Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»

Математическая логика и теория алгоритмов

Предикаты и формулы. Интерпретации. Истинность и выполнимость формул. Нормальные формы.

Лекция № 3-4

Ст.преподаватель Беккер И.А.

Могилев 2013

Группа АСОИР-111

Логика предикатов

Алгебра логики, рассматривая простые высказывания как целые, неделимые, без учета их внутренней структуры, оказывается недостаточной в анализе многих рассуждений.

Есть необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является **логика предикатов,** содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.

Логика предикатов расчленяет элементарное высказывание на **субъект** (буквально — подлежащее, хотя оно и может играть роль дополнения) и **предикат** (буквально - сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект — это то, о чем что-то утверждается в высказывании; предикат - это то, что утверждается о субъекте (его свойство; отношение к другому субъекту; действие).

Математика – точная наука.

Субъект *Предикат*

В логике предикатов, как и в логике высказываний, высказывания также имеют значением или «Истину» или «Ложь». Разница в том, что в логике предикатов истинностное значение предиката ставится как функция <u>в соответствие </u>определенному предмету или группе предметов!

Пример

Рассмотрим высказывание **«x - простое число».**

При одних значениях x (3; 29) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (9; 12; 28) эта форма дает ложные высказывания.

Исходное высказывание определяет функцию одной переменной **x**, **определенной на множестве N,** и принимающую значения из множества {1; 0}.

Здесь предикат выражает свойство субъекта и является функцией субъекта.

Понятие предиката

Определение. **Одноместным предикатом P(x)** называется произвольная функция переменного **x**, определенная на множестве M и **принимающая значения из множества {1; 0}.**

Множество M, на котором определен предикат P(x) , называется областью определения предиката.

Определение. Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «ИСТИНА», называется множеством истинности предиката P(x), то есть множество истинности предиката P(x) - это множество $\mathbf{I_p} = \{x \mid x \in M, P(x) = 1\}$.

Так, предикат **P(x) = «x - простое число»** **определен на множестве N,** а его множество $\mathbf{I_p}$ - есть множество всех простых чисел.

Матрица предикатов

Предикат P(x)="x- простое число" можно задать таблицей, которую называют матрицей предиката или таблицей истинности предиката.

Предикат называется **тождественно истинным,** если его множество истинности совпадает с множеством определения X, и **тождественно-ложным,** если его множество истинности пусто.

Предикат **выполнимый,** если в области определения для одних значений истина, а для других ложь.

Формально предикатом называется функция, аргументами которой могут быть ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ из некоторого множества, а значения функции "истина" или "ложь".

Предикат будем рассматривать как расширение понятия высказывания.

Пример.

Вместо трех высказываний

"Маша любит кашу"

"Даша любит кашу"

"Саша любит кашу"

можно написать один предикат - "Икс любит кашу" и договориться, что вместо неизвестного Икс могут быть либо Маша, либо Даша, либо Саша.

Подстановка вместо Икс имени конкретного ребенка превращает предикат в обычное высказывание.

Рассмотрим еще примеры предикатов:

1. Предикат **Q(x) = « sin x = 0 »** **определен на множестве R,** а **его множество истинности Iq= {x | x = пk; k∈ Z}.**

2. Предикат **F(x) - «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны»** **определен на множестве всех параллелограммов,** а **его множеством истинности является множество всех ромбов.**

3. **P(x): «x2 + 1> 0, x∈ R»;** **области определения предиката M= R** и **область истинности – тоже R**. Таким образом, **для данного предиката M = I_p** . Такие предикаты называются **тождественно истинными.**

4. **B(x): «x^2 + 1< 0, x∈ R»;** **область истинности Ip =∅.** Такие предикаты называются **тождественно ложными.**

ЭТО ОДНОМЕСТНЫЕ ПРЕДИКАТЫ (в них 1 субъект)!

Многоместные предикаты

Введем понятие **многоместного предиката,** с помощью которого **выражаются отношения между предметами.**

Примером отношения между двумя предметами является отношение «меньше» («больше»). Пусть отношение **«x < y»** введено на множестве Z целых чисел, где $x, y \in Z$, то есть является функцией двух переменных **P(x, y),** определенной на множестве Z x Z с множеством значений {1; 0}.

Определение. **Двухместным предикатом P(x, y)** называется функция двух переменных **x** и **y** (субъекты предиката), определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ ($x \in M_1$, $y \in M_2$) и принимающая значения из множества {1; 0}.

Найдем значения предиката «x < y» , где $x, y \in Z$ для пар (2; 1), (4; 4) и (3; 7).

P(2; 1) = 0; P(4; 4)=0; P(3; 7)=1.

Областью истинности P_i этого предиката является множество всех <u>пар</u> целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

N–местным предикатом $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ называется логическая функция от n переменных, определенная на множестве $M = M_1 x M_2 x \ldots x M_n$ и принимающая значения из множества {1; 0}.

С каждым предикатом связано число, которое называется местностью или арностью предиката (количество переменных).

Для предикатов справедливы и имеют тот же смысл ранее рассмотренные **логические операции.**

Например:

1. "ЕСЛИ Маша любит кашу, ТО Саша любит кашу".

2. P(x) – x делится на 2; Q(x) – x делится на 3;

P(x)&Q(x) – x делится на 2 и 3, т. е. определен предикат делимости на 6.

3. S(x,y) – x равно y. $S(x,y) \& S(y,z) \rightarrow S(x,z)$

Но есть и две новые операции, специфические. Они называются операциями НАВЕШИВАНИЯ КВАНТОРОВ (операции связывания кванторами).

Эти операции соответствуют фразам "для всех" - квантор общности и "некоторые" - квантор существования. Квантор общности произошел от английского All и обозначается буквой A, перевернутой вверх ногами - $\forall$.

Квантор существования произошел от английского Exist и обозначается буквой E, которую вверх ногами переворачивать бесполезно, поэтому ее повернули кругом - $\exists$.

Квантор общности $\forall$

$\forall x P(x)$ - высказывание истинно для каждого $x \in M$, т. е. это высказывание не зависит от x.

Квантор существования $\exists$

$\exists x P(x)$ - высказывание истинно, если существует $x \in M$, для которого это высказывание истинно.

Для конечных множеств операции навешивания кванторов можно выразить через операции ^ и $\vee$:

Если $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ – конечное множество, то можно считать, что

$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_m)$, $\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_m)$

Кванторы можно навешивать также на переменные многоместных предикатов, на одну переменную, несколько или сразу на все.

Переменная X, на которую навешен квантор, называется связанной, в противном случае – свободной.

Рассмотрим, например, предикат

$$\exists x \forall y P(x, y, z, t)$$

Здесь *x, y* – связанные переменные, *z, t* – свободные переменные.

Значение предиката не зависит от связанных переменных, а определяется только значениями свободных переменных.

Это означает во-первых, что навешивание квантора на одну переменную уменьшает на 1 местность исходного предиката.

Так, предикат $\exists x \forall y P(x, y, z, t)$ является двуместным.

Во-вторых, предикат не изменится, если связанные переменные поменять на другие (отличные от свободных). Например

$$\exists x \forall y P(x, y, z, t) \equiv \exists u \forall v P(u, v, z, t)$$

Наш предикат из примера после навешивания каждого из кванторов также превращается в высказывание, которое может быть истинно или ложно!

"ВСЕ любят кашу"

"НЕКОТОРЫЕ любят кашу"

Это, кстати, был (до навешивания кванторов) одноместный предикат (функция 1 переменной).

Но ведь предикаты могут быть не только одноместные.

"Икс любит игрека" - двухместный предикат.

"ВСЕ любят игрека" - одноместный предикат.

"ВСЕ любят кофе" - нульместный предикат, то есть высказывание, не зависящее от переменной.

Подстановка константы вместо предметной переменной

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *n*-местный предикат на множестве *M*, и пусть $a \in M$. Подставим вместо (например) ***x_n*** ***константу a***.

Получим (*n*-1)-местный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, a)$

Можно сразу подставить одну и ту же или разные константы вместо нескольких переменных. Тогда соответствующим образом уменьшится местность предиката.

Интересно посмотреть, как ведут себя кванторы в присутствии операции отрицания.

Возьмем отрицание предиката "ВСЕ любят кашу":

"НЕ ВЕРНО, что ВСЕ любят кашу".

Это равносильно (по закону Де Моргана: отрицание высказывания «А и В» эквивалентно высказыванию «не-А или не-В», т.е. $\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$) заявлению: "НЕКОТОРЫЕ НЕ любят кашу".

То есть отрицание "задвинули" за квантор, в результате чего квантор сменился на противоположный.

Равносильные формулы логики предикатов

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}.$$

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x).$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)).$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x).$$

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y).$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y).$$

Равносильные формулы логики предикатов

$$\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$$

В последних четырех тождествах предикат Q, вообще говоря, может иметь предметные переменные, но отличные от x

$$\forall x(P(x) \vee Q) \equiv \forall x P(x) \vee Q$$

$$\exists x(P(x) \vee Q) \equiv \exists x P(x) \vee Q$$

$$\forall x(P(x) \wedge Q) \equiv \forall x P(x) \wedge Q$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q) \equiv \exists x P(x) \wedge Q$$

А теперь сделаем одно из самых важных заявлений: ИЗ ФОРМАЛИЗОВАННЫХ ЯЗЫКОВ МАТЕМАТИКИ ЯЗЫК ПРЕДИКАТОВ – САМЫЙ БЛИЗКИЙ К ЕСТЕСТВЕННОМУ.

Поэтому работы по искусственному интеллекту тяготеют к использованию этого языка. В сравнении с естественным это очень (во многих смыслах) ограниченный язык. Но лучшего за 100 лет не придумано.

В хорошо формализованных системах даже наоборот - дополнительно ограничивают этот язык для удобной реализации на компьютерах. Примером тому язык (логического) программирования ПРОЛОГ - ПРОграммирование на ЛОГике.

На языке предикатов можно описать далеко не все, хотя и многое. Но даже в этом ограниченном пространстве подчас приходится применять хитрости и уловки, вот их "классические примеры".

Если мы желаем сказать на языке предикатов "Все студенты умники", то рекомендуется конструкция

"ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо: ЕСЛИ икс студент, ТО икс умник«.

Но если хотим сказать "Некоторые студенты умники", то это следует записать так:

"ДЛЯ НЕКОТОРЫХ иксов справедливо: икс студент И икс умник«.

И еще высказывание "Собакам и кошкам вход воспрещен".

Что имеется в виду под союзом «и»?

вариант 1

"ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо: ЕСЛИ икс - собака И икс - кошка, ТО иксу вход запрещен".

Ясно что таких иксов (и таких игреков), которые бы были одновременно собакой и кошкой не существует! Поэтому

вариант 2

"ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо: ЕСЛИ икс - собака ИЛИ икс - кошка, ТО иксу вход запрещен"

Формула логики предикатов, в которой из операций логики высказываний имеются только конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, причем отрицание относится только к элементарным предикатам, называется приведенной формой предиката.

Теорема. Для всякого предиката существует равносильная ему приведенная нормальная форма.

Доказательство. Действительно, все операции в данной предикатной формуле можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (например, в виде ДНФ). Если после этого некоторые отрицания будут относиться к частям формулы, содержащим кванторы, то отрицания можно “снять” с кванторов согласно равносильностям 1 и 2, а “снять” отрицания с конъюнкций и дизъюнкций можно, следуя законам де Моргана. После всех описанных преобразований предикат, очевидно, будет представлен в приведенной форме.

Предикатная формула вида $K_1 x_1 \, K_2 x_2 \ldots K_m x_m \, F$

где K_i – кванторы,

x_i – различные связанные переменные,

F – предикатная формула без кванторов, находящаяся в приведенной форме,

называется предваренной нормальной формой предиката.

Теорема. Для всякого предиката существует равносильная ему предваренная нормальная форма.

Формулы

A(x, y); B(x) - элементарные формулы.

Если A, B – предикатные формулы, то формулами являются также выражения ¬A, A → B, ∀yA.

Предикаты могут быть выражены с помощью так называемых предикатных формул.

Внимание! Формула будет предикатом, когда все переменные определены на некотором множестве, и определены все предикаты, входящие в формулу.

С помощью предикатов можно записывать различные математические утверждения.

Рассмотрим, как можно записать утверждение:

Числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Математическая запись:

Запишем данное утверждение с помощью кванторов и обозначим его A:

$$A = \forall\varepsilon\exists N\forall n\left(\varepsilon > 0 \to \left(n > N \to \left|x_n - a\right| < \varepsilon\right)\right)$$