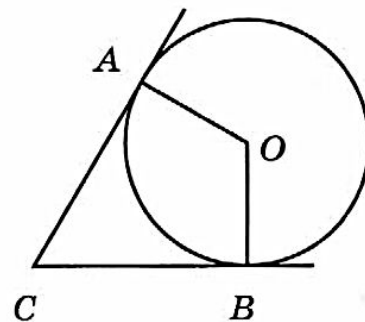




# Задача 17

В угол  $C$  величиной  $72^\circ$  вписана окружность, которая касается сторон угла в точках  $A$  и  $B$ , где  $O$  — центр окружности. Найдите угол  $AOB$ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_

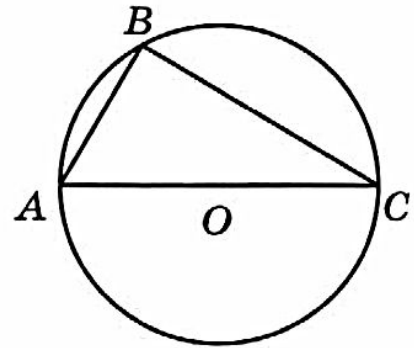




# Задача 17

Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через центр описанной около него окружности. Найдите  $\angle C$ , если  $\angle A = 74^\circ$ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_



$$90 - 74 = 16$$



# Задача 17

Задание <sup>17</sup> ОГЭ по математике представляет собой задачу, связанную с окружностями и их элементами. Приведём основные факты по теме «Окружность и круг»:

- центральный угол окружности измеряется дугой этой окружности, на которую он опирается;
- вписанный угол окружности равен половине центрального угла и измеряется половиной дуги, на которую он опирается;
- вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен  $90^\circ$ ;
- касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания;
- отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;



# Задача 17

- центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме дуг, отсекаемых на окружности вертикальными углами, образованными этими секущими;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися вне окружности, равен полуразности дуг, отсекаемых на окружности углом, образованным этими секущими;
- две окружности не имеют общих точек в том и только том случае, если расстояние между их центрами больше суммы радиусов этих окружностей или меньше разности большего и меньшего радиусов;
- две окружности имеют ровно две общие точки (пересекаются в двух точках) в том и только том случае, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов этих окружностей, но больше разности большего и меньшего радиусов;



# Задача 17

- две окружности имеют ровно одну общую точку (касаются) в том и только том случае, если расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей (внешнее касание) либо равно разности большего и меньшего радиусов этих окружностей (внутреннее касание);
- длина окружности равна  $2\pi r$ , где  $r$  — радиус окружности;
- площадь круга равна  $\pi r^2$ , где  $r$  — радиус круга.

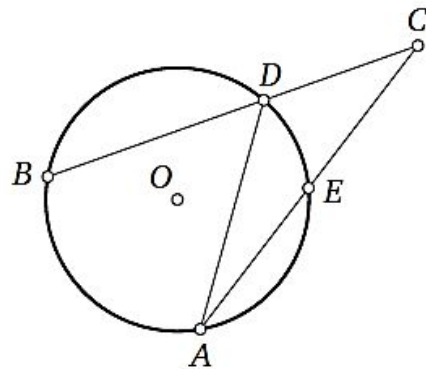


# Задача 17

**Пример 1.** Окружность пересекает стороны угла величиной  $33^\circ$  с вершиной  $C$  в точках  $A$ ,  $E$ ,  $D$  и  $B$ , как показано на рисунке. Найдите угол  $ADB$ , если угол  $EAD$  равен  $22^\circ$ . Ответ дайте в градусах.

**Решение.** Рассмотрим треугольник  $ACD$ . Угол  $ADB$  является для него внешним при вершине  $D$ , значит, он равен сумме двух других углов треугольника, не смежных с ним:

$$\angle ADB = \angle C + \angle EAD = 33^\circ + 22^\circ = 55^\circ.$$

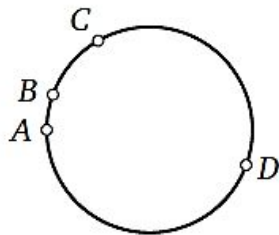


ОТВЕТ. 55.



# Задача 17

**Пример 2.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , последовательно расположенные на окружности в указанном порядке, делят её на четыре дуги, градусные меры которых относятся как  $1 : 2 : 7 : 8$  (дуга  $AB$  наименьшая). Найдите градусную меру дуги  $BD$ , содержащей точку  $C$ .



**Решение.** Обозначим градусную меру дуги  $AB$  через  $x$ . Тогда градусные меры дуг  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  равны соответственно  $2x$ ,  $7x$  и  $8x$ . В сумме эти четыре дуги составляют окружность. Поэтому

$$x + 2x + 7x + 8x = 18x = 360^\circ,$$

откуда  $x = 20^\circ$ . Тогда  $\cup BD = 2x + 7x = 9x = 180^\circ$ .

**ОТВЕТ.** 180.



# Задача 17

Пример 3. Длина окружности равна  $6\sqrt{\pi}$ . Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Решение. Обозначим радиус окружности через  $r$ . Длина окружности равна  $2\pi r = 6\sqrt{\pi}$ , откуда  $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ . Площадь круга радиуса  $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$  равна  $\pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 9$ .

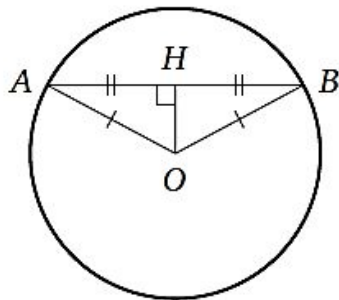
Ответ. 9.





# Задача 17

**Пример 4.** Расстояние от центра окружности до хорды длиной 30 равно 8. Найдите радиус окружности.



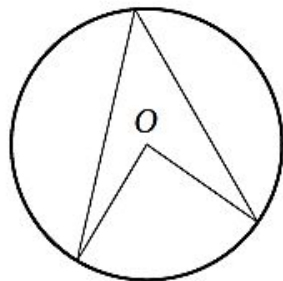
**Решение.** Пусть  $AB$  — данная хорда окружности с центром  $O$ . Тогда  $OA = OB = R$ . Поскольку треугольник  $OAB$  равнобедренный, его высота  $OH$  (которая является также медианой и биссектрисой) и будет расстоянием от центра окружности до хорды. Значит,  $OH = 8$ ,  $AH = 15$ , а искомый радиус  $OA$  находится по теореме Пифагора для треугольника  $OHA$  и будет равен  $\sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$ .

Ответ. 17.



# Задача 17

Пример 5. Центральный угол на  $43^\circ$  больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности.



а) Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

б) Найдите центральный угол. Ответ дайте в градусах.

Решение. Обозначим градусную меру вписанного угла через  $x$ , тогда градусная мера центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и вписанный угол, будет равна  $2x$ . По условию  $2x = x + 43$ , откуда  $x = 43$ , а  $2x = 86$ .

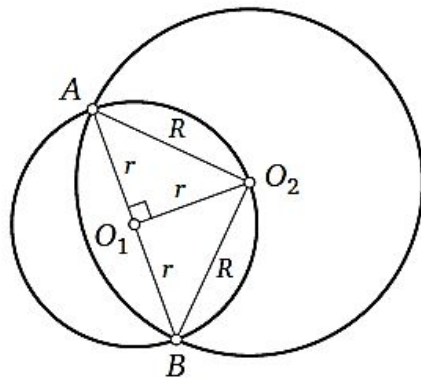
Ответ. а) 43; б) 86.



# Задача 17

Пример 6. Окружность с центром  $O_1$  и радиусом  $\sqrt{8}$  проходит через центр  $O_2$  второй окружности и пересекает эту окружность в точках  $A$  и  $B$ . Найдите радиус второй окружности, если известно, что точка  $O_1$  лежит на отрезке  $AB$ .

Решение. Несмотря на достаточно длинное условие, задача является довольно простой. Обозначим радиус первой окружности через  $r$ , радиус второй окружности через  $R$  и рассмотрим равнобедренный треугольник  $AO_2B$  с боковыми сторонами  $AO_2 = O_2B = R$ . Из условия следует, что  $O_1A = O_1B = O_1O_2 = r$ , откуда  $R = r\sqrt{2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$ .



ОТВЕТ. 4.



# Задача 17

Приведём основные факты, связанные с окружностью, вписанной в треугольник:

- в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну;
- центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его биссектрис;
- радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен одной трети его биссектрисы (напомним, что она же является медианой и высотой равностороннего треугольника);
- площадь  $S$  треугольника равна произведению полупериметра  $p$  этого треугольника на радиус  $r$  вписанной окружности этого треугольника:  $S = pr$ .



# Задача 17

Пример 7. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, одна из медиан которого равна 15.

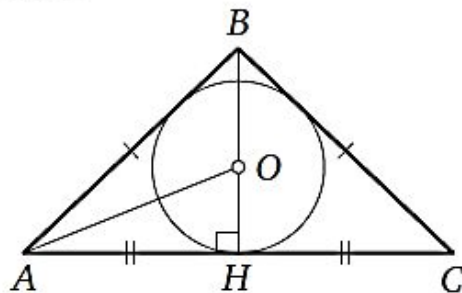
Решение. В равностороннем треугольнике все медианы равны и являются также биссектрисами и высотами. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен трети его биссектрисы и в данном случае равен 5.

Ответ. 5.



# Задача 17

**Пример 8.** Расстояние от вершины  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  до центра  $O$  вписанной в него окружности равно 29, а длина основания  $AC$  треугольника равна 42. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.



**Решение.** Пусть  $BH$  — медиана, высота и биссектриса данного равнобедренного треугольника. Тогда  $O \in BH$ ,  $AO = 29$ ,  $AH = 21$  и искомый радиус  $OH$  можно найти по теореме Пифагора для треугольника  $AOH$ .

Получим  $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ .

**Ответ.** 20.



# Задача 17

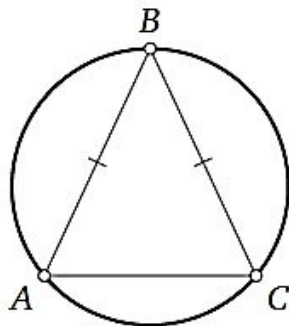
Напомним основные факты, связанные с окружностью, описанной около треугольника:

- около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну;
- центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;
- радиус описанной окружности равностороннего треугольника равен двум третям его высоты (напомним, что она же является медианой и биссектрисой равностороннего треугольника);
- центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус окружности равен половине гипотенузы;
- площадь  $S$  треугольника может быть найдена по формуле  $S = \frac{abc}{4R}$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника,  $R$  — радиус описанной окружности треугольника.



# Задача 17

**Пример 9.** Найдите угол при вершине  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ , если сторона  $AB$  треугольника стягивает дугу описанной около него окружности, равную  $130^\circ$ .



**Решение.** По условию стороны  $AB$  и  $BC$  равны, значит, они стягивают равные дуги. Но тогда градусная величина дуги  $AC$ , не содержащей точки  $B$ , будет равна

$$360^\circ - 2 \cdot 130^\circ = 100^\circ.$$

Вписанный угол  $ABC$  равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен  $50^\circ$ .

**Ответ.** 50.





# Задача 17

-----  
**Пример 10.** Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 9 и 40.

**Решение.** Поскольку центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус  $R$  окружности равен половине гипотенузы, для решения задачи достаточно с помощью теоремы Пифагора найти длину гипотенузы и поделить её на 2. Получим

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + 40^2} = \frac{1}{2} \cdot 41 = 20,5.$$

**Ответ.** 20,5.

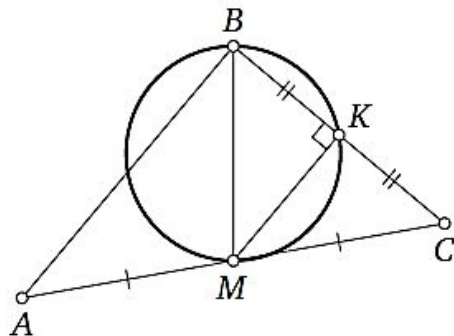


# Задача 17

**Пример 11.** Медиана  $BM$  треугольника  $ABC$  является диаметром окружности, пересекающей сторону  $BC$  в её середине. Длина стороны  $AC$  равна 7. Найдите радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Пусть  $K$  — середина  $BC$ . Тогда угол  $BKM$  прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Значит,  $MK$  является медианой и высотой треугольника  $BMC$ . Поэтому треугольник  $BMC$  равнобедренный. Следовательно,  $MB = MC = MA$ , и точка  $M$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , радиус которой равен

$$MC = 0,5AC = 3,5.$$



Ответ. 3,5.



# Задача 17

Напомним основные факты, связанные с окружностью, вписанной в четырёхугольник:

- в четырёхугольник можно вписать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных сторон равны;
- центром вписанной окружности четырёхугольника является точка пересечения биссектрис его углов;
- в параллелограмм можно вписать окружность, только если он является ромбом;
- в любой ромб (а значит, и в квадрат) можно вписать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей ромба;
- радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата;
- если в трапецию можно вписать окружность, то диаметр этой окружности равен высоте трапеции;
- площадь  $S$  четырёхугольника, в который можно вписать окружность (описанного четырёхугольника), равна произведению полупериметра  $p$  этого четырёхугольника на радиус  $r$  вписанной окружности этого четырёхугольника:

$$S = pr.$$



# Задача 17

**Пример 12.** Найдите периметр трапеции, в которую вписана окружность, если средняя линия трапеции равна 33.

**Решение.** По свойству описанного четырёхугольника сумма оснований данной трапеции равна сумме её боковых сторон. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, значит, сумма оснований равна 66, как и сумма боковых сторон. Следовательно, периметр трапеции равен

$$66 + 66 = 132.$$

**Ответ.** 132.



# Задача 17

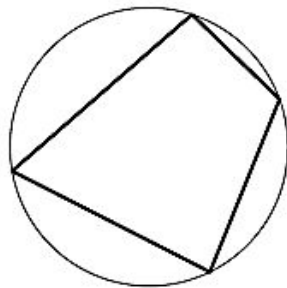
Укажем теперь основные факты, связанные с окружностью, описанной около четырёхугольника:

- около четырёхугольника можно описать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных углов равны (т. е. каждая из этих сумм равна  $180^\circ$ );
- центром описанной окружности четырёхугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;
- около параллелограмма можно описать окружность, только если он является прямоугольником;
- около любого прямоугольника (а значит, и квадрата) можно описать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей прямоугольника, а её радиус равен половине диагонали прямоугольника;
- около трапеции можно описать окружность в том и только том случае, если она равнобедренная.



# Задача 17

**Пример 13.** Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны  $67^\circ$  и  $89^\circ$ . Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



**Решение.** Поскольку сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна  $180^\circ$ , меньший из двух других его углов равен  $180^\circ - 89^\circ = 91^\circ$ .

**Ответ.** 91.