

---

# Случайные сигналы в линейных системах



Будак Владимир Павлович,  
Московский энергетический институт (ТУ)  
кафедра светотехники

---

☐: +7 (095) 763-5239

[BudakVP@mpei.ru](mailto:BudakVP@mpei.ru)



# Корреляционная теория

Рассматривать процесс как элемент некоторого функционального пространства, в котором введена мера что позволяет в средне-квадратичном смысле ввести все понятия анализа:

$$\|\xi(t)\| = \sqrt{\mathbf{M}(\xi(t))^2}$$

1. непрерывность случайной функции  $\lim_{t \rightarrow s} \|\xi(t) - \xi(s)\| = 0 : \lim_{t \rightarrow s} \mathbf{M}(\xi(t) - \xi(s))^2 = 0$

2. дифференцируемость случайной функции

$$\lim_{t \rightarrow s} \left\| \frac{\xi(t) - \xi(s)}{t - s} - \xi'(t) \right\| = 0$$

Важнейшую роль в функциональных пространствах играет скалярное произведение:

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = (\xi(t_1), \xi(t_2)) = \mathbf{M}\xi(t_1)\xi^*(t_2) = \int x_1 x_2^* P_2(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 \quad \text{второй смешанный момент}$$

$$\Psi_{\xi}(t_1, t_2) = \mathbf{M}(\xi(t_1) - \mathbf{M}\xi(t_1))(\xi^*(t_2) - \mathbf{M}\xi^*(t_2)) = B_{\xi}(t_1, t_2) - \mathbf{M}\xi(t_1)\mathbf{M}\xi^*(t_2)$$

*корреляционная функция*

*Далее увидим, что вторые моменты обладают замкнутостью для линейных систем – корреляционная теория*

# Эргодичность

Эргодическая гипотеза – аналог закона больших чисел для случайных функций – *соответствие между средними по ансамблю реализаций средним по реализации*

$$\mathbf{M}\xi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \xi(t') dt', \quad B_\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \xi(t') \xi^*(t' + \tau) dt'$$

- Boltzmann – связь классической механики и статистической механики
- Для любой системы эргодичность означает, что с течением времени система в фазовом пространстве пройдет через любую точку
- Если в системе не заданы граничные условия, то она занимает фазовый объем, который с течением времени заполнит все фазовое пространство
- Синай доказал, что система из двух упругих шаров является перемешивающейся

*Еще более усложняется эргодичность для нелинейных систем*



# Стационарность и однородность

---

Стационарный (для полей однородный) в **узком** смысле:

$$(\forall n): \left( P_n(t_1 + \tau, x_1; t_2 + \tau, x_2; \dots; t_n + \tau, x_n) = P_n(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) \right):$$

$$P_1(t_1 + \tau, x_1) = P_1(t_1, x_1) \equiv P_1(x_1)$$

$$P_2(t_1 + \tau, x_1; t_2 + \tau, x_2) = P_2(t_1, x_1; t_2, x_2) \equiv P_2(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$

$$\mathbf{M}\xi(t) = \mathbf{M}\xi, \quad \mathbf{D}\xi(t) = \mathbf{D}\xi, \quad \psi_\xi(t_1, t_2) = \psi_\xi(t_2 - t_1) \equiv \psi_\xi(\tau)$$

Стационарный (для полей однородный) в **широком** смысле:

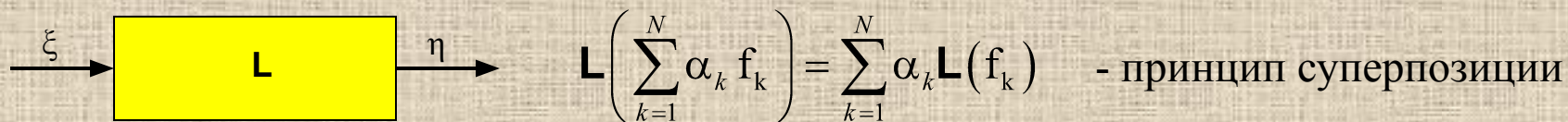
$$(\forall n \leq 2): \left( P_n(t_1 + \tau, x_1; t_2 + \tau, x_2; \dots; t_n + \tau, x_n) = P_n(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) \right):$$

$$\mathbf{M}\xi(t) = \mathbf{M}\xi, \quad \mathbf{D}\xi(t) = \mathbf{D}\xi, \quad \psi_\xi(t_1, t_2) = \psi_\xi(\tau), \quad \mathbf{D}\xi = \psi_\xi(0)$$

---

*Закон больших чисел является мостиком, соединяющим математическую теорию с физическим содержанием*

# Математическое ожидание и дисперсия случайных сигналов в линейных системах



$$\eta = \text{L}(\xi) \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}\eta = \mathbf{M}\text{L}(\xi) \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}\xi = \int_{\mathbf{X}} x P_{\xi}(dx) \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}\eta = \text{L}(\mathbf{M}\xi)$$

- Все явления имеют случайный характер и мы устанавливаем соотношения для средних

$$\mathbf{D}\eta = \langle \eta \eta^* \rangle = \langle \text{L}(\xi) \text{L}^*(\xi^*) \rangle \quad - \text{оператор } \mathbf{L} \text{ сам с собою не коммутирует}$$

*Дисперсия на выходе в линейных системах не выражается через дисперсию на входе*

# Корреляционная функция

$$\Psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle (\xi(\mathbf{r}_1) - \langle \xi(\mathbf{r}_1) \rangle) (\xi^*(\mathbf{r}_2) - \langle \xi^*(\mathbf{r}_2) \rangle) \rangle = \langle \xi(\mathbf{r}_1) \xi^*(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle \xi(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \xi^*(\mathbf{r}_2) \rangle$$

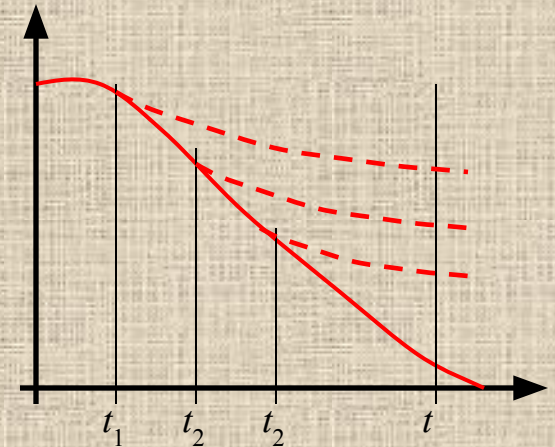
$\langle \xi(\mathbf{r}_1) \rangle = 0$ ,  $\tilde{\xi}(\mathbf{r}_1) = \xi(\mathbf{r}_1) - \langle \xi(\mathbf{r}_1) \rangle$ :  $\Psi_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1) \tilde{\xi}^*(\mathbf{r}_2) \rangle$  - флуктуации случайной величины

$$\Psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \mathbf{L}_1 \xi(\mathbf{r}'_1) \mathbf{L}_2^* \xi^*(\mathbf{r}'_2) \rangle = \langle \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^* \xi(\mathbf{r}'_1) \xi^*(\mathbf{r}'_2) \rangle = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^* \langle \xi(\mathbf{r}'_1) \xi^*(\mathbf{r}'_2) \rangle = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^* \Psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)$$

$$\Psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \iint \Psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) h(\mathbf{r}'_1 \rightarrow \mathbf{r}_1) h^*(\mathbf{r}'_2 \rightarrow \mathbf{r}_2) d^2 r'_1 d^2 r'_2$$

$$\Psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \iint \Psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) h(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) h^*(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) d^2 r'_1 d^2 r'_2$$

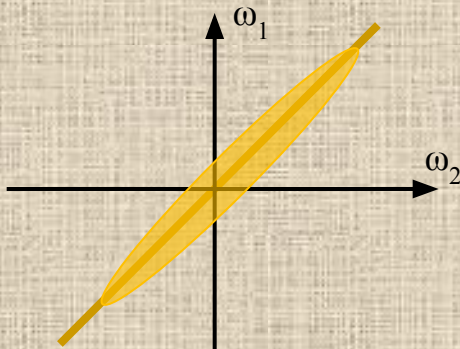
$$\mathbf{D}\eta = \Psi_{\eta\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \iint \Psi_{\xi\xi}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) h(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}) h^*(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}) d^2 r'_1 d^2 r'_2$$



*Для линейных систем корреляционная теория замкнута*

# Спектр случайного процесса

$$\eta(t) = \int C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \psi_{\eta\eta}(t_1, t_2) &= \langle \eta(t_1) \eta^*(t_2) \rangle = \left\langle \int C(\omega_1) e^{i\omega_1 t_1} d\omega_1 \int C^*(\omega_2) e^{-i\omega_2 t_2} d\omega_2 \right\rangle \\ &= \int \langle C(\omega_1) C^*(\omega_2) \rangle e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$



- Если  $\langle C(\omega_1) C^*(\omega_2) \rangle \neq 0$  при  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то области различных частот скоррелированы друг с другом
- Вклад в интеграл билинейной величины дают все частоты

$$\langle |\eta(t)|^2 \rangle = \psi_{\eta\eta}(t, t) = \int \langle C(\omega_1) C^*(\omega_2) \rangle e^{it(\omega_1 - \omega_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

*Энергетический спектр случайного процесса в общем случае не локализован*



# Спектр стационарного процесса

Пусть имеется стационарный процесс:  $\psi_{\eta\eta}(t_1, t_2) = \psi_{\eta\eta}(t_1 - t_2)$

$$\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{\eta\eta}(t_1 - t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

Перейдем к новым переменным:  $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ ,  $\tau = t_1 - t_2$

$$t_1 = T + \frac{\tau}{2}, \quad t_2 = T - \frac{\tau}{2} : \quad \frac{D(t_1, t_2)}{D(T, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial T} & \frac{\partial t_2}{\partial T} \\ \frac{\partial t_1}{\partial \tau} & \frac{\partial t_2}{\partial \tau} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{\eta\eta}(\tau) \exp \left\{ -i(\omega_1 - \omega_2)T - i\frac{\tau}{2}(\omega_1 + \omega_2) \right\} d\tau dT$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega = \omega_1 - \omega_2 : \quad \langle C(\omega_1)C^*(\omega_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{\eta\eta}(\tau) \exp \{ -i\omega T - i\tau\Omega \} d\tau dT$$

$$\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \exp \{ -i\omega T \} dT \int \psi_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\tau\Omega} d\tau = \int \psi_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\tau\Omega} d\tau \delta(\omega_1 - \omega_2)$$

*Спектр стационарного процесса локализуется на диагонали*



# Спектральная плотность случайного процесса – спектр Wiener-Хинчина

$$S(\omega) = \int \psi_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\tau\omega} d\tau: \langle C(\omega_1)C^*(\omega_2) \rangle = S(\Omega) \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Big|_{\omega_1 = \omega_2 = \omega} = \omega$$

$$D\eta = \psi_{\eta\eta}(0) = \int S(\omega) d\omega \quad - \text{спектр локализован вдоль диагонали}$$

$$\text{Для случайных полей: } \psi(\mathbf{\rho}) = \int S(\mathbf{v}) e^{i2\pi\mathbf{\rho}\mathbf{v}} d^2\mathbf{v}, \quad S(\mathbf{v}) = \int \psi(\mathbf{\rho}) e^{-i2\pi\mathbf{\rho}\mathbf{v}} d^2\mathbf{\rho}, \quad \mathbf{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

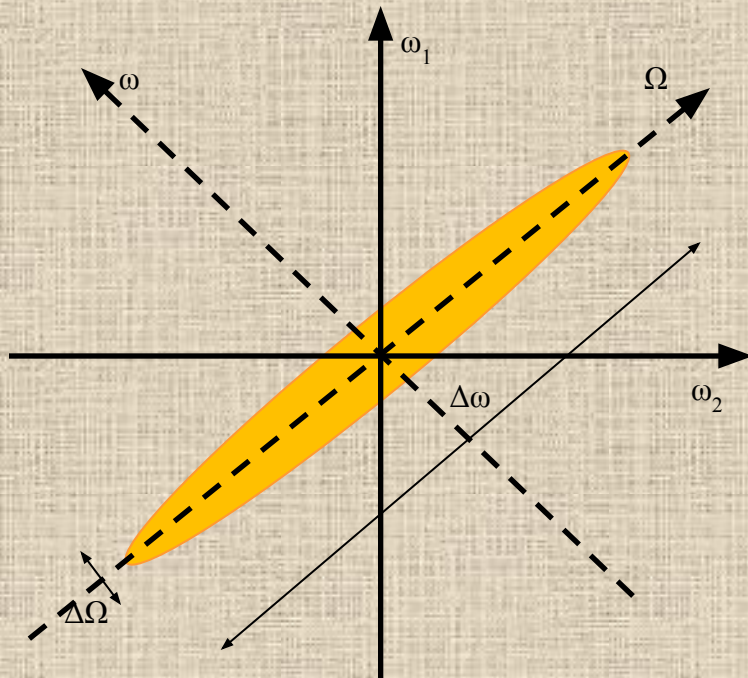
$$\psi_{\eta}(\mathbf{\rho}) = \int \psi_{\xi}(\mathbf{\rho}') h\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}')\right) h^*\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}')\right) d^2\rho' d^2R$$

$$S_{\eta}(\mathbf{v}) = S_{\xi}(\mathbf{v}) H(\mathbf{v}) H^*(\mathbf{v})$$

*Спектральная теория в линейных систем имеет смысл только для стационарных (однородных) функций*

# Квазиоднородные поля

- Любое реальное поле неоднородно уже хотя бы в силу своей ограниченности
- Существуют поля с достаточной для практики точностью близкие к однородным



$$\langle C(\omega_1)C^*(\omega_2) \rangle = \int \psi(T, \tau) \exp\{-i(\Omega T + \omega \tau)\} dT d\tau$$

$$\Delta \Omega \boxtimes \Delta \omega: \left| \frac{\partial \psi}{\partial T} \right| \boxtimes \left| \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|$$

$$S(T, \omega) = \int \Psi(T, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

*Спектр Wigner – похож на обычный, но может быть и отрицательный*