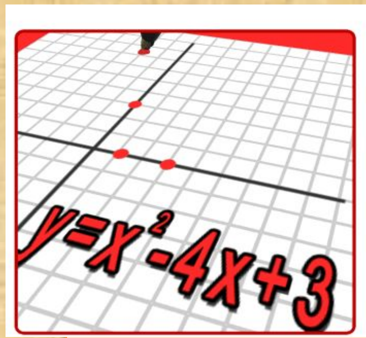
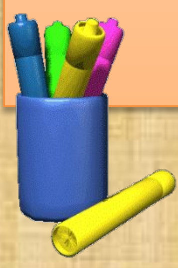


ТЕМА УРОКА

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА



«***Три пути ведут к знанию: путь размышления – это путь самый благородный, путь подражания – это путь самый лёгкий и путь опыта – это путь самый горький***». КОНФУЦИЙ – древнекитайский философ и мыслитель

Цели урока :

- Обобщить и закрепить понятие неопределённого интеграла.
- Повторить основные свойства интеграла.
- Отработать практические навыки вычисления неопределённого интеграла, используя различные приёмы.

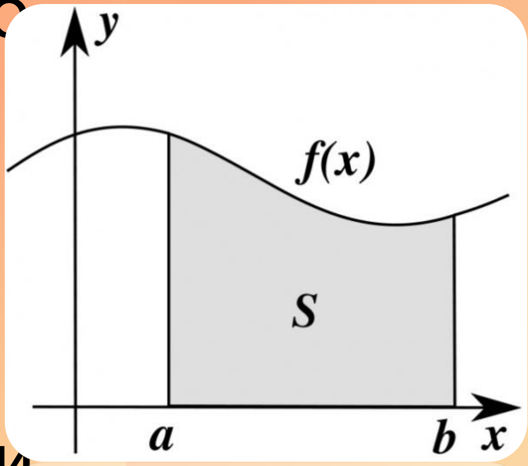
План учебного занятия:

- Организационный этап.
- Из истории неопределённого интеграла.
- Фронтальный опрос по теории.
- Работа по карточкам.
- Математическая эстафета.
- Закрепление умений и навыков. Решение примеров по образцу.
- Применение умений и навыков. Выполнение практической работы.
- Проверка знаний. Самостоятельная работа.
- Домашнее задание.
- Рефлексия деятельности.
- Подведение итогов урока.

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

Определение

Интеграл функции — аналог суммы последовательности. Неформально говоря, (определённый) интеграл является площадью части графика функции (в пределах интегрирования), то есть площадью криволинейной трапеции.

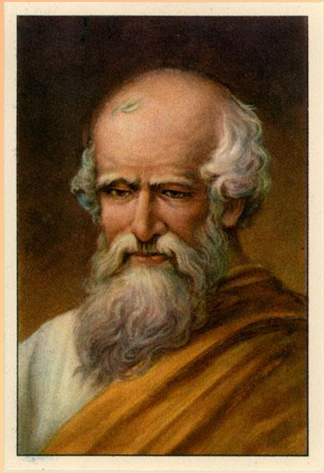


Процесс нахождения интеграла называется ***интегрированием***.

Символ интеграла был введён Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero, которое переводится, как приводить в прежнее состояние, восстанавливать.

Интеграл в древности

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объемов. Ряд задач такого рода был решен математиками древней Греции. Античная математика предвосхитила идеи интегрального исчисления в значительно большей степени, чем дифференциального исчисления. Большую роль при решении таких задач играл исчерпывающий метод, созданный Евдоксом Книдским (ок. 408 - ок. 355 до н. э.) и широко применявшийся Архимедом (ок. 287 - 212 до н. э.).



Интеграл в древности

Однако Архимед не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятий об интеграле, а тем более не создал алгоритма интегрального исчисления. Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX - XV веках изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов в интегральном исчислении они не получили.

Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной. Лишь в XVI и XVII веках развитие естественных наук поставило перед математикой Европы ряд новых задач, в частности задачи на нахождение квадратур (задачи на вычисление площадей фигур), кубатур (задачи на вычисление объемов тел) и определение центров тяжести .

История возникновения интеграла

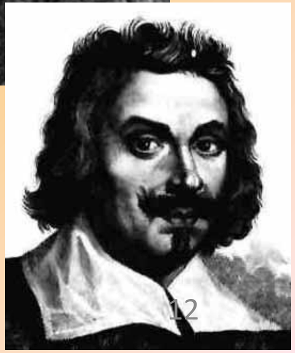
Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов развития интегрального исчисления. Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления.

Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод - метод неделимых, который также зародился в Древней Греции.

История возникновения интеграла

Например, криволинейную трапецию они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длиной f(x) , которым тем не менее приписывали площадь, равную бесконечно малой величине f(x)dx. В соответствии с таким пониманием искомая площадь считалась равной сумме S бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме - нули, но нули особого рода, которые сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.

История возникновения интеграла



На такой кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной основе И. Кеплер (1571 - 1630 гг.) в своих сочинениях "Новая астрономия" (1609 г.) и "Стереометрия винных бочек" (1615 г.) правильно вычислил ряд площадей (например площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (тело резалось на бесконечно тонкие пластинки).

Эти исследования были продолжены итальянскими математиками Б. Кавальери (1598 - 1647 годы) и Э. Торричелли (1608 -1647 годы)

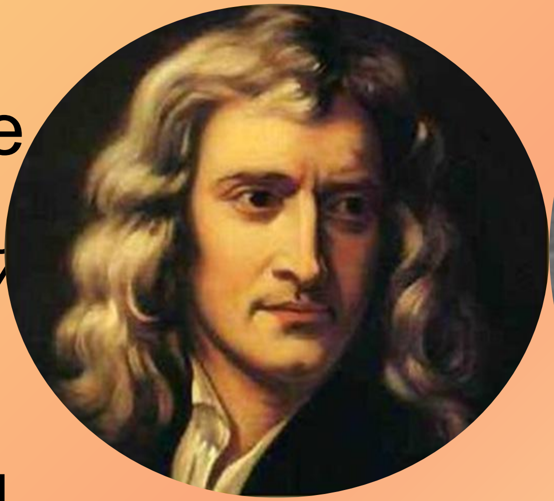
История возникновения интеграла

В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению.

Однако при всей значимости результатов, полученных математиками XVII столетия, исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно точный алгоритм.

История возникновения интеграла

Это сделали Ньютон и Лейбниц, открывшие независимо друг от друга факт, известный вам под названием формулы Ньютона - Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

История возникновения интеграла

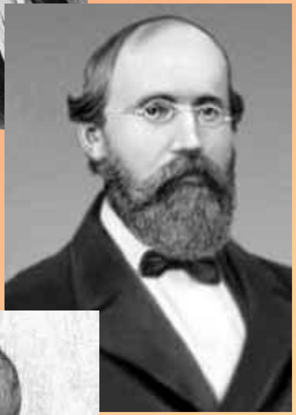
Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление создано.

История возникновения интеграла

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801 - 1862 гг.), В. Я. Буняковский (1804 - 1889 гг.), П. Л. Чебышев (1821 - 1894 гг.). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

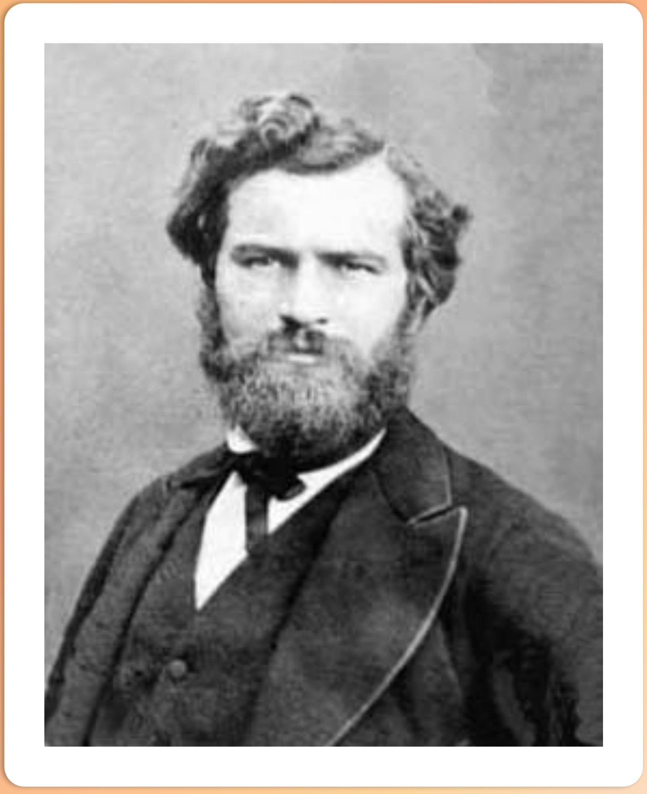
История возникновения интеграла

Строгое изложение теории интеграла появилось только в прошлом веке, Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков, немецкого ученого Б. Римана (1826 - 1866 гг.), французского математика Г. Дарбу (1842 - 1917).

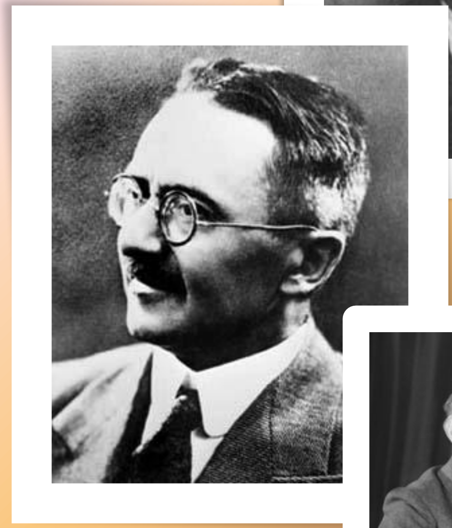




История возникновения интеграла

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1826 - 1922 гг.) теории меры.



История возникновения интеграла



Различные обобщения понятия интеграла уже в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875 - 1941 гг.) и А. Данжуа (1884 - 1974) советским математиком А. Я. Хинчиным (1894 -1959 гг.)

Фронтальный опрос по теории

Вопросы

1. Дать определение неопределённого интеграла.
2. Какие способы вычисления неопределённого интеграла вы знаете?

Вопросы для повторения

Вопросы

3. Что называется интегрированием?

4. Чем отличаются друг от друга различные первообразные для данной функции f(x)?

Вопросы для повторения

Вопросы

5. Какая функция называется первообразной для данной функции f(x)?

Вопросы для повторения

Вопросы

6. Сформулируйте свойства неопределённого интеграла…

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭСТАФЕТА

Инструктаж: Работа в командах (по рядам). На последней парте каждого ряда находится листок с 10 заданиями (по два примера на каждую парту). Первая пара учащихся, выполнив любые два задания, передает листок впереди сидящим. Работа считается оконченной, когда учитель получается листок с правильно выполненными 10 заданиями. Вы можете решить не только свои задания, но и проверить правильность решения членов своей команды. Побеждает та команда, которая правильно и раньше всех решит все задания.

<u>Закрепление практических умений и навыков</u>

Решение типовых примеров по образцу

Примеры табличного интегрирования

- Пример №1
- Пример №2
- Пример №3
- Тренинг

Примеры интегрирования методом подстановки

- Пример №4
- Пример №5
- Пример №6
- Пример №7

Пример №1

$$\int (3x^5 + 4cosx - 2x + 1)dx =$$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5 dx + \int 4cosxdx - \int 2xdx + \int 1dx =$$

$$3\int x^5 dx + 4\int cosxdx - 2\int xdx + 1\int dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int cosxdx = sinx +$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4sinx - \frac{2x^2}{2} + x + C \Rightarrow \frac{1}{2}x^6 + 4sinx - x^2 + x + C$$

Пример №2

$$\int\left(\frac{3}{x^5}-x^4+7e^x-\frac{2}{x}\right)dx$$

Проверить решение

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$$

Записать решение:

$$\int\left(3x^{-5}-x^4+7e^x-\frac{2}{x}\right)dx$$

?

$$3\int x^{-5}dx-\int x^4dx+7\int e^x dx-2\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3x^{-4}}{-4}-\frac{x^5}{5}+7e^x-2\ln x+c$$

$$-\frac{3}{4x^4}-\frac{1}{5}x^5+7e^x-2\ln x+c$$

Пример №3

$$\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}+x^3-3\sqrt{x}\right)dx$$

Проверить решение

$$!\quad \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$$

Записать решение:

$$\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}+x^3-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

?

$$\Downarrow$$

$$4\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int x^3dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\Downarrow$$

$$4tgx+\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$\Downarrow$$

$$4tgx+\frac{1}{4}x^4-2x\sqrt{x}+C$$

Все способы интегрирования имеют целью свести интеграл к табличному.

...ючается в следующем:

...менной такую часть $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

...подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального...

Определим, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл

Определим, какую часть подынтегральной функции нужно заменить и записываем замену

$$u = 4x - 6$$

Находим дифференциалы обеих частей, выражаем старый дифференциал через новый

$$du = 4dx, dx = \frac{1}{4}du$$

Производим замену в интеграле и находим его с помощью таблицы

$$\frac{1}{4}\int u^5 du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{24}u^6 + c$$

Производим обратную замену, то есть переходим к старой переменной

$$\frac{1}{24}(4x-6)^6 + c$$

Пример №5

$$\int sin(6x+2)dx$$

Проверить решение

Записать решение:

Введем новую переменную и выразим дифференциалы:

$$6x+2=u$$

$$du=6dx, \qquad dx=\frac{1}{6}du$$

$$\int sin(6x+2)dx=\int sin\,u\cdot\frac{1}{6}du$$

$$=\frac{1}{6}\int sin\,u\,du=-\frac{1}{6}cosu+c$$

$$-\frac{1}{6}cosu+c=$$

$$-\frac{1}{6}cos(6x+2)+C$$

Пример №6

$$\int \frac{\sqrt{1+lnx}}{x}dx$$

Проверить решение

Записать решение:

Введем новую переменную и найдем её дифференциал

$$1+lnx=u \qquad du=\frac{1}{x}dx=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+lnx}dx}{x}=\int \sqrt{u}du$$

$$\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt[2]{u^3}+C$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[2]{u^3}=\frac{2}{3}u\sqrt{u}=$$

$$\frac{2}{3}(1+lnx)\sqrt{1+lnx}+C$$

Проверить решение

Пример №7

$$\int \sqrt{3-6x}dx$$

Записать решение:

$$u = 3 - 6x$$

Выполняем замену:

$$u = 3 - 6x$$

Выражаем дифференциалы:

$$du = -6dx \quad dx = -\frac{1}{6}du$$

$$-\frac{1}{6}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$-\frac{1}{9}(3-6x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = -\frac{1}{9}\sqrt[2]{(3-6x)^3} + \mathrm{C}$$

$$-\frac{1}{9}(3-6x)\sqrt{3-6x}+\mathrm{C}$$

Проверить решение

Найти неопределенный интеграл

Проверить решение

$$\int (x^5 + 3x - 4)dx$$

$$\int cos(5x - 4)dx$$

$$\int (25x^4 + 3e^x - \frac{4}{x})dx$$

$$\int (3 + 4x)^4 dx$$

$$\int (\frac{2}{cos^2 x} + \sqrt{x} - \frac{3}{x^6})dx$$

$$\int e^{6x-3} dx$$

Следует отметить, что для функции вида *f(kx+b)* можно применять упрощенную формулу

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

$$\int cos(6-2x)\,dx = -\frac{1}{2}sin(6-2x) + C$$

$$\int \frac{1}{5x-4}dx = \frac{1}{5}ln(5x-4) + C$$

$$\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

Решение типичных примеров

- 1. Вычислить интеграл:

$$\int \left(2x^2 - 1\right)^2 dx$$

- 2. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int \sqrt[3]{\left(3x + 1\right)^2}\, dx$$

- 3. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx$$

1 пример

$$\int\left(2x^2-1\right)^2dx=\int\left(4x^4-4x^2+1\right)dx=$$

$$=\int 4x^4dx-\int 4x^2dx+\int dx=$$

$$=\frac{4x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+x+C$$

2 пример

$$\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx = \int t^2 \cdot t^2 dt = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^5}}{5} + C = \frac{(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{5} + C$$

$3x+1 = t^3;$

$x = \frac{1}{3}(t^3 - 1);$ $\quad dx = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt = t^2 dt$ $\quad t = \sqrt[3]{(3x+1)}$

3 пример

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$u = x \qquad dv = e^{-2x} dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Применение практических умений и навыков

«ВЫПОЛНЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ»

<u>ПРОВЕРКА УМЕНИЙ и НАВЫКОВ</u>

Самостоятельная работа по теме: «Вычисление неопределённого интеграла»

<u>КРИТЕРИЙ ОЦЕНОК</u>:

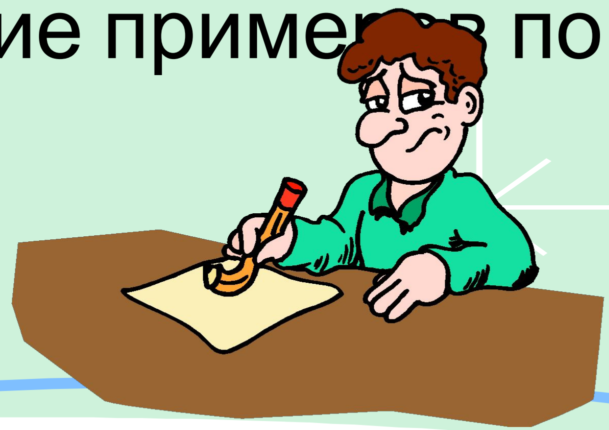
ОЦЕНКА «5» – за правильное решение всех 3-х примеров;

ОЦЕНКА «4» – за правильное решение 2-х примеров;

ОЦЕНКА «3» – за правильное решение 1-го примера.

Информация по домашнему заданию:

1. Повторить основные понятия и свойства по теме «Неопределённый интеграл».
2. Составить кроссворд (ребус) по теме «Неопределённый интеграл».
3. Выполнить решение примеров по карточкам.



Рефлексия

У меня всё получилось!!!

Надо решить ещё пару примеров.

Ну кто придумал эту математику !