

## Лекция 2

# Основные понятия теории погрешностей

# Классификация погрешностей

**Истинное значение физической величины** — идеальным образом характеризующее рассматриваемое свойство данного объекта как в количественном, так и в качественном отношении.

**Действительное значение физической величины** — значение физической величины, найденное экспериментально и настолько близкое к истинному, что в поставленной измерительной задаче оно может быть использовано вместо него.

**Результат измерения** — значение величины, полученное путем измерения.

**Погрешность результата измерений** — отклонение результата измерения  $X$  от истинного (или действительного) значения  $Q$  измеряемой величины:

$$\Delta X = X - Q$$

## Классификация погрешностей

**Точность результата измерений** — степень близости к нулю значения погрешности результата измерения.

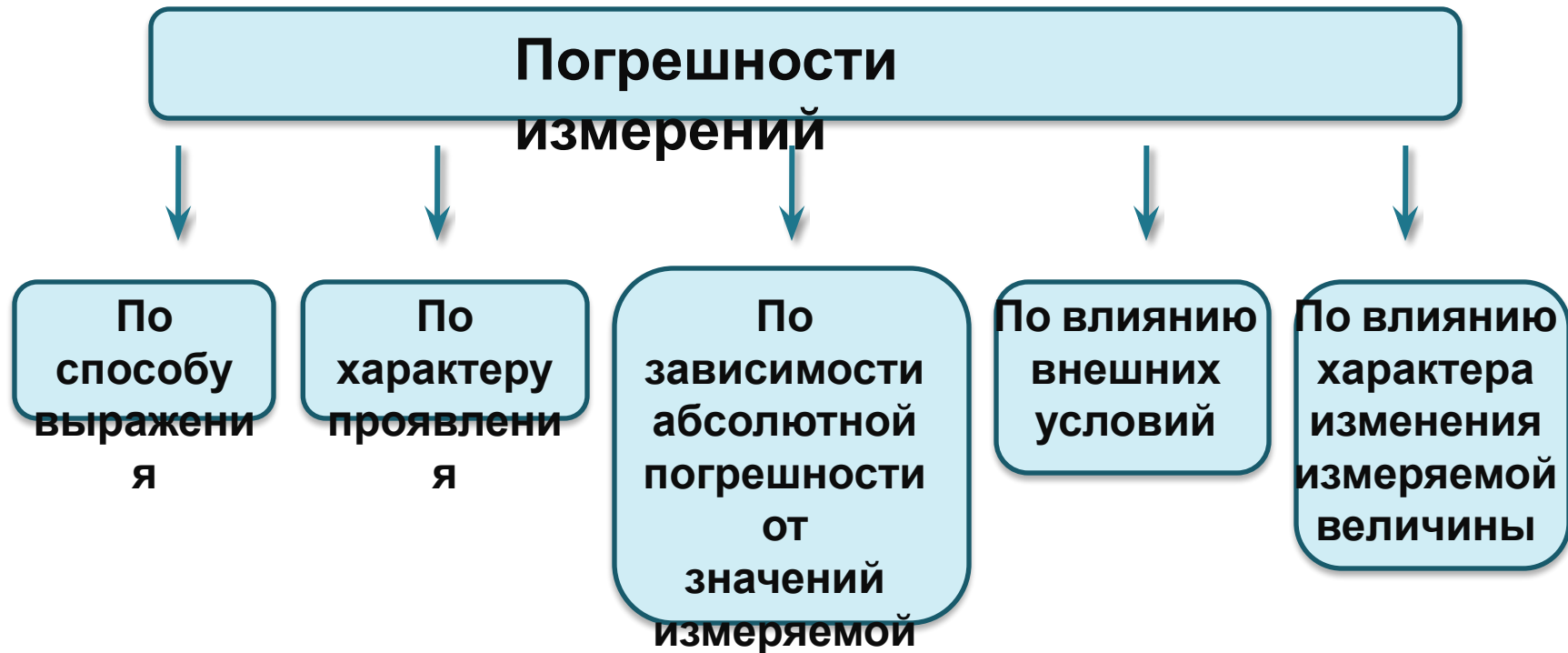
**Погрешность средства измерений** — разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической

**Точность средства измерений** — степень близости к нулю значения погрешности средства измерения.

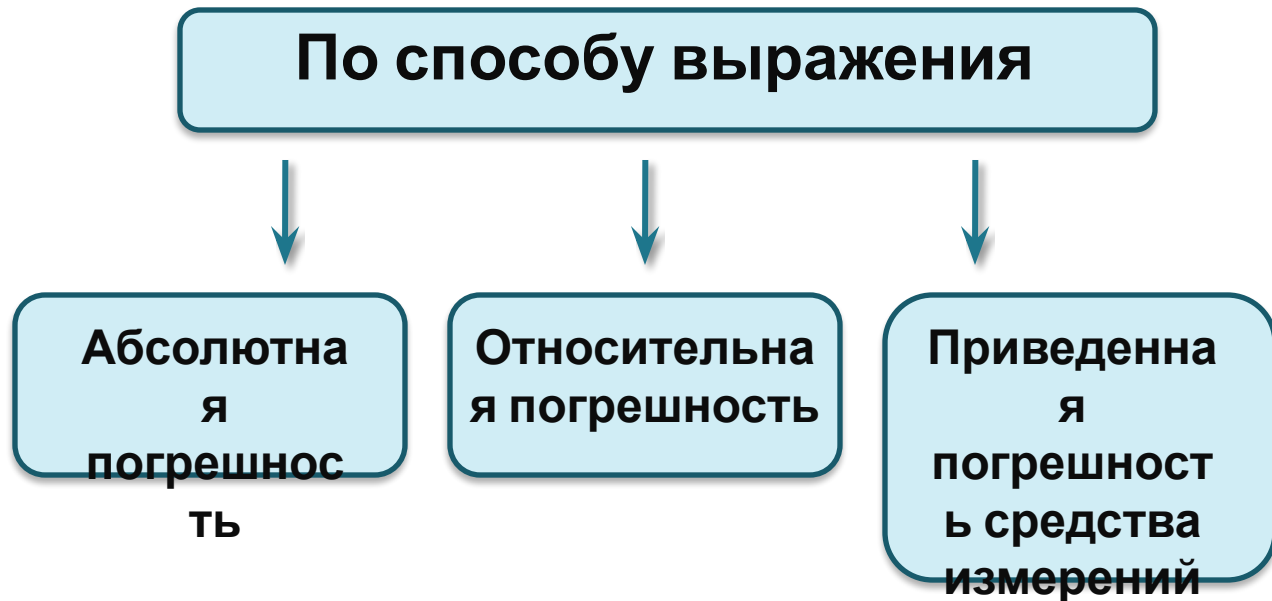
Зависимость сопротивления проводника от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	20	30	40
$R, \text{Ом}$	100,1	100,2	100,3

# Классификация погрешностей



# Классификация погрешностей



# Классификация погрешностей

## По способу выражения

**Абсолютная погрешность** — разница между результатом измерения  $X$  и

истинным (или действительным) значением  $Q$ :

$$\Delta X = X - Q$$

**Относительная погрешность** — отношение абсолютной погрешности измерения к результату измерения величины:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\%$$

# Классификация погрешностей

## По способу выражения

**Приведенная погрешность средства измерений** — относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерений отнесена к условно принятому значению  $X_N$ , постоянному во всем диапазоне измерений или его части:

$$\gamma = \frac{\Delta X}{X_N} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\Delta X}{X_N} \cdot 100\%$$

$X_N$  — **нормирующее значение**. Чаще всего за него принимают верхний предел измерений данного средства измерения. Приведенную погрешность обычно выражают в процентах.

# Классификация погрешностей





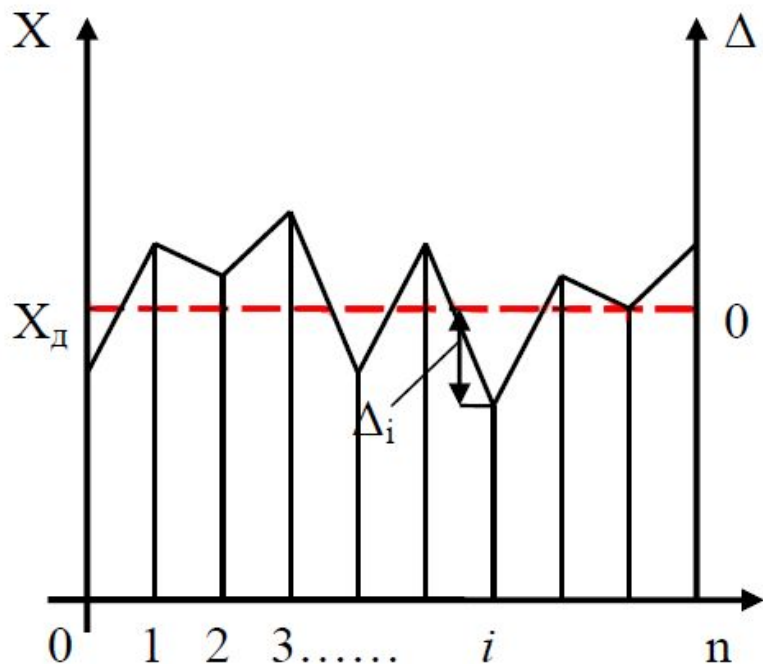
# Классификация погрешностей

## По характеру проявления

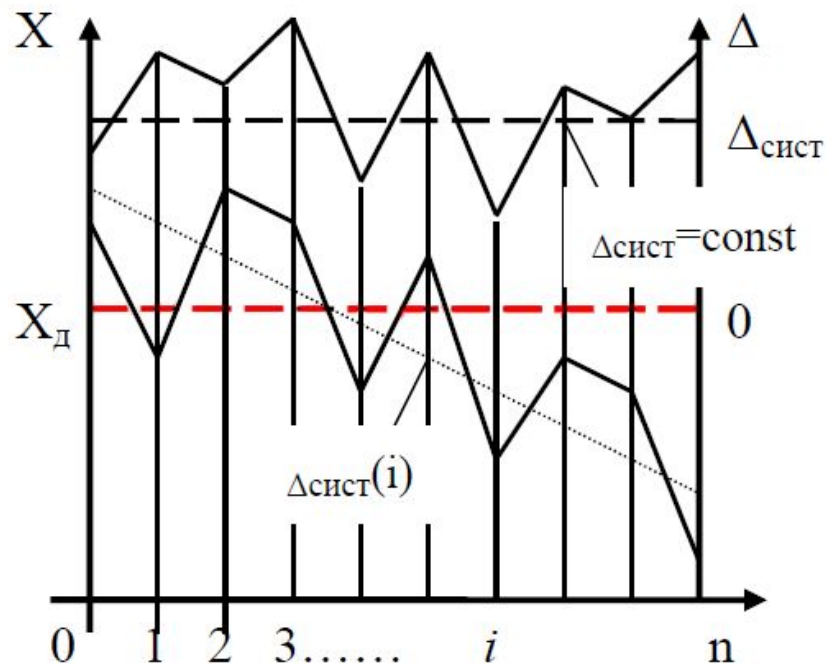
**Случайная погрешность** – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений одного и того же размера физической величины, проведенных с одинаковой тщательностью в одних и тех же условиях.

**Систематическая погрешность** – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

## Классификация погрешностей



Проявление случайной погрешности



Проявление систематической погрешности

(постоянной и перемежающейся)

# Классификация погрешностей

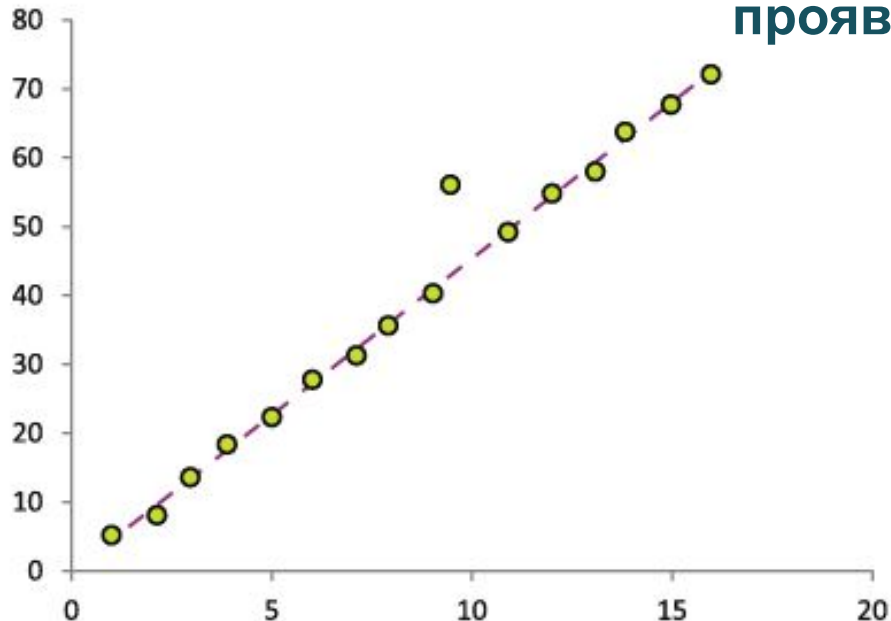
## По характеру проявления

**Прогрессирующая (дрейфовая) погрешность** – это непредсказуемая погрешность, медленно меняющаяся во времени. Изменение во времени прогрессирующих погрешностей собой представляет нестационарный случайный процесс. Прогрессирующие погрешности могут быть скорректированы поправками только в данный момент времени, а далее вновь непредсказуемо изменяются.

**Грубая погрешность (промах)** – это случайная погрешность результата отдельного наблюдения, входящего в ряд измерений; для данных условий она резко отличается от остальных результатов этого ряда.

# Классификация погрешностей

По характеру  
проявления



Расчет сопротивления  
элемента электрической цепи:

$$R_x = \frac{U}{(I - U / R_V)}$$

*Наличие промаха в результатах наблюдений*

## Классификация погрешностей



# Классификация погрешностей

## По характеру проявления

**Инструментальная погрешность измерения (аппаратная)** – погрешность применяемого средства измерения.

**Класс точности** – это обобщенная характеристика средства измерения, выражаемая пределами допускаемых значений его основной погрешности, а также другими характеристиками, влияющими на точность. Класс точности не является непосредственной оценкой точности измерений, выполняемых этим средством измерения, поскольку погрешность зависит еще от ряда факторов.

Например, если термометр относится к классу точности 1, то допустимая погрешность для него составляет 1% от диапазона шкалы.

# Классификация погрешностей

## По характеру

## проявления

***Погрешность метода измерений*** – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений.

Может быть вызвана:

1. Отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойство, которое определяется путем измерения;
2. Влиянием способов применения средств измерений;
3. Влиянием алгоритмов (формул), по которым производятся вычисления результатов измерений;
4. Влиянием других факторов, не связанных со свойствами используемых средств измерений.

# Классификация погрешностей

## По характеру проявления

***Погрешность (измерения) из-за изменения условий измерения*** – составляющая систематической погрешности измерения, являющаяся следствием неучтенного влияния отклонения в одну сторону какого-либо из параметров, характеризующих условия измерений, от установленного значения.

***Субъективная (личная) погрешность измерения*** обусловлена погрешностью отсчета оператором показаний по шкалам средств измерений, диаграммам регистрирующих приборов. Она вызвана состоянием оператора, его положением во время работы, несовершенством органов чувств, эргономическими свойствами средств измерений.



# Классификация погрешностей

По зависимости абсолютной погрешности  
от значений измеряемой величины

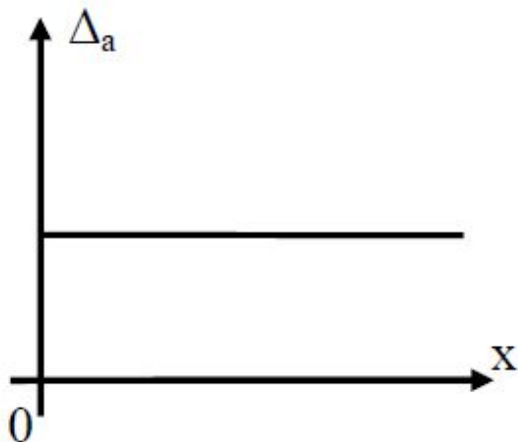
Аддитивн  
ые

Мультипликативн  
ые

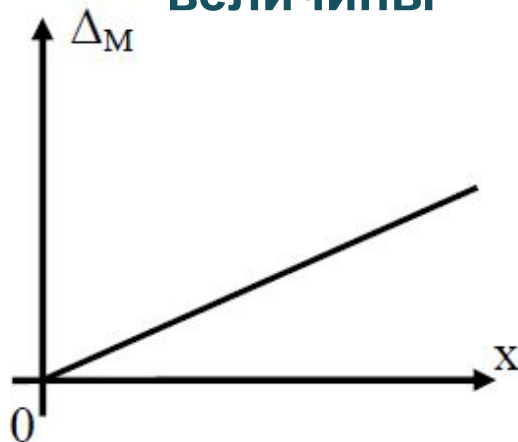
Нелинейн  
ые

## Классификация погрешностей

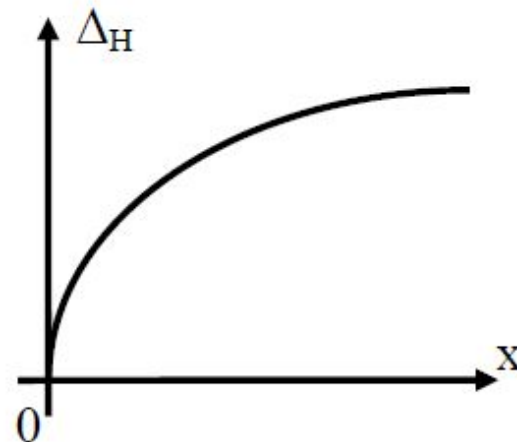
По зависимости абсолютной погрешности от значений измеряемой величины



*Аддитивные погрешности (не зависят от измеряемой величины)*

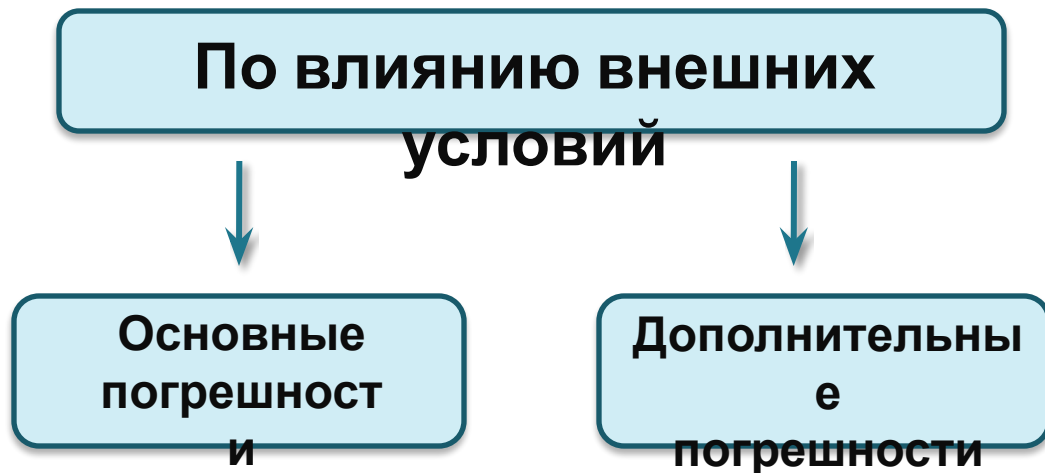


*Мультипликативные погрешности (прямо пропорциональны измеряемой величине)*



*Нелинейные погрешности (зависят от измеряемой величины нелинейно)*

## Классификация погрешностей



# Классификация погрешностей

## По влиянию внешних условий

***Основная погрешность средства измерений*** – погрешность средства измерения, применяемого в нормальных условиях. Для каждого средства оговариваются условия эксплуатации, при которых нормируется его погрешность.

***Дополнительная погрешность средства измерений*** – составляющая погрешности средства измерения, возникающая дополнительно к основной погрешности, вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального ее значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений.

## Классификация погрешностей



## Классификация погрешностей

### В зависимости от влияния характера изменения измеряемых величин

***Статическая погрешность средства измерений*** – погрешность средства измерений, применяемого при измерении физической величины, принимаемой за неизменную.

***Динамическая погрешность средства измерений*** – погрешность средства измерений, возникающая при измерении изменяющейся (в процессе измерений) физической величины.

# Правила представления результатов

**Значащие цифры данного измерения** – все цифры, кроме нуля слева. При этом нули, следующие из множителя  $10^n$  ( $n$  – целое число), не учитываются.

Пример:

0,2396 – 4 значащие цифры, первая цифра – 2;

0,00173 – 3 значащие цифры, первая цифра – 1;

30170 – 5 значащих цифр, первая цифра – 3, последний нуль – также значащая цифра;

$301,7 \cdot 10^2$  – 4 значащие – цифры, первая цифра – 3, последняя – 7;

20000 – 5 значащих цифр, первая цифра – 2, все последующие нули – также значащие цифры;

$20 \cdot 10^3$  – 2 значащие цифры, первая цифра – 2, вторая цифра – 0, нули, следующие из множителя  $10^3$ , не учитывают;

$0,02 \cdot 10^6$  – одна и единственная значащая цифра – 2

# Правила представления результатов

## измерений

Значащие цифры приближенного числа называются **верными**, если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего разряда.

Примеры:

1. Плотность ртути  $13,5975 \text{ г/см}^3$ . Округлим это значение до сотых:  $13,60 \text{ г/см}^3$ .

Абсолютная погрешность округления  $\Delta X = 0,0045 \leq 0,01$ .

2. Получен результат измерения  $(140 \pm 5)$ . Цифра «0» не будет верной, так как абсолютная погрешность больше единицы последнего разряда.



# Правила представления результатов

## Стандарт СФВ СТ 001 543-77 измерений

1. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, а в десятичных дробях отбрасываются.

<i>До округления:</i>	<i>После округления:</i>
3,4824	3,48
285,3	285
22,482	20
19,2400	19,24

# Правила представления результатов

## Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77 измерений

2. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) больше 5, либо 5, и после нее идут другие цифры, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

<i>До округления:</i>	<i>После округления:</i>
6783,6	6784
12,34701	12,35
12,452	12,5
19,98281	20,0

# Правила представления результатов

## Стандарт СЭВ СТ СЭВ измерений

543-77

3. В случае, если первая из отбрасываемых цифр равна 5 и она является крайней справа либо за ней идут нули, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая цифра получилась в результате предыдущего округления в большую сторону, то последняя сохраняемая цифра сохраняется. Если отбрасываемая цифра получилась в результате предыдущего округления в меньшую сторону, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу.

<i>До округления:</i>	<i>Предыдущий этап</i>	<i>После округления:</i>
0,145	-	0,15
0,15	0,149	0,1
0,25	0,252	0,3

# Правила представления результатов

## Стандарт СЭВ СТ СЭВ измерений

543-77

4. При записи результата измерения на первом этапе округляются погрешности измерений. Округление выполняется по следующему правилу: если первая значащая цифра — единица или двойка, то после округления оставляют две значащие цифры. Если же первая значащая цифра — тройка и более, то оставляют одну значащую цифру.

<i>До округления:</i>	<i>После округления:</i>
0,17295	0,17
4,8329	5
0,97283	1,0
0,006298	0,006 или $0,6 \cdot 10^{-2}$ или $6 \cdot 10^{-3}$

# Правила представления результатов

## Стандарт СОВ СТ СЭВ 543-77 измерений

5. Далее округляется само числовое значение ФВ, причем ее количество знаков после запятой должно совпадать с количеством знаков после запятой для погрешности.

<i>До округления:</i>	<i>После округления:</i>
3,4874±0,17295	3,49±0,17
285,396±4,8329	285±5
12,482±0,97283	12,5±1,0
19,98281±0,8138	20,0±0,8

# Правила представления результатов

## Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77 измерений

6. Если при округлении погрешности указан порядок, т.е.  $10^n$ , то такой же порядок должен быть и у самой величины, при этом оба числа заключаются в скобки, и множитель  $10^n$  указывается один раз.

<i>До округления:</i>	<i>После округления:</i>
0,283984±0,006298	0,284±0,006 или $(28,4±0,6)·10^{-2}$ или $(284±6)·10^{-3}$
72903±384,53	72900±400 или $(72,9±0,4)·10^3$ или $(729±4)·10^2$
2374±48	2370±50 или $(2,37±0,05)·10^3$ или $(23,7±0,5)·10^2$

# Правила представления результатов

## Арифметические операции с приближенными числами

### *Возведение в степень и извлечение корня*

При возведении в степень приближенного числа следует сохранить в результате столько десятичных знаков, сколько их у исходного числа.

Пример:  $(3,4 \cdot 10^2)^3 = 39304000 \approx 3,9 \cdot 10^7$

### *Сложение и вычитание*

При сложении и вычитании приближенных чисел сохраняется столько десятичных знаков, сколько их имеет слагаемое с минимальным количеством.

Пример:  $5,14 + 12,1 + 6,353 = 23,593 \approx 26,6$

### *Умножение и деление*

При умножении и делении приближенных чисел сохраняется столько десятичных знаков, сколько имеет приближенное число с минимальным количеством.

Пример:  $1,5 \cdot 35 = 52,5 \approx 52$

## Примеры заданий

1. Число 83,26 найдено с относительной погрешностью 0,3%. Найти абсолютную погрешность округления.



## Примеры заданий

1. Число 83,26 найдено с относительной погрешностью 0,3%. Найти абсолютную погрешность округления.

Относительная погрешность  $\delta = \frac{\Delta X}{X}$

Абсолютная погрешность  $\Delta X = X - Q$

В нашем случае  $\delta = 0,3\%$ ,  $X = 83,26$ , откуда  $\Delta X = (X \cdot \delta) / 100\%$

Получаем  $\Delta X = 0,24978$

## Примеры заданий

2. Найти абсолютные и относительные погрешности числа  $e = 2,71828182\dots$ , заданного двумя и тремя цифрами после запятой.

## Примеры заданий

2. Найти абсолютные и относительные погрешности числа  $e = 2,71828182\dots$ , заданного двумя и тремя цифрами после запятой.

*Две цифры после  
запятой*  
 $X = 2,72$

$$\Delta X = 0,0017118\dots \approx 0,0017$$

$$\delta = \frac{0,0017}{2,72} \cdot 100\% \approx 0,06\%$$

*Три цифры после  
запятой*  
 $X = 2,718$

$$\Delta X = 0,0002818\dots \approx 0,00028$$

$$\delta = \frac{0,00028}{2,718} \cdot 100\% \approx 0,010\%$$

## Примеры заданий

3. Округлить число  $x = 4,45575250$  до шести, пяти и т.д. десятичных знаков и до целого числа.

## Примеры заданий

3. Округлить число  $x = 4,45575250$  до шести, пяти и т.д. десятичных знаков и до целого числа.

$x = 4,45575250$  – исходное число

$x \approx 4,455753$  – правило 3 округления чисел

$x \approx 4,45575$  – правило 1 округления чисел

$x \approx 4,4558$  – правило 3 округления чисел

$x \approx 4,456$  – правило 2 округления чисел

$x \approx 4,46$  – правило 2 округления чисел

$x \approx 4,5$  – правило 2 округления чисел

$x \approx 4$  – правило 3 округления чисел

## Примеры заданий

4. Вычислить верные значащие цифры чисел.

$$X = 0,004507 \text{ при } \Delta = 0,00006$$

$$X = 12,396 \text{ при } \Delta = 0,03.$$

$$X = 0,037862 \text{ при } \Delta = 0,007$$

## Примеры заданий

### 4. Вычислить верные значащие цифры чисел.

$X = 0,004507$  при  $\Delta = 0,00006$ .  $0,00006 < 0,0001$ , следовательно, значащими цифрами будут  $X = \underline{0,004507}$

$X = 12,396$  при  $\Delta = 0,03$ .  $0,03 < 0,1$ , следовательно, значащими цифрами будут  $X = \underline{12,396}$

$X = 0,037862$  при  $\Delta = 0,007$ .  $0,007 < 0,01$ , следовательно, значащими цифрами будут  $X = \underline{0,037862}$

## Примеры заданий

5. Получено значение физической величины  $2,32540874$  с погрешностью  $0,162875$ . Записать результат согласно правилам представления погрешностей.



## Примеры заданий

5. Получено значение физической величины  $2,32540874$  с погрешностью  $0,162875$ . Записать результат согласно правилам представления погрешностей.
- Округляем погрешность до двух значащих цифр:  $0,16$ ;
  - Округляем результат так, чтобы последняя значащая находилась на той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности:  $2,33$ ;
  - Результат:  $2,33 \pm 0,16$

# Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Пусть представляющая интерес величина  $\xi$  является функцией ряда непосредственно измеримых величин  $x, y, z, \dots$

$$\xi = f(x, y, z, \dots)$$

Для абсолютных погрешностей справедливы соотношения:

$$\Delta X \ll |X|, \quad \Delta Y \ll |Y|, \quad \Delta Z \ll |Z|, \dots$$

Примем погрешность за малое приращение измеряемой величины:

$$\Delta X \approx dX, \quad \Delta Y \approx dY, \quad \Delta Z \approx dZ, \dots \quad \Delta \xi \approx d\xi$$

# Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Рассмотрим частные производные функции  $\xi$ :

$$\Delta\xi = \left| \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \Delta X \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \Delta Y \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \Delta Z \right| + \dots$$

Слагаемое  $\Delta\xi_X = \left| \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \Delta X \right|$  соответствует погрешности, которую вносит в погрешность  $\Delta\xi$  неточность измерения величины  $X$ .

# Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Формулы расчета погрешностей для ряда наиболее часто встречающихся функций

(1)

$\xi = f(X, Y)$	$\Delta\xi$	$\delta_\xi = \frac{\Delta\xi}{\xi}$
$X + Y$	$\Delta X + \Delta Y$	$\frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y}$
$X - Y$	$\Delta X + \Delta Y$	$\frac{\Delta X + \Delta Y}{ X - Y }$
$X \cdot Y$	$\Delta X \cdot X + \Delta Y \cdot Y$	$\frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y} = \delta_X + \delta_Y$

# Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Формулы расчета погрешностей для ряда наиболее часто встречающихся функций

$\xi = f(X, Y)$	$\Delta \xi$	$\delta_\xi = \frac{\Delta \xi}{\xi}$
$X / Y$	$\frac{\Delta X \cdot X + \Delta Y \cdot Y}{Y^2}$	$\frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y} = \delta_X + \delta_Y$
$X^n$	$ n  \cdot X^{n-1} \Delta X$	$ n  \cdot \frac{\Delta X}{X} = n \cdot \delta_X$
$\sqrt[n]{X}$	$\left  \frac{1}{n} \right  \cdot X^{\frac{1}{n}-1} \Delta X$	$\left  \frac{1}{n} \right  \cdot \frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{n} \cdot \delta_X$

## Примеры заданий

1. Размеры прямоугольника составляют  $a=3,3\pm 0,1$  см и  $b=5,2\pm 0,1$  см. Найти площадь и периметр прямоугольника

Периметр прямоугольника:  $p = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (3,3 + 5,2) = 17$

Абсолютная погрешность:  $\Delta p = 2 \cdot (\Delta a + \Delta b) = 2 \cdot (0,1 + 0,1) = 0,4$

Относительная погрешность:  $\delta p = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y} = \frac{0,1 + 0,1}{3,3 + 5,2} = 0,0235294117... \approx 0,024$

Ответ: периметр прямоугольника составляет  $17,0\pm 0,4$  см,  $\delta=2,4\%$ .

## Примеры заданий

1. Размеры прямоугольника составляют  $a=3,3\pm 0,1$  см и  $b=5,2\pm 0,1$  см. Найти площадь и периметр прямоугольника

Площадь прямоугольника:  $S = a \cdot b = 3,3 \cdot 5,2 = 17,16$

Относительная погрешность:  $\delta S = \delta_a + \delta_b = \frac{0,1}{3,3} + \frac{0,1}{5,2} = 0,049261 \approx 0,050$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta S = \Delta S \cdot S = 17,16 \cdot 0,050 = 0,858 \approx 0,9$$

Ответ: площадь прямоугольника составляет  $17,2 \pm 0,9$  см<sup>2</sup>,  $\delta = 5\%$ .

## Примеры заданий

2. Дан цилиндр массой  $m=60,01\pm 0,01$  г, диаметром  $d=25,010\pm 0,005$  мм и высотой  $h=30,000\pm 0,005$  мм. Найти плотность цилиндра.

$$\text{Плотность цилиндра: } \rho = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot d^2 \cdot h} = \frac{4 \cdot 60,01}{\pi \cdot (25,01)^2 \cdot 30} = 4073,8 \text{ кг / м}^3$$

Найдем логарифм от выражения плотности цилиндра:

$$\ln \rho = \ln 4 - \ln \pi + \ln m - 2 \ln d - \ln h$$

Возьмем дифференциал:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} = \delta_m + 2\delta_d + \delta_h = \delta_\rho$$



## Примеры заданий

2. Дан цилиндр массой  $m=60,01\pm 0,01$  г, диаметром  $d=25,010\pm 0,005$  мм и высотой  $h=30,000\pm 0,005$  мм. Найти плотность цилиндра.

Относительная погрешность:

$$\delta_{\rho} = \delta_m + 2\delta_d + \delta_h = \frac{0,01}{60,01} + 2\frac{0,005}{25,01} + \frac{0,005}{30} = 0,07\%$$

Абсолютная погрешность:  $\Delta\rho = \delta_{\rho} \cdot \rho = 4073,8 \cdot 0,0007 = 2,9 \text{ кг} / \text{м}^3$

Плотность цилиндра составляет  $4073,8\pm 2,9 \text{ кг} / \text{м}^3$