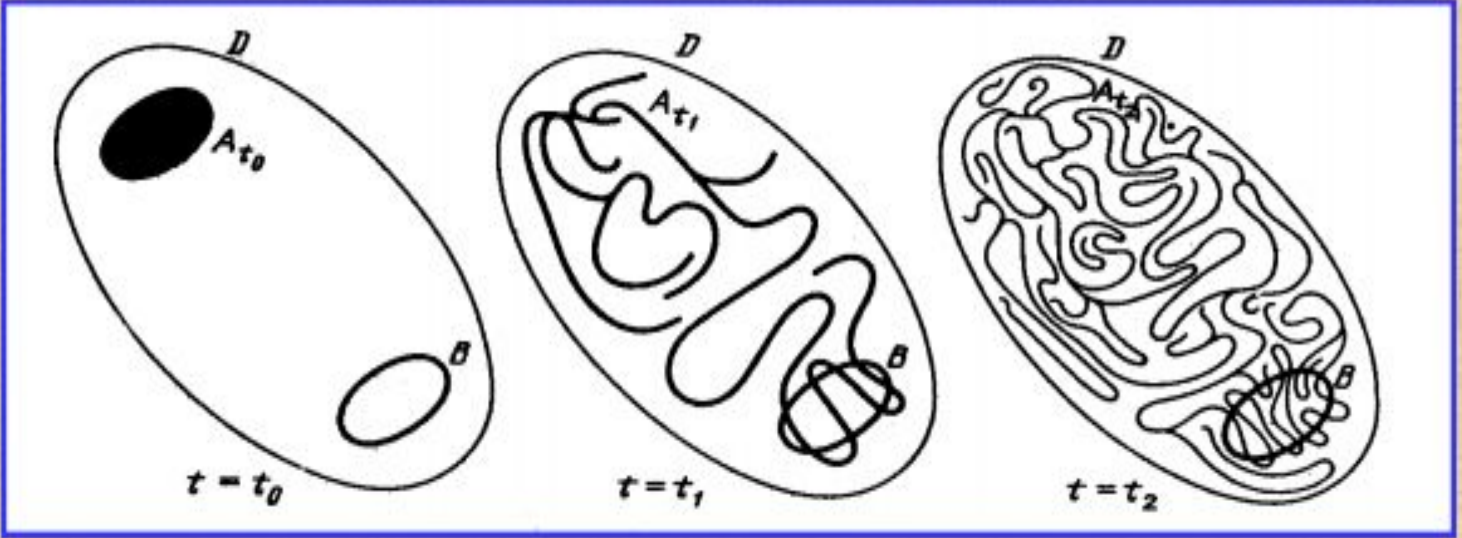
Эволюция малого первоначального фазового объема 1 во времени в системе со странным аттрактором. Исходный объем 1 сжимается по одним и растягивается по другим направлениям 2-3-4, изгибается 5-6, складывается 7-8 и, наконец, перемешивается по аттрактору 9.

Перемешивание

Формальное определение:

A и *B* – произвольные малые области, $A_t = \varphi_t(A)$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V(A_t \cap B)}{V(B)} = \frac{V(A)}{V(D)} = \mu(A)$$



Эргодичность

Данное понятие используется при описании свойств статистического характера, проявляющихся у всех или почти у всех фазовых траекторий динамической системы при $t \to \infty$

Предположение: фазовый объем сохраняется, движение происходит в некоторой ограниченной области ***D*** с объемом $\boldsymbol{V_D}$

$$\boxed{\bar{h}(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T h(\mathbf{F}^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}))dt}$$

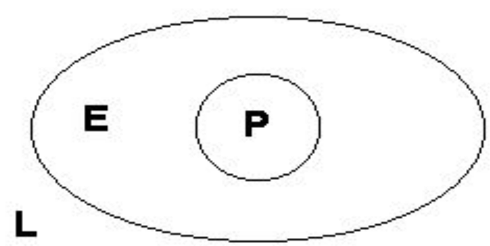
Среднее по времени

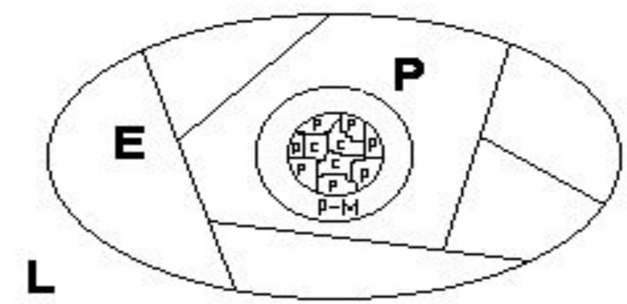
Фазовое среднее

$$\boxed{< h >= V_D^{-1}\int_D h(\mathbf{x})dV, \quad dV = dx_1 \ldots dx_n}$$

Модель К.Левина жизненного пространства личности (ЖПЛ)

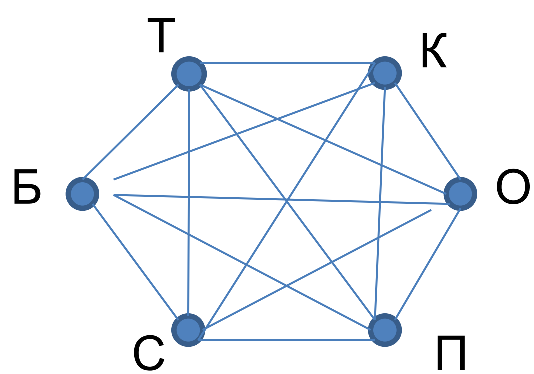
L – жизненное пространство,
p – сама личность с её ячеистой структурой ,
E – психологическая среда, I - информация
Движение фокуса психической активности по ячейкам структуры личности есть процесс её самоидентификации и считывания требуемой I





$\varpi = \{\omega_n\}^{+\infty}_{-\infty}$

$\boldsymbol{\sigma} \{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$



₤{*Т, Б, К, О, С, П*}

$\Psi(x) = \varpi = \{\omega_n\} \leftrightarrow \mathbf{f}^n x \in E\omega_n \leftrightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_n f^{-n} E\omega_n$

Построение символьной г.д.с. Шаг 1

- Обозначим каждый регион символом ω_i ,

где $i = 1, 2, \dots n$, т.е. тем самым вводим буквы

ω_n некоторого алфавита L.

- Рассмотрим пространства Σ последовательностей

$$\varpi = \{\omega_n\}^{+\infty}_{-\infty}$$

- Изучаются каскады – дискретные динамические системы (д.д.с.), порождённые сдвигом **σ** в этих пространствах:

$$\boldsymbol{\sigma}\,\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$$

Построение символьной г.д.с. Шаг 2

- Пусть на фазовом пространстве X действует д.д.с.:

$$\{\mathbf{f}^{n}\,;\, n \in Z\},$$

порождённая отображением

$$f: X \to X$$

Эта система строго детерминирована: задав x_0, однозначно получаем траекторию $x_n = \mathbf{f}^{n} x_0$, $n \in Z$

Известно: и в социологии и в психологии существует массивное множество показателей, измеряемых в «слабых шкалах», т.е. физически не точно!

Построение символьной г.д.с. Шаг 3

- Отождествим ЖПЛ с пространством X, а регионы, введённые К.Левином, с элементами его конечного покрытия, т.е.

$$\mathbf{X = \hat{U}_{i=1} \; E_i} \; .$$

Тогда при попадании точки д.д.с. x в E_i автоматически записывается значение i.

Построение символьной г.д.с. Шаг 4

- Пусть ω_0 – стартовое значение д.д.с., т.е. $x_0 \in E\omega_0$. Спустя время t образ $\mathbf{f}^t E\omega_0$ множества $E\omega_0$ может весьма вытянуть ся и пересекать несколько E_i. , т.е. быть неоднозначным
- Это не результат Случая, а в силу неточности задания x.

- Регистрация автоматом для всех моментов времени значений ω_i порождает отображение $\psi: X \to \Sigma$, сопоставляющее точке **x** последовательность ϖ так, что

$$\Psi(x) = \varpi = \{\omega_n\} \leftrightarrow \mathbf{f}^n x \in E\omega_n \leftrightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_n f^{-n} E\omega_n$$

Это основная догма символьной динамики

Построение символьной г.д.с. Шаг 5

Применение теста Колмогорова Мартина – Лёфа для выделения последовательностей символов разного уровня сложности. Оценка меры последовательностей $\mu\, Q_n$, выражающих периодические закономерности :

$$\mu Q_n = \frac{\sum_{j=1}^{N1} \int_{\omega i-\Delta\omega}^{\omega i+\Delta\omega} U^{+}[\Delta 4rn(\omega i)]d\omega}{2 \cdot \Delta\omega \cdot N_1} \leq 2^{-n}$$

где N_1 – число гармоник в описании *начального ансамбля (НА),* Δω– означает радиус
окрестности около ωi, n – число, начиная с которого усложнение НА тождественно с
лучайному.
U^+ - характеристическая функция: $U^{+}\quad[\Delta 4rn(\omega i)] = \begin{cases} 0, если\ \Delta_{4rn} \neq 0 \\ 1, если\ \Delta_{4rn} = 0 \end{cases}$

Библиография

- 1. П.Биллингслей. Эргодическая теория и информация. – М.: «МИР», 1969
- 2. Синай Я.Г. Современные прблемы эргодической теории. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 1995.
- 3. Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории. –Издательский Дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999
- 3. Л.П.Шильников, А.Л.Шильников, Д.В.Тураев, Л.Чуа. Методы качественной теории в нелинейной динамике, часть 1,2, Москва-Ижевск, 2004, 2009.
- 4. В.А. Шведовский, О.В. Шведовский. Тополого-сетевая модель жизненного пространства личности как обобщение гипотезы К. Левина // Математическое моделирование социальных процессов, вып.11, Сб. статей / Под ред. А.П. Михайлова. – М.: МАКС Пресс, 2010.- 176 с.