Лекция 7

1. Метод Ньютона (метод касательных)
2. Метод хорд
3. Сравнение методов уточнения корней нелинейных уравнений

Суть метода Ньютона

Пусть корень уравнения **f(x)=0** отделен на отрезке **[a;b]**, причем первая и вторая производные **f'(x)** и **f''(x)** непрерывны и знакопостоянны при $x \in [a;b]$.

В этом случае для построения последовательности приближений к корню может быть использован *метод Ньютона*: каждое следующее приближение x_n вычисляется через предыдущее приближение x_{n-1} по формуле:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Таким образом, задавшись начальным приближением x_0 можно получить первое приближение

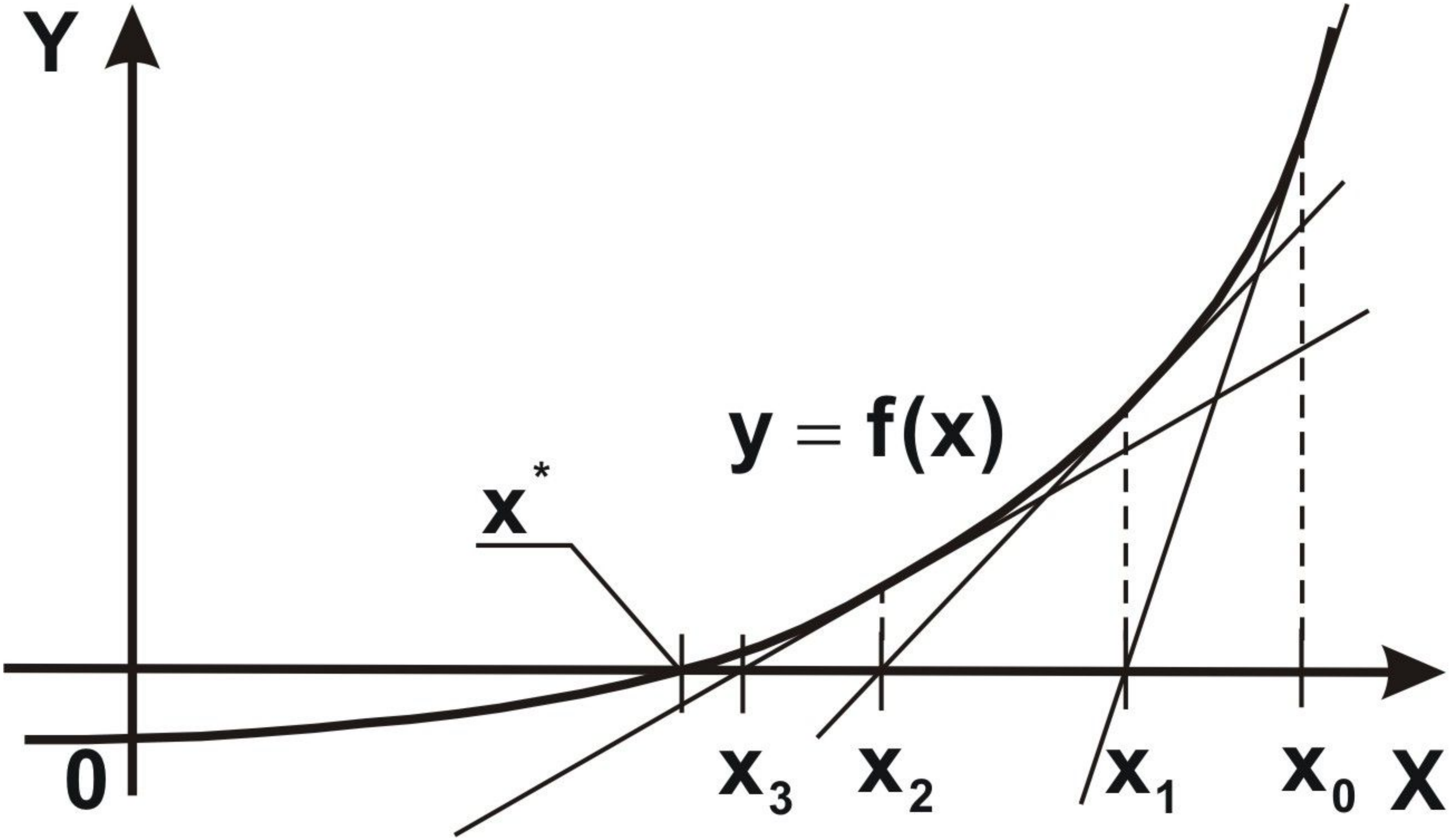
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

затем второе

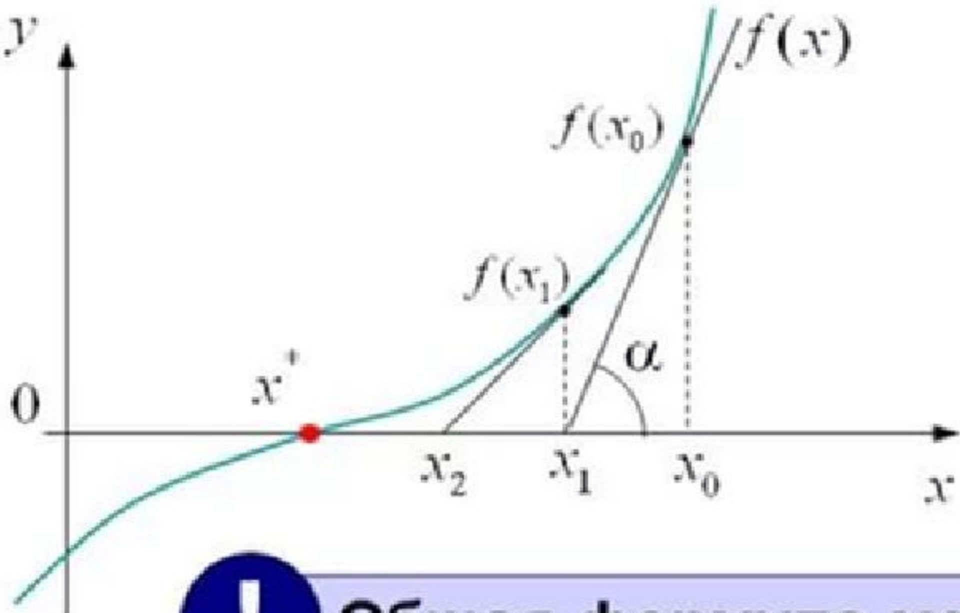
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и так далее до получения приближения, погрешность которого не превышает заданную.

Геометрическая иллюстрация метода Ньютона



Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

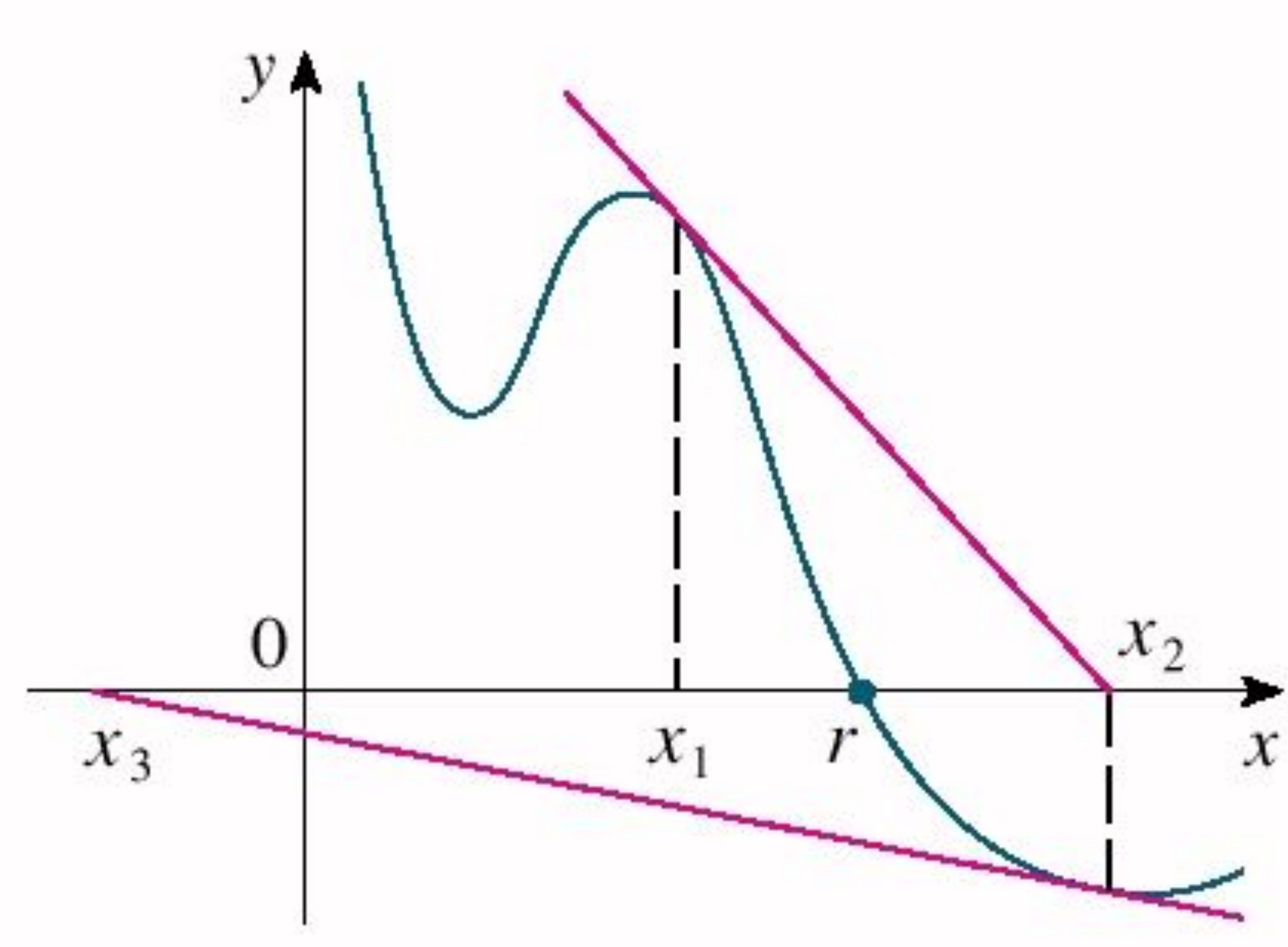
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

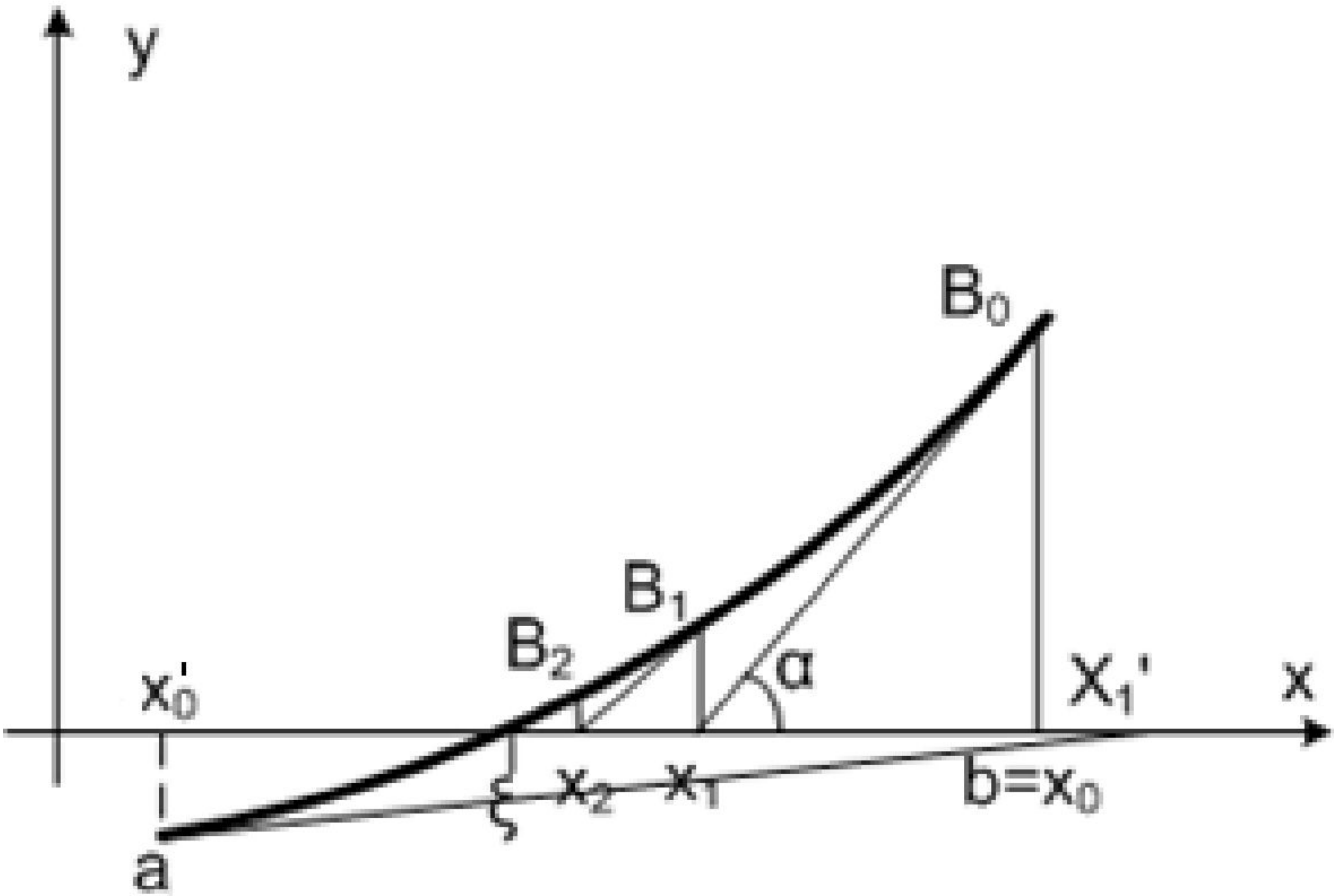
! **Общая формула метода Ньютона**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

f'(x) и f''(x) не знакопостоянны



Выбор начального приближения



Теорема о сходимости метода Ньютона

Пусть корень уравнения $\mathbf{f(x) = 0}$ отделен на отрезке $\mathbf{[a;b]}$ (функция $\mathbf{f(x)}$ непрерывна на $\mathbf{[a;b]}$ и на концах его принимает разные знаки), а производные $\mathbf{f'(x)}$ и $\mathbf{f''(x)}$ отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки на $\mathbf{[a;b]}$. Тогда, если выбрать начальное приближение $\mathbf{x_0 \in [a;b]}$ так, чтобы $\mathbf{f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0}$, то последовательность приближений, определяемая формулой

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

сходится.

Проверка условий сходимости метода Ньютона

Проверим условия сходимости метода Ньютона и выберем начальное приближение для уравнения **$\cos(x) - 3x + 1 = 0$**, корень которого отделен на отрезке **[0;1]** на прошлой лекции.

Первая производная **$f'(x) = -\sin(x) - 3 < 0$** при любых значениях **x**. Вторая производная **$f''(x) = -\cos(x) < 0$** на отрезке **[0;1]**. Следовательно, последовательность приближений по методу Ньютона будет сходящейся при выборе начального приближения так, чтобы **$f(x_0) < 0$**. Это условие выполняется на правом конце отрезка: **$x_0 = 1$**.

Последовательность приближений по методу Ньютона

Получим несколько последовательных приближений по итерационной формуле Ньютона

$$\mathbf{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

из начального приближения $\mathbf{x_0 = 1}$:

$x_1 = x_0 – (\cos(x_0) – 3x_0 + 1)/(-\sin(x_0) – 3) = 1 – (0.54 – 3 + 1)/(-0.84 - 3) = 0.62$
$x_2 = x_1 – (\cos(x_1) – 3x_1 + 1)/(-\sin(x_1) – 3) = 0.62 – (0.814 – 1.86 + 1)/(-0.581 - 3) =$
$=0.607$
$x_3 = x_2 – (\cos(x_2) – 3x_2 + 1)/(-\sin(x_2) – 3)=0.607 – (0.821 – 1.821 + 1)/(-0.57 - 3)=$
$=0.607$

Как видно, процесс последовательных приближений сходится.

Оценка погрешности приближения для метода Ньютона

Можно показать, что погрешность **n–го** приближения

$$|x_n - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$$

где m_1 – наименьшее значение $|f'(x)|$ при $x \in [a;b]$;

M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ при $x \in [a;b]$.

Таким образом, если задана допустимая погрешность приближения к корню ε, то процесс последовательных приближений можно прекратить при выполнении условия:

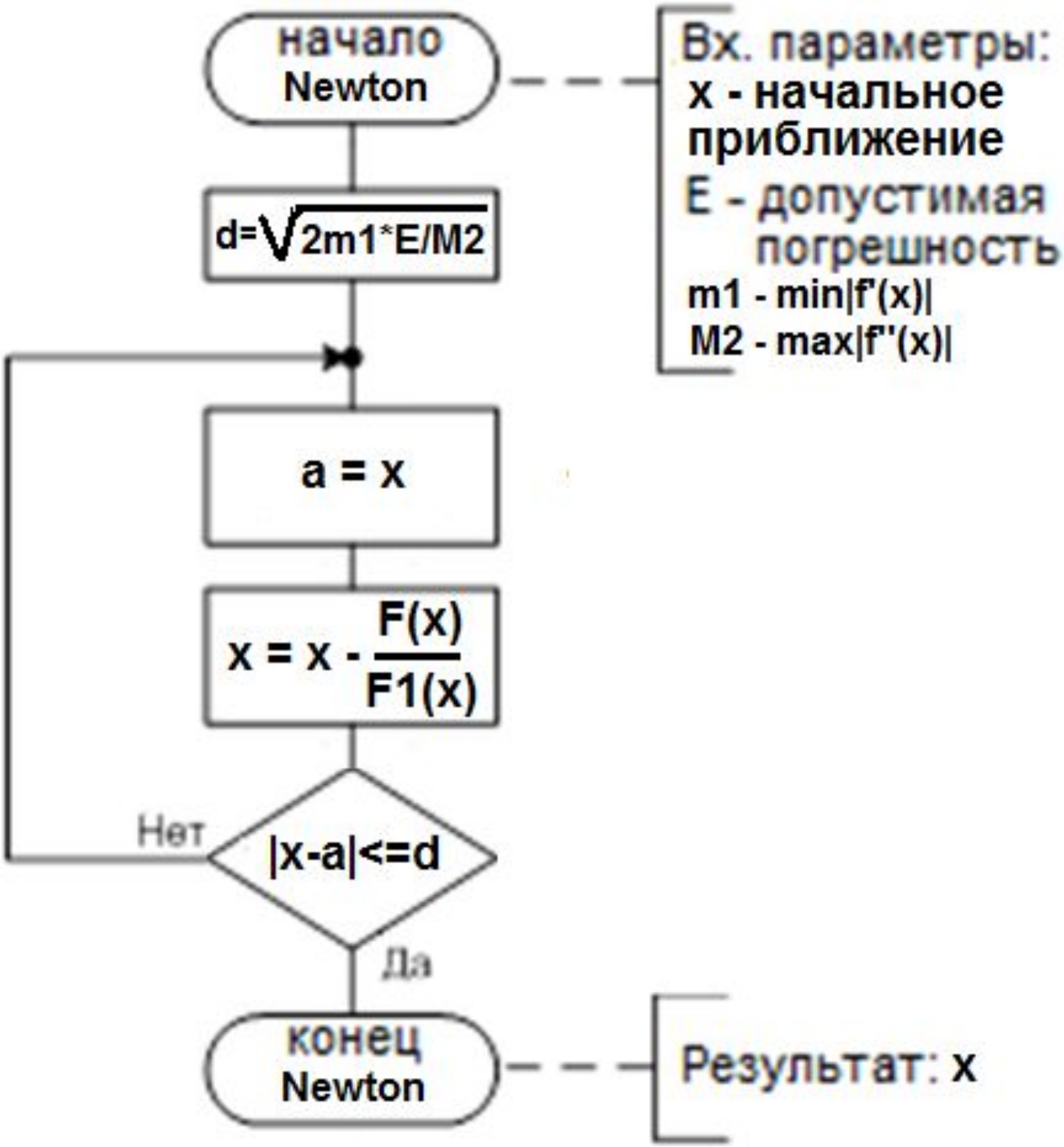
$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$$

Существует и другой, универсальный способ оценки погрешности приближения и соответствующее ему правило останова. Этот способ применим к любому методу уточнения корня, но требует дополнительного вычисления функции в точке очередного приближения:

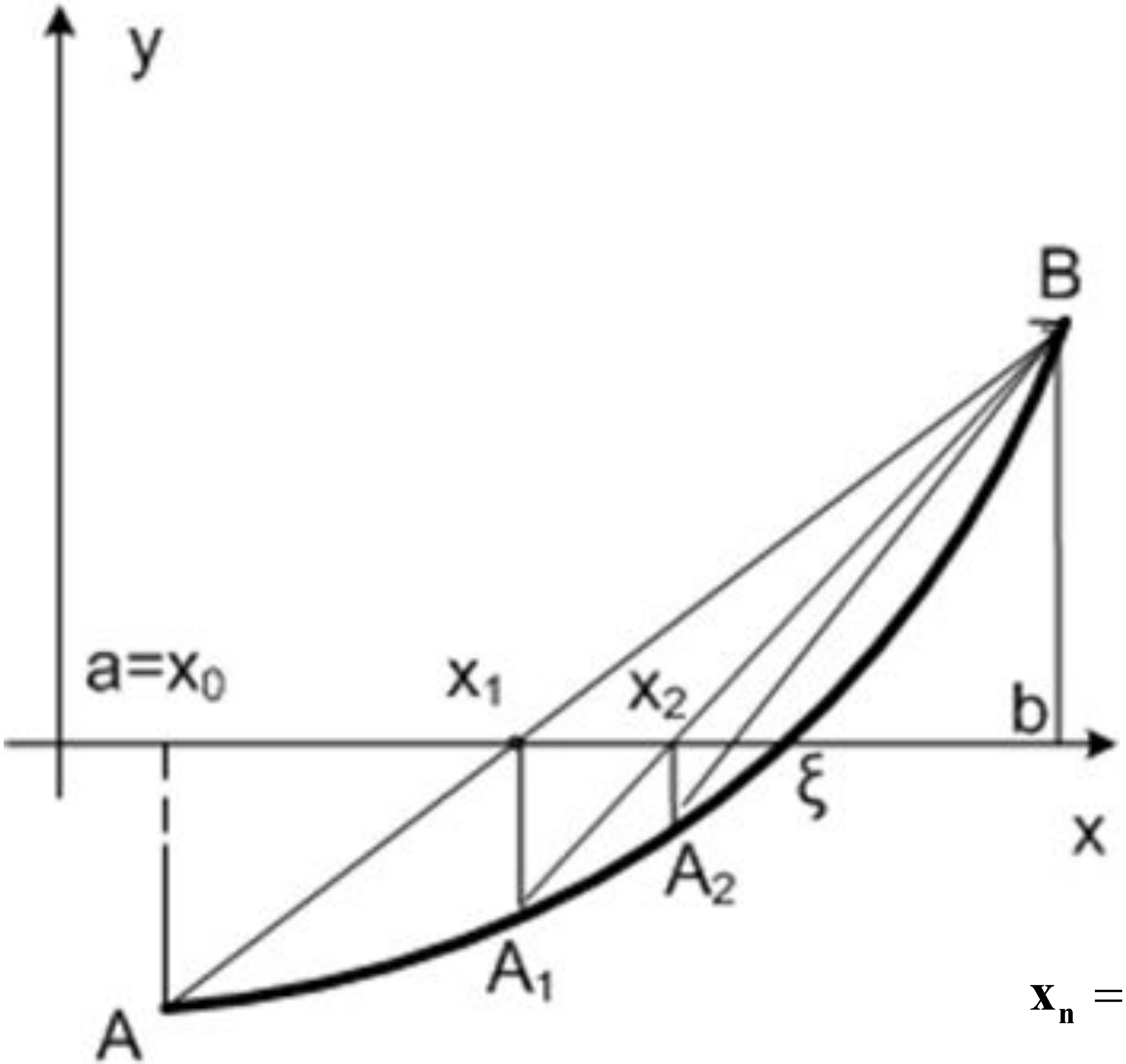
$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \le \varepsilon$$

где m_1 – наименьшее значение $|f'(x)|$ при $x \in [a;b]$.

Схема алгоритма метода Ньютона



Геометрическая иллюстрация метода хорд. Случай **f'(x) > 0 и f''(x) > 0**



$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$a = x_0 \qquad y = 0$$

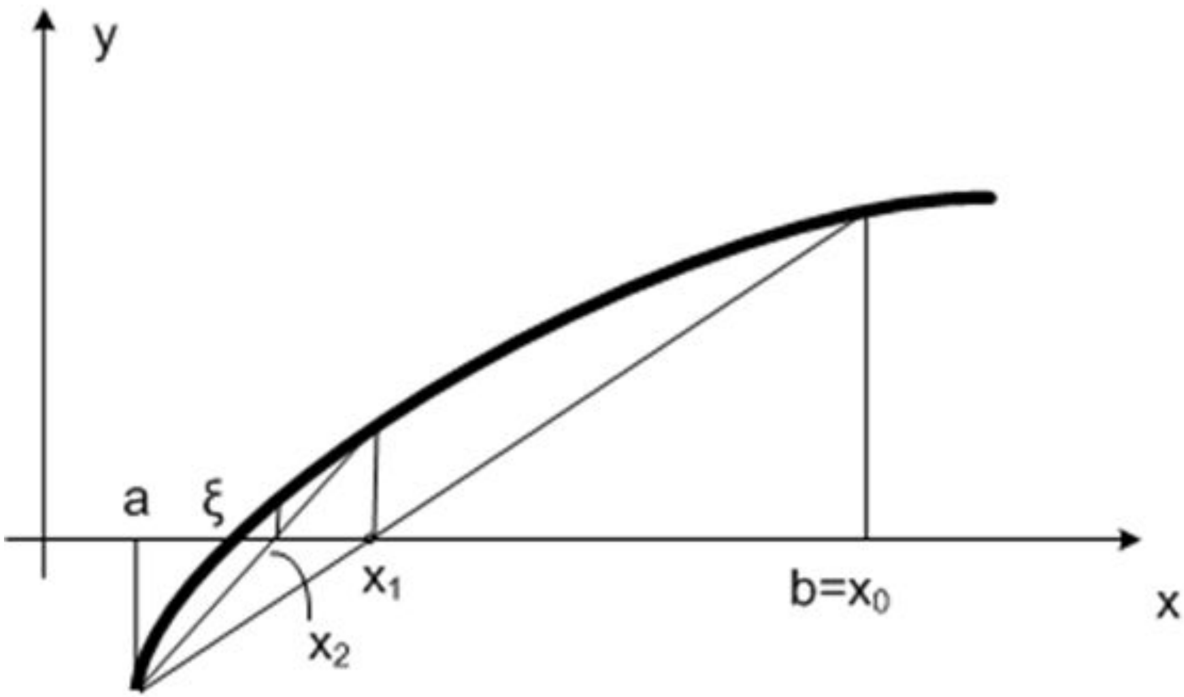
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}\cdot(b-x_0)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}\cdot(b-x_1)$$

………………………………
………………

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}\cdot(b-x_{n-1})$$

Геометрическая иллюстрация метода хорд. Случай **f'(x) > 0** и **f''(x) < 0**



$$\frac{b-x}{b-a} = \frac{f(b)-y}{f(b)-f(a)}$$

$$b = x_0 \qquad y = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0)-f(a)} \cdot (x_0 - a)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(a)} \cdot (x_1 - a)$$

……………………………………

………………

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})-f(a)} \cdot (x_{n-1} - a)$$

Выбор неподвижной точки и начального приближения

Из рассмотренных построений видно, что один из концов отрезка отделения корня в процессе итераций остается неподвижным, а противоположный конец вначале принимается за начальное приближение, а затем постепенно смещается в сторону корня, образуя последовательность приближений. Общее правило таково:

за неподвижную точку в методе хорд выбирается тот конец отрезка [a;b], на котором знак функции совпадает со знаком второй производной: $f(x)\cdot f''(x)>0$; в качестве начального приближения выбирается противоположный конец отрезка.

Последовательность приближений по методу хорд

Получим несколько последовательных приближений методом хорд для уравнения **$\cos(x) - 3x + 1 = 0$**, корень которого отделен на отрезке **[0;1]**. Условия сходимости метода для этого уравнения совпадают с условиями сходимости метода Ньютона и были нами проверены ранее. Так как вторая производная **$f''(x)<0$**, за неподвижную точку принимаем правую границу отрезка **$b=1$**, где **$f(b)=-1.4597<0$**, за начальное приближение – **$x_0=a=0$**, и используем итерационную формулу

$$\mathbf{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot (b - x_{n-1})}$$

В результате получаем:

$$\mathbf{x_1 = x_0 - (\cos(x_0) - 3x_0 + 1)/(-1.4597 - \cos(x_0) - 3x_0 + 1)\cdot(1 - x_0) =}$$
$$\mathbf{= 0 - 2/(-1.4597-2)\cdot 1 = 0.5781}$$
$$\mathbf{x_2 = x_1 - (\cos(x_1) - 3x_1 + 1)/(-1.4597 - \cos(x_1) - 3x_1 + 1)\cdot(1 - x_1) =}$$
$$\mathbf{= 0.5781 - 0.1028/(-1.4597-0.1028)\cdot(1-0.5781) = 0.6059}$$
$$\mathbf{x_3 = x_2 - (\cos(x_2) - 3x_2 + 1)/(-1.4597 - \cos(x_2) - 3x_2 + 1)\cdot(1 - x_2) =}$$
$$\mathbf{= 0.6059 - 0.0043/(-1.4597-0.0043)\cdot(1-0.\ 6059) = 0.6070}$$

Оценка погрешности приближения для метода хорд

Можно показать, что погрешность **n–го** приближения метода хорд

$$|x_n - x^*| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|$$

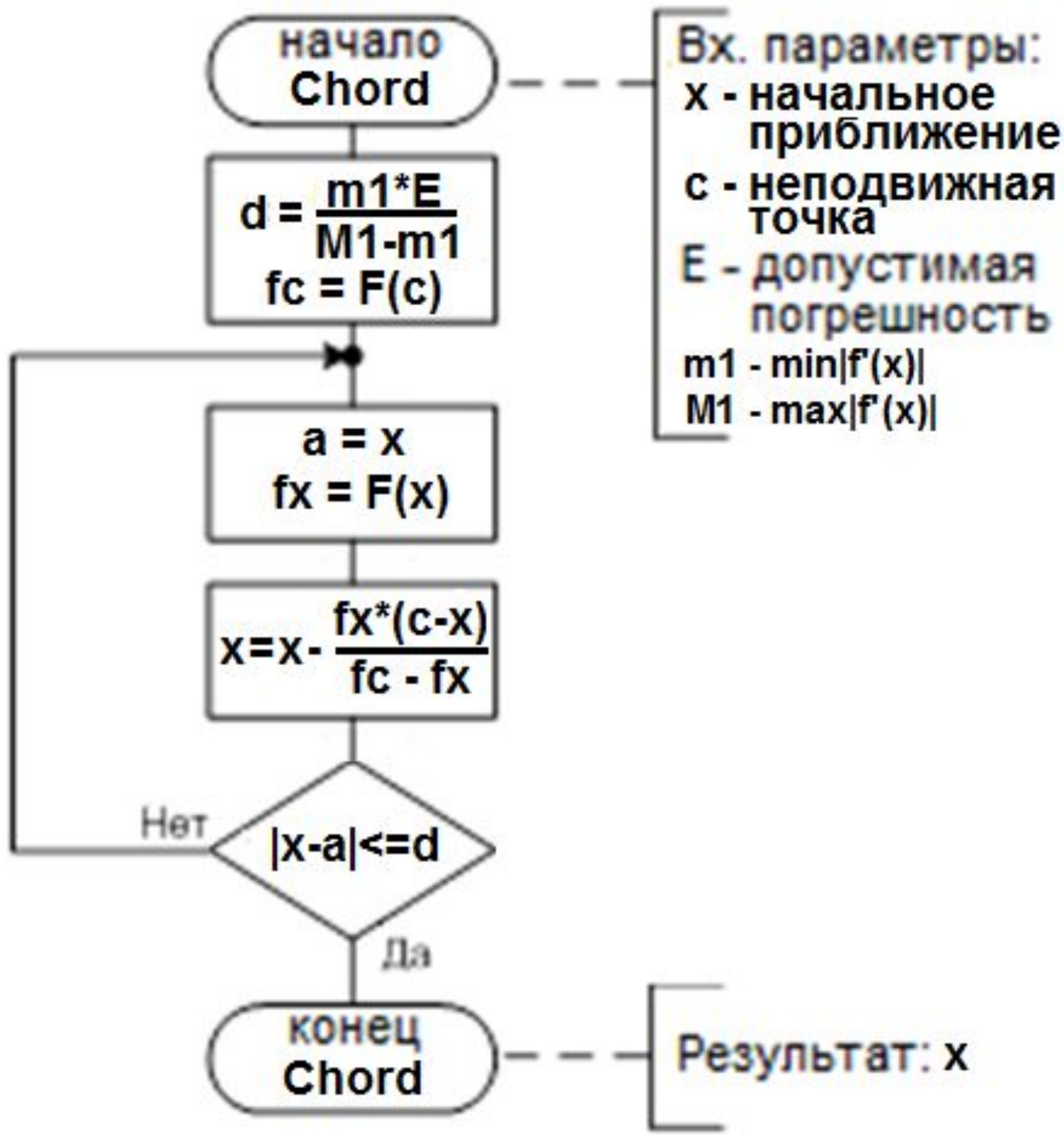
где $\mathbf{m_1}$ – наименьшее значение $|f'(x)|$ при $x \in [a;b]$;

$\mathbf{M_1}$ – наибольшее значение $|f'(x)|$ при $x \in [a;b]$.

Таким образом, если задана допустимая погрешность приближения к корню **ε**, то процесс последовательных приближений можно прекратить при выполнении условия:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{m_1}{M_1 - m_1} \cdot \varepsilon$$

Схема алгоритма метода хорд



Сравнение методов уточнения корней НЛУ

Характеристика	Метод половинного деления	Метод простой итерации	Метод Ньютона	Метод хорд
Требования к 1–й производной	–	+	+	+
Требования к 2–й производной	–	–	+	+
Необходимость проверки сходимости	–	+	+	+
Специальные требования к выбору x_0	–	–	+	+
Скорость сходимости	низкая	высокая при $q<0.5$	очень высокая	высокая
Объем вычислений на каждой итерации	одно значение функции	одно значение функции	значение функции и значение производной	одно значение функции