

Белорусский государственный университет транспорта
кафедра «ЛОКОМОТИВЫ»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

*Лектор: д.т.н., профессор Сосновский Леонид Адамович
к.т.н., доцент Комиссаров Виктор Владимирович*

п.з.: ассистент Таранова Елена Сергеевна

Лекции – 18 часов

Практические занятия – 12 часов

Форма контроля знаний – зачет

*(по всем вопросам обращаться на кафедру ауд. 1403,
а также в лабораторию ауд. 1415а)*

ГОМЕЛЬ, 2017



Основная:

1. **Сосновский, Л.А.** Элементы теории вероятностей, математической статистики и теории надёжности / Л.А. Сосновский. – Гомель; БелГУТ, 1994. – 146 с. (в НТБ БелГУТа).
2. **Шевченко Д.Н.** Основы теории надежности : учеб.-методич. пособие для студ. техн. спец./ Д. Н. Шевченко; под ред. Л.А. Сосновского. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 250 с. (в НТБ БелГУТа)
3. **Богданович А.В.** Оценка основных показателей надежности и риска невозстанавливаемых изделий / А.В. Богданович, О.М. Еловой, Л.А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 1995 г. – 95 с. (в НТБ БелГУТа)

Дополнительная:

- **Сосновский, Л.А.** Вероятностные методы расчета на прочность при линейном и сложном напряженных состояниях в 2-х частях: Метод. указания по изучению курса «Сопротивление материалов»/ Л.А. Сосновский. – Гомель: БелИИЖТ, 1984. – 74с. (в НТБ БелГУТа).
1. **Сосновский, Л.А.** L-риск (механотермодинамика необратимых повреждений) / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 317 с.
 2. **Сосновский, Л.А.** Комплексная оценка надежности силовых систем по критериям сопротивления усталости и износостойкости (основы трибофатики): Метод. указания по изучению курса «Надежность транспортных систем, машин и сооружений» для студентов транспортных вузов / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелИИЖТ, 1988. –56 с. (в НТБ БелГУТа).
 3. **Богданович, А.В.** Оценка надежности простого коленчатого вала. Надежность по критериям трибофатики: Пособие по курсу «Основы теории надежности» / А.В. Богданович, О.М. Еловой, Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2002. – Ч.2.–30 с. (в методическом кабинете кафедры – 5 экз.).
 4. **Сосновский, Л.А.** Показатель безопасности и оперативная характеристика риска / Л.А. Сосновский. – Гомель, БелИИЖТ, 1991. (в НТБ БелГУТа).



Лекция 1. Надежность в технике

Лекция 2. Отказы и их причины. Статистический анализ

Лекция 3. Оценка показателей надежности: модель отказов

**Лекция 4. Рассеяние характеристик прочности и
нагруженности**

Лекция 5. Оценка показателей надежности: модель нагрузка-прочность (часть1)

Лекция 6. Оценка показателей надежности: модель нагрузка-прочность (часть2)

Лекция 7. Схемная надежность

Лекция 8. Надежность трибофатической системы

Лекция 9. Концепция риска. Оценка безопасности.

Лекция 4

**РАССЕЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК
ПРОЧНОСТИ И НАГРУЖЕННОСТИ.
ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ
НАДЕЖНОСТИ:
МОДЕЛЬ НАГРУЗКА-ПРОЧНОСТЬ**



4.1 Рассеяние характеристик прочности и нагруженности

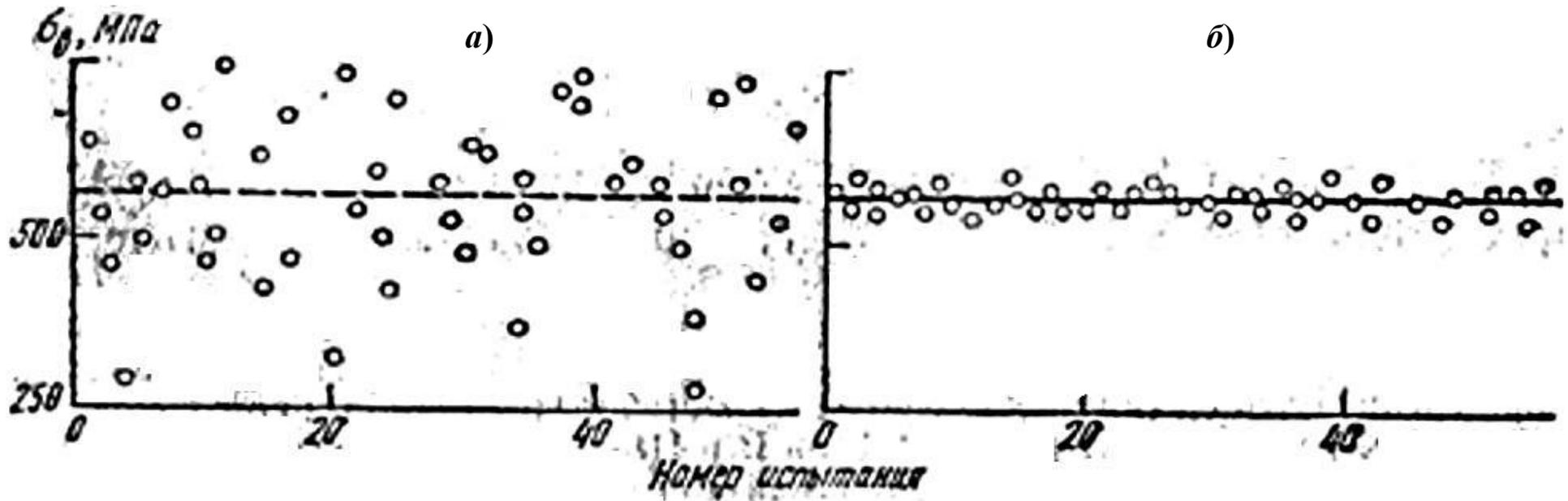


Рисунок 1 – Результаты испытания на растяжение материалов в хрупком (а) и вязком (б) состояниях



4.1 Рассеяние характеристик прочности и нагруженности

6

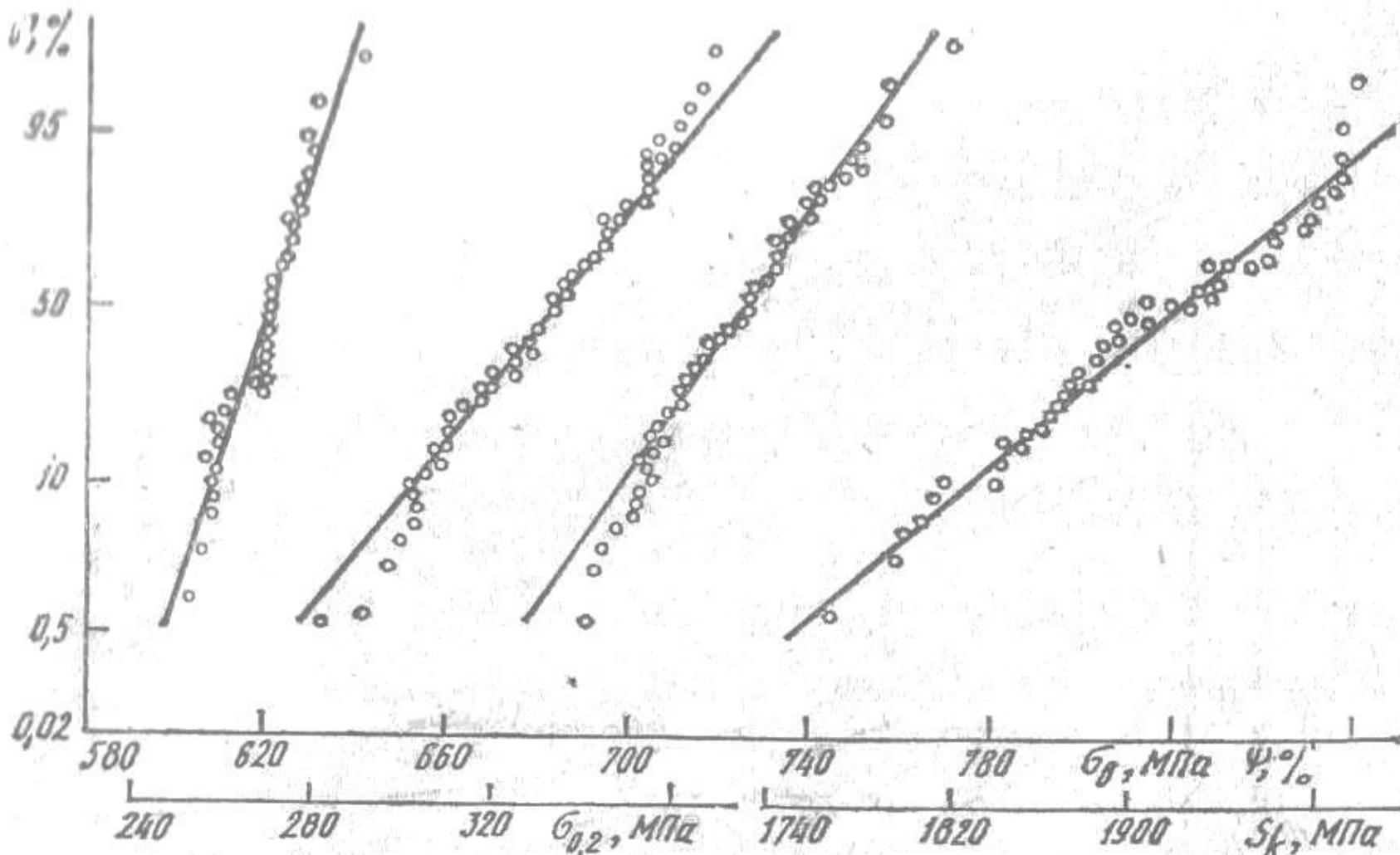


Рисунок 2 - Эмпирические функции распределения пределов текучести и прочности, относительного сужения и истинного сопротивления разрыву стали X18H9



4.1 Рассеяние характеристик прочности и нагруженности

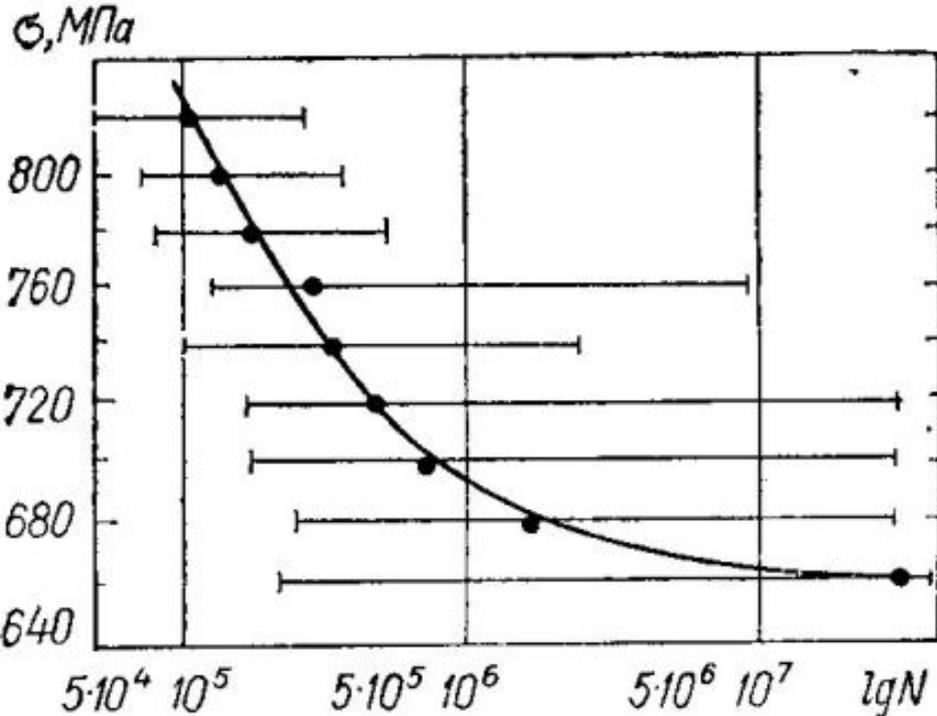


Рисунок 3 - Результаты статических испытаний образцов хромистомолибденовой стали (Ф. Бастенэр, М. Бастьем, Ж. Помэ)

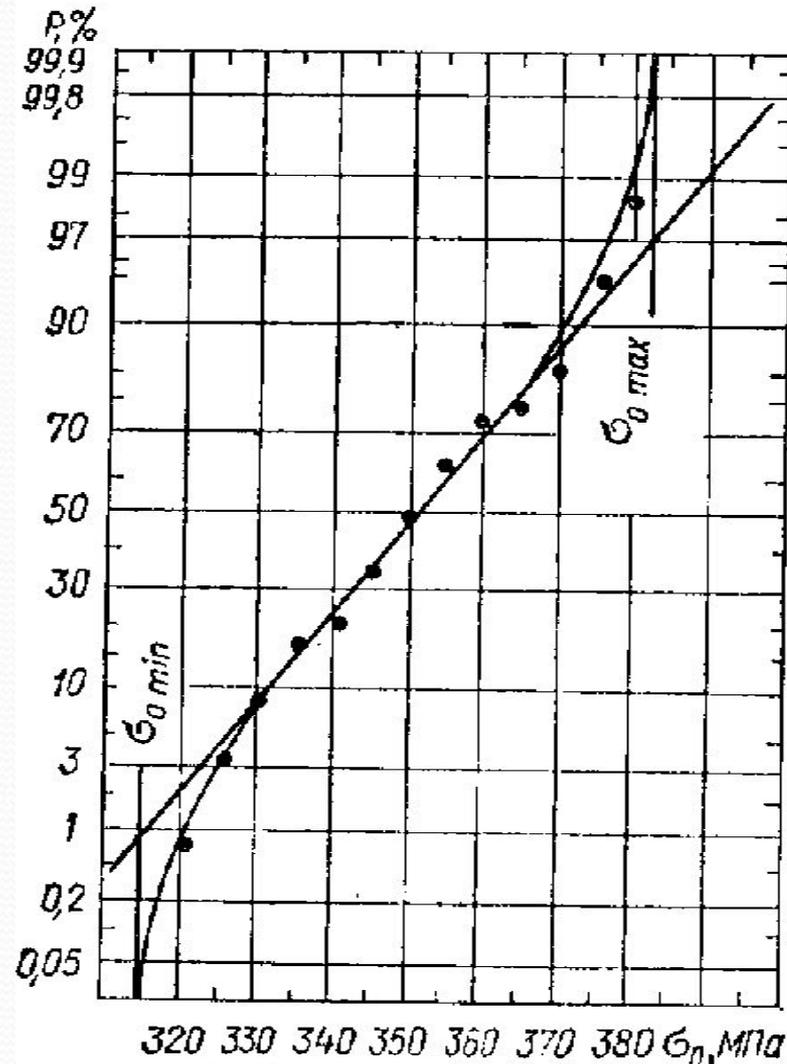
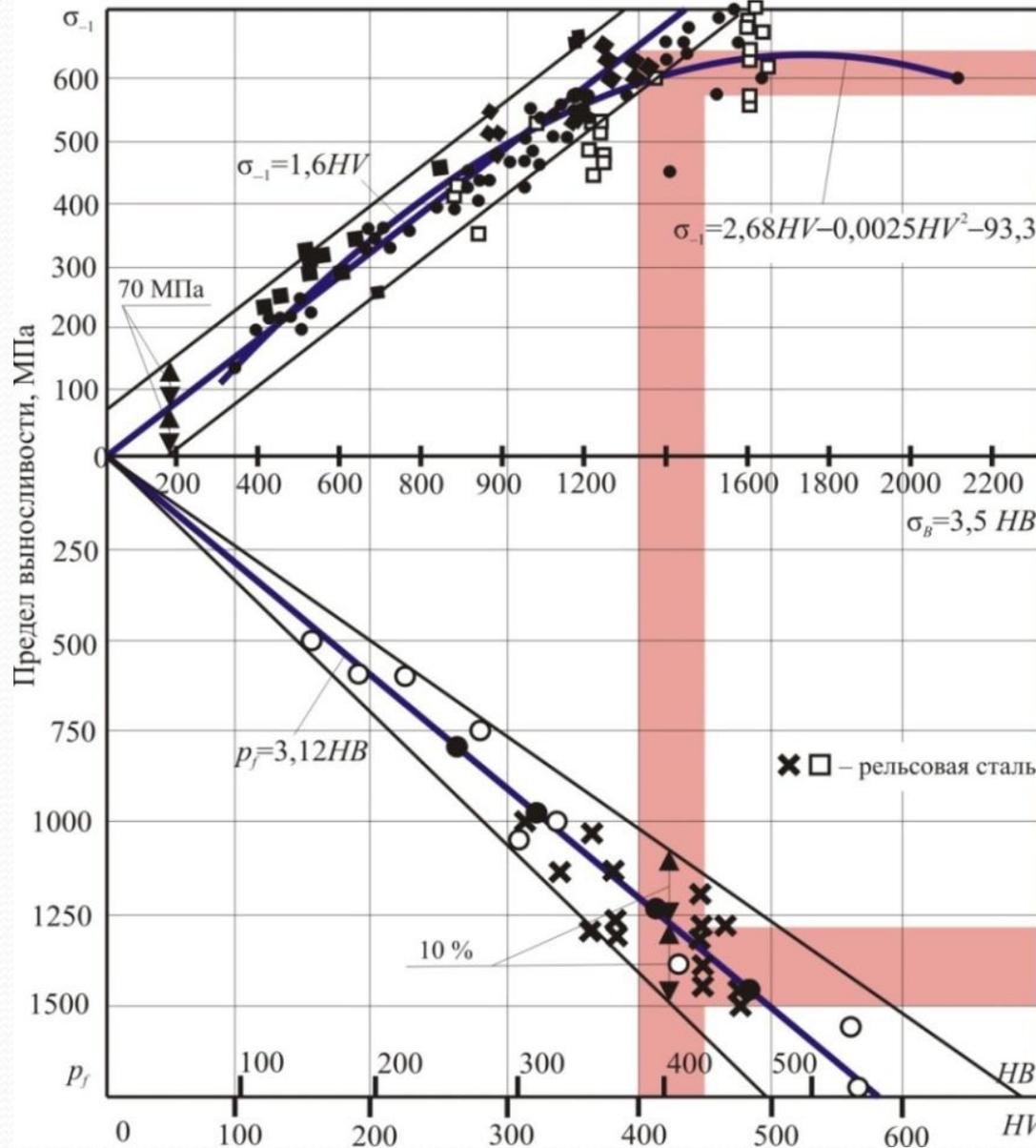


Рисунок 4 - Эмпирическая функция распределения пределов выносливости стали 3X13



4.1 Рассеяние характеристик прочности и нагруженности



$p_f = 3,12HV$; $\sigma_{-1} = 0,5\sigma_b$; $\sigma_b = 3,5HV$;
 $\sigma_{-1} = 1,6HV$ ($\sigma_{-1} < 500MPa$);
 $\sigma_{-1} = 2,68HV - 0,0025HV^2 - 93,3$ ($\sigma_{-1} > 400MPa$)

Рисунок 5 - К анализу рассеяния предельных напряжений по результатам детерминированных испытаний



Условие прочности, или условие не достижения предельного состояния, записывают так

$$\sigma \leq \begin{cases} [\sigma] = \sigma_*/n, \\ R \end{cases} \quad (1)$$

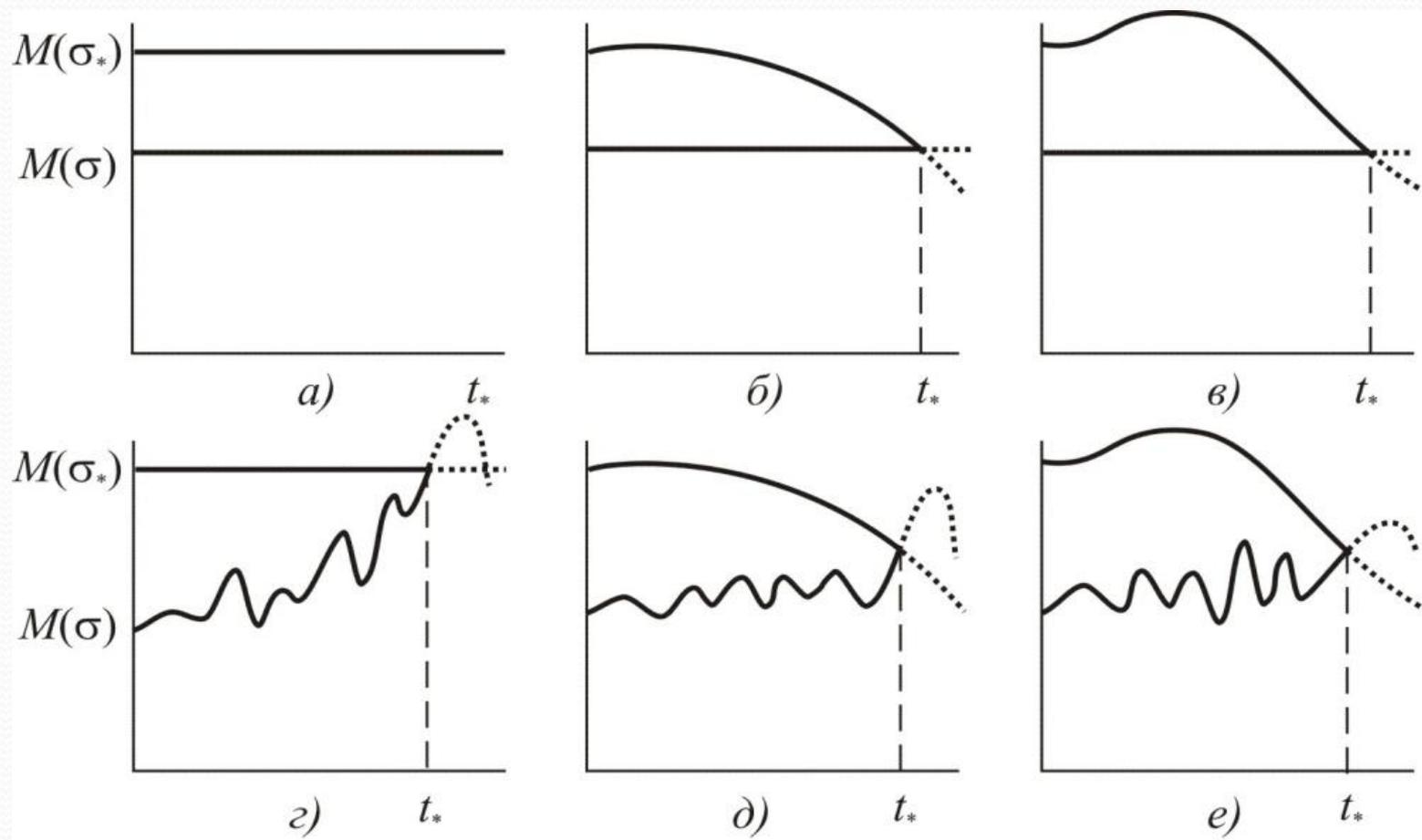
R – расчетное сопротивление материала (в строительстве).

Если недопустим переход в пластическое состояние, то $\sigma_* = \sigma_y$;

при опасности хрупкого разрушения $\sigma_* = \sigma_u$;

в условиях циклического нагружения $\sigma_* = \sigma_R$.

Рассмотрим взаимодействие случайных процессов нагруженности $\sigma(t)$ и несущей способности $\sigma_*(t)$ детали или элемента сооружения с целью выяснения условий возникновения недопустимого предельного состояния и, следовательно, установления их прочностной надежности.



$M(\sigma_*)$ – математическое ожидание характеристики прочности;
 $M(\sigma)$ – математическое ожидание характеристики нагруженности

Рисунок 6 – Модели процессов нагрузка–прочность



Представляется возможным изучить взаимодействие процессов $\sigma(t)$ и $\sigma_*(t)$, введя функцию:

$$\Psi(t) = \sigma_*(t) - \sigma(t). \quad (2)$$

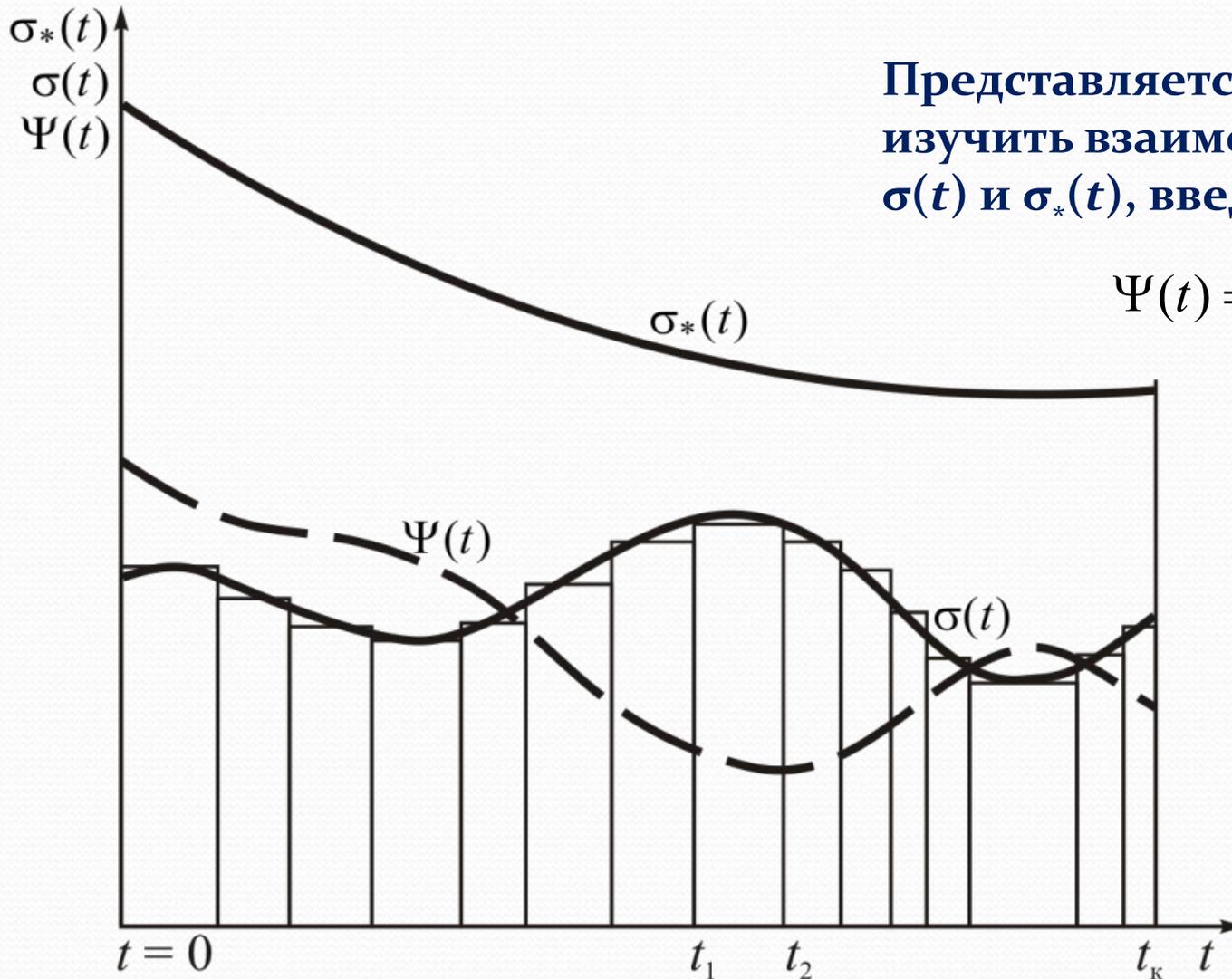
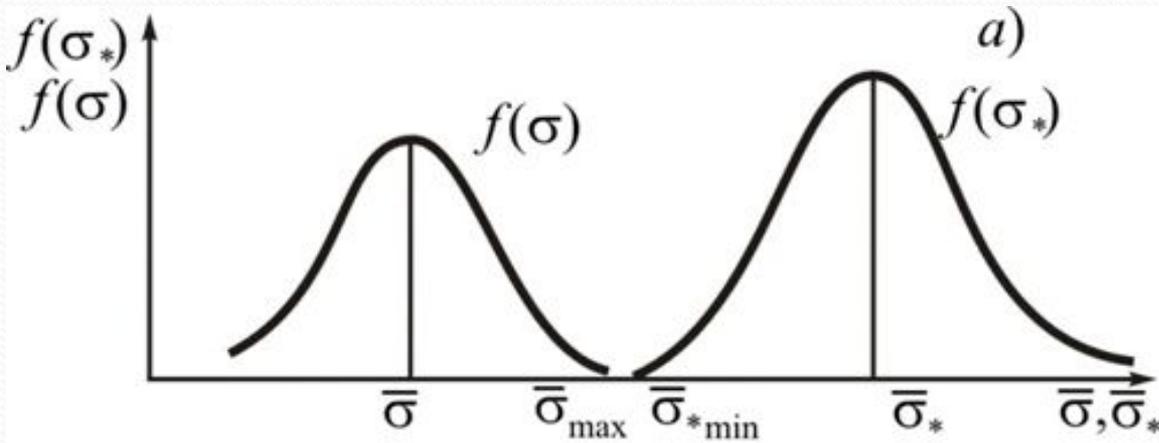


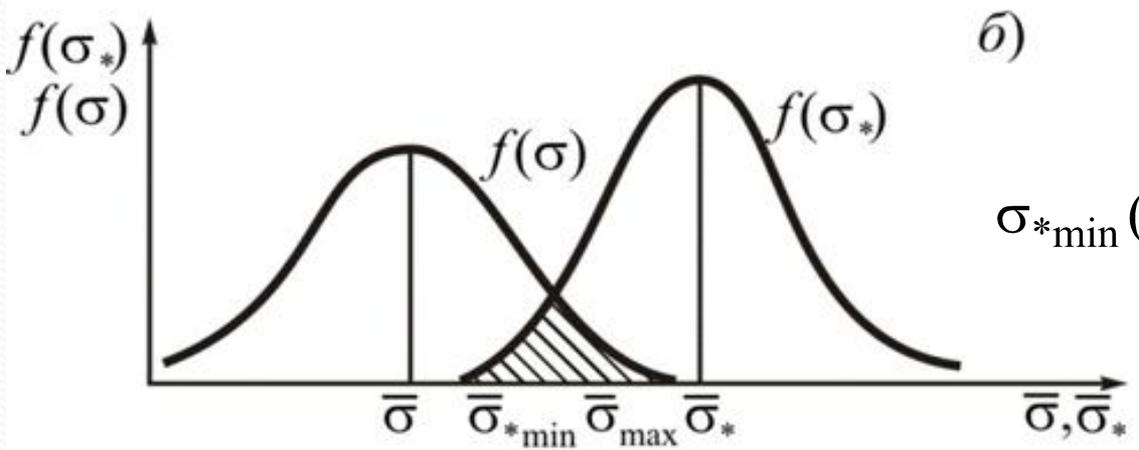
Рисунок 7 – Схематизация процессов нагруженности и прочности



Расчет вероятности отказа при линейном напряженном состоянии



$f(\sigma)$ – функция распределения характеристики нагруженности, заменяющая стационарный случайный процесс $\sigma(t)$ на временном интервале $t_1 \leq t \leq t_2$, а $f(\sigma_*)$ – функция распределения предельного напряжения, заменяющая случайный процесс на том же интервале времени



$$\sigma_{*min}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*}) > \sigma_{max}(\alpha_{\sigma}, \gamma_{\sigma}). \quad (3)$$

Рисунок 7 – К определению условия прочности (а) и условия достижения предельного состояния (б)

$$\Psi = \sigma_* - \sigma > 0. \quad (4)$$



Расчет вероятности отказа при линейном напряженном состоянии



Когда же возникает некоторая вероятность достижения предельного состояния или, короче, вероятность отказа, функции $f(\sigma)$ и $f(\sigma_*)$, очевидно, должны пересекаться, поскольку необходимо выполнить одно из условий

$$\sigma_{*\min}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*}) \leq \sigma_{\max}(\alpha_{\sigma}, \gamma_{\sigma}) \quad (5)$$

$$\Psi = \sigma_* - \sigma \leq 0 \quad (6)$$

Если действующее и предельное напряжения случайны, независимы и распределены по нормальному закону, то и их разность тоже является случайной величиной, распределенной по тому же закону

$$\bar{\Psi} = \bar{\sigma}_* - \bar{\sigma} \quad (7)$$

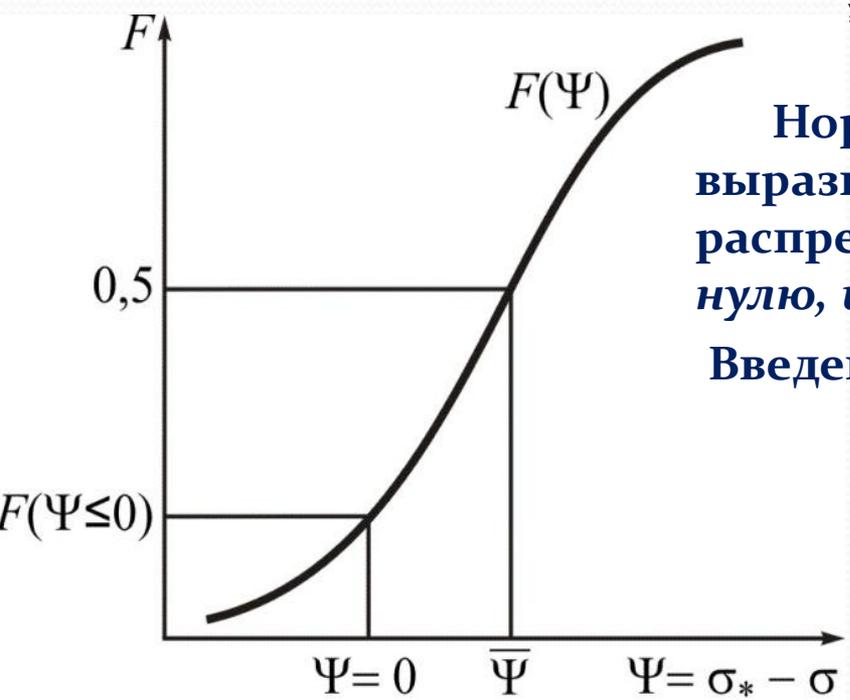
$$S_{\bar{\Psi}} = \sqrt{S_{\sigma_*}^2 + S_{\sigma}^2} \quad (8)$$

$$v_{\Psi} = \frac{S_{\bar{\Psi}}}{\bar{\Psi}} = \frac{\sqrt{S_{\sigma_*}^2 + S_{\sigma}^2}}{\bar{\sigma}_* - \bar{\sigma}} \quad (9)$$



Расчет вероятности отказа при линейном напряженном состоянии

$$Q = P(Y \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{S_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Y - \bar{Y})^2}{S_Y^2}\right\} dY \quad (10)$$



Нормальную функцию распределения $F(\Psi)$ выразим через нормированную функцию распределения $\Phi(z)$ (т.е. со средним, равным нулю, и среднеквадратическим, равным единице)

Введем новую переменную

$$z = \frac{\Psi - \bar{\Psi}}{S_{\bar{\Psi}}} \quad (11)$$

$$dz = \frac{d\Psi}{S_{\bar{\Psi}}} \quad \text{При } \Psi = 0 \quad z = \frac{0 - \bar{\Psi}}{S_{\bar{\Psi}}} = -\frac{\bar{\sigma}_* - \bar{\sigma}}{\sqrt{S_{\sigma_*}^2 + S_{\sigma}^2}}; \quad \Psi \rightarrow -\infty \quad z \rightarrow -\infty$$



Расчет вероятности отказа при линейном напряженном состоянии

$$Q(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\bar{s}_* - \bar{s}}{\sqrt{S_{\bar{s}_*}^2 + S_{\bar{s}}^2}}} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz = F\left(\frac{\bar{s}_* - \bar{s}}{\sqrt{S_{\bar{s}_*}^2 + S_{\bar{s}}^2}}\right) \quad (12)$$

$$Q(Y) = F(-z) \quad (13)$$

$$Q = F\left(\frac{\bar{s}_* - \bar{s}}{\sqrt{S_{\bar{s}_*}^2 + S_{\bar{s}}^2}}\right) = F\left(-\frac{1}{v_Y}\right) \quad (14)$$

Это формула удобна для численных расчетов . Для аналитических исследований она наоборот не удобна и ее лучше аппроксимировать степенной зависимостью

$$Q = \frac{k}{z_Q^2} \quad (15) \quad \text{где квантиль} \quad z_Q = \frac{\bar{s}_* - \bar{s}}{\sqrt{S_{\bar{s}_*}^2 + S_{\bar{s}}^2}} \quad (16)$$

Q	k	g
10 ⁻⁶ –10 ⁻³	2,83	0,175
10 ⁻³ –10 ⁻¹	0,466	0,567
10 ⁻¹ –3·10 ⁻¹	0,027	1,97
3·10 ⁻¹ –4,8·10 ⁻¹	0,35·10 ⁻⁸	18,69

$$Q = \frac{k}{(\bar{s}_* - \bar{s})^2} = (kv_Y^2)^{\frac{1}{g}} \quad (17)$$



Расчет вероятности отказа при линейном напряженном состоянии



Зная вероятность отказа Q , вероятность безотказной работы P детали или элемента сооружения или, короче, их надежность, определяют как разность между единицей и Q , т. е.

$$P = 1 - Q. \quad (18)$$

Условие прочности по вероятности отказа, аналогичное таковому по напряжениям, запишем следующим образом

$$Q \leq [Q]. \quad (19)$$

$[Q]$ – нормированная вероятность отказа, обоснование которой обычно дается технико-экономическим расчетом.

Условие (19) имеет ясный физический смысл. Так, если $Q \leq [Q] = 4 \cdot 10^{-3}$, то это означает: из 1000 готовых изделий за расчетный период эксплуатации только в четырех из них допускается наступление предельного состояния.

Введем два представления коэффициента запаса прочности, а именно: «средний» и «экстремальный» коэффициент запаса прочности

$$\bar{n} = \frac{\sigma}{\sigma_{*}}, \quad (20) \quad n_{\text{экст}} = \frac{\sigma_{*\min}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*})}{\sigma_{\max}(\alpha_{\sigma}, \gamma_{\sigma})}. \quad (21)$$



Взаимосвязь между коэффициентами запаса прочности и вероятностью отказа

Условием прочности по коэффициенту запаса будет

$$\bar{n} \geq [\bar{n}]. \tag{22}$$

$$n_{\text{ЭКСТ}} \geq [n_{\text{ЭКСТ}}]. \tag{23}$$

Связь между квантилем нормального распределения и коэффициентом запаса, соответствующего определенной вероятности разрушения, получим из формулы (16)

$$z_F = \frac{1 - \bar{n}_Q}{\sqrt{\frac{S_{\bar{\sigma}_*}^2}{\bar{\sigma}_*^2} + v_{\sigma}^2}} = \frac{1 - \bar{n}_Q}{\sqrt{v_{\sigma_*}^2 \bar{n}_Q^2 + v_{\sigma}^2}}. \tag{24}$$

$$\bar{n}_Q^2 (1 - z_Q^2 v_{\sigma_*}^2) - 2\bar{n}_Q + (1 - z_Q^2 v_{\sigma}^2) = 0.$$

$$\bar{n}_Q = \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - z_Q^2 v_{\sigma_*}^2)(1 - z_Q^2 v_{\sigma}^2)}}{1 - z_Q^2 v_{\sigma_*}^2}. \tag{25}$$



Взаимосвязь между коэффициентами запаса прочности и вероятностью отказа

18

$$\bar{n}_Q = \frac{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{k}{Q^g} v_{\sigma_*}^2\right) \left(1 - \frac{k}{Q^g} v_{\sigma}^2\right)}}{1 - \frac{k}{Q^g} v_{\sigma_*}^2}. \quad (25a)$$

$$Q = \left(\frac{k(v_{\sigma_*}^2 \bar{n}_Q^2 + v_{\sigma}^2)}{(\bar{n}_Q - 1)^2} \right)^{\frac{1}{g}}. \quad (26)$$

КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА

\bar{n}_K - критический коэффициент запаса прочности, который разделяет область возможных значений на две подобласти: если $\bar{n} > \bar{n}_K$, то $\bar{n} = \bar{n}_\eta$ если $\bar{n} < \bar{n}_K$ то $\bar{n} = \bar{n}_Q$.

Условия недостижения и достижения предельного состояния запишем в виде

$$\sigma_{*min} = \bar{\sigma}_* - t_{\sigma_*}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*}) S_{\bar{\sigma}_*} > \sigma_{max} = \bar{\sigma} + t_{\sigma}(\alpha_{\sigma}, \gamma_{\sigma}) S_{\bar{\sigma}} \quad (27)$$

$$\sigma_{*min} = \bar{\sigma}_* - t_{\sigma_*}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*}) S_{\bar{\sigma}_*} \leq \sigma_{max} = \bar{\sigma} + t_{\sigma}(\alpha_{\sigma}, \gamma_{\sigma}) S_{\bar{\sigma}} \quad (28)$$

$t_{\sigma_*}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*})$, $t_{\sigma}(\alpha_{\sigma}, \gamma_{\sigma})$ - соответственно нижний и верхний толерантные коэффициенты, определенные с заданной доверительной вероятностью γ и уровнем значимости α .



Из формул (27) и (28) следует, что

$$\bar{n}_\eta > \frac{1 + t_\sigma(\alpha_\sigma, \gamma_\sigma)v_\sigma}{1 - t_{\sigma_*}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*})v_{\sigma_*}} \geq \bar{n}_Q \quad (29)$$

$$\bar{n}_K = \frac{1 + t_\sigma(\alpha_\sigma, \gamma_\sigma)v_\sigma}{1 - t_{\sigma_*}(\alpha_{\sigma_*}, \gamma_{\sigma_*})v_{\sigma_*}} \quad (30)$$

$$\bar{n}_K = \frac{\bar{n}_Q}{n_{\text{ЭКСТ}}} \quad (31)$$

$$t(\alpha, \gamma) = z_{1-\alpha} \left(1 + \frac{z_\gamma}{\sqrt{2n_0}} + \frac{5z_\gamma^2 + 10}{12n_0} \right) \quad (32)$$



Расчет вероятности отказа при произвольном законе распределения



Условие достижения предельного состояния

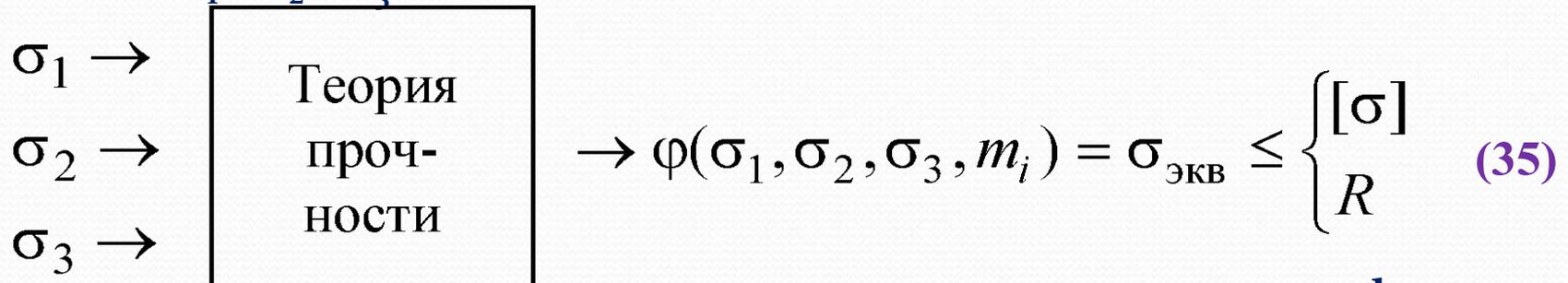
$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = \sigma_*(q_1, q_2, q_3, \dots, q_r) - \sigma(q_{r+1}, q_{r+2}, q_{r+3}, \dots, q_n) \leq 0. \quad (33)$$

Вероятность достижения предельного состояния

$$Q = \int_{\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \leq 0} \dots \int f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) dq_1, dq_2, \dots, dq_n. \quad (34)$$



В случае детерминированного подхода расчет несущей способности при трехосном напряженном состоянии (ТНС), которое характеризуется главными напряжениями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, ведут по следующей схеме:



При вероятностном подходе считают известными три функции распределения $f(\sigma_i)$ главных напряжений $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$. Кроме того, описание предельного состояния конструкции с учетом анизотропии свойств материала производят при помощи трех функций распределения $f(\sigma_{*i})$ предельных напряжений в направлениях $i = 1, 2, 3$ действия главных напряжений.

Частные условия отказа по главным направлениям

$$\Psi_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = \sigma_{*i}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_r) - \sigma_i(q_{r+1}, q_{r+2}, q_{r+3}, \dots, q_n) \leq 0. \quad (36)$$

Произведя замену переменных $q_1 = h(\Psi_i, q_2, q_3, \dots, q_n)$, получим частные плотности вероятностей

$$f(\Psi_i) = \int \dots \int f[h(\Psi_i, q_2, q_3, \dots, q_n)q_2, q_3, \dots, q_n] \times \frac{\partial h(\Psi_i, q_2, q_3, \dots, q_n)}{\partial \Psi_i} dq_2, dq_3, \dots, dq_n \quad (37)$$



Частные вероятности $Q(A_i)$ отказа от независимого действия случайных главных напряжений σ_i по направлениям $i = 1, 2, 3$

$$Q(A_i) = P(\Psi_i \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(\Psi_i) d\Psi_i. \tag{38}$$

Исходя из того общего предположения, что событие A достижения предельного состояния при ТНС произойдет, если оно реализуется хотя бы от одного из главных напряжений, получим, используя алгебру событий, оценку вероятности Q_c отказа детали при произвольном ТНС по частным вероятностям отказа $Q(A_i)$ при соответствующих ЛНС.

$$Q_c = a_0 [(Q_1)A + (Q_2)A + (Q_3)A + Q(A_1) + (Q_2)A + Q(A_2) + (Q_3) - Q(A_3)Q(A_1) + Q(A_1)Q(A_2)Q(A_3)] = a_0 \left[1 - \prod_{i=1}^3 (1 - Q(A_i)) \right]. \tag{39}$$

$$Q_c = a_0 \left[1 - \prod_{i=1}^3 \left(1 - \int_{-\infty}^0 f(\Psi_i) d\Psi_i \right) \right]. \tag{39a}$$



Если принять гипотезу о взаимозависимости событий A_i достижения предельного состояния, то формула (39), согласно алгебре событий, связанных с данным испытанием, была бы записана через условные вероятности:

$$\begin{aligned}
 Q_c &= Q(A_1) + Q(A_2) + Q(A_3) - Q(A_1A_2) - Q(A_2A_3) - Q(A_3A_1) + Q(A_1A_2A_3) = \\
 &= Q(A_1) + Q(A_2) + Q(A_3) - Q(A_1)Q(A_2 / A_1) - Q(A_2)Q(A_3 / A_2) - \\
 &\quad - Q(A_3)Q(A_1 / A_3) + Q(A_1)Q(A_2 / A_1)Q(A_3 / A_1A_2).
 \end{aligned}
 \tag{396}$$

Теперь расчет на прочность можно выполнить либо по вероятности отказа

$$Q_c \leq [Q], \tag{40}$$

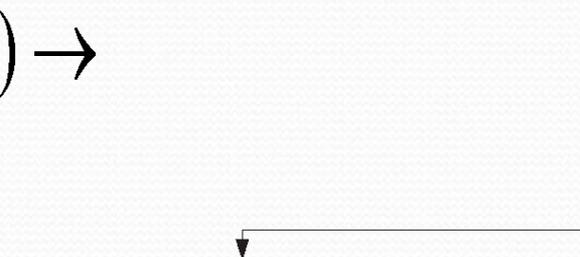
либо по соответствующему ей коэффициенту запаса прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq \frac{\bar{\sigma}_{*i}}{n_{Q_c}} = [\sigma_Q]. \tag{41}$$

$f(\sigma_1)$
 $f(\sigma_{*1})$

 $f(\sigma_2)$

Алгебра
 событий,
 связан-
 ных с
 данным
 испыта-
 нием





Расчеты на надежность при сложном напряженном состоянии

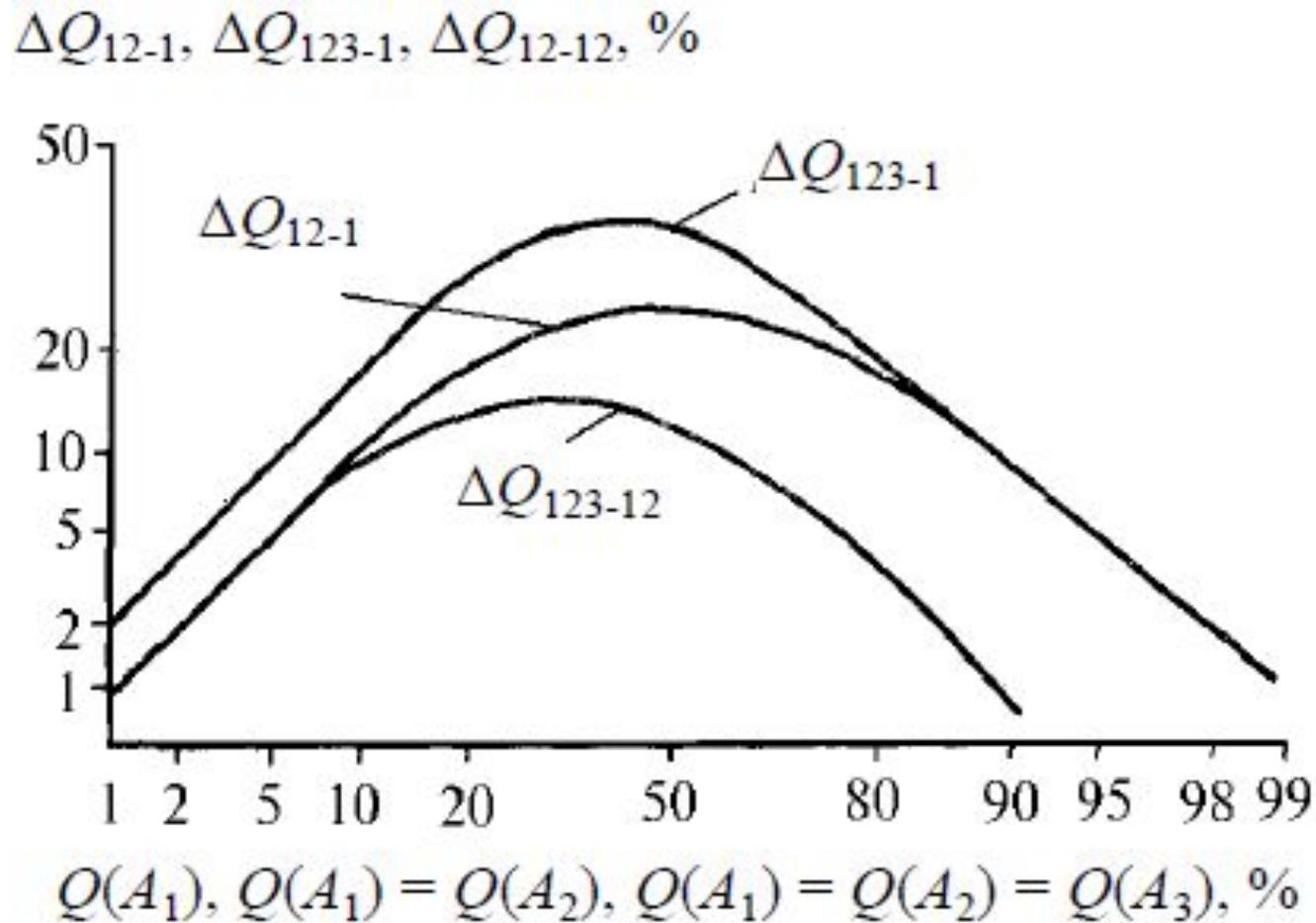


Рисунок 8 - Сравнение опасности усталостного разрушения при различных напряженных состояниях



Основы дифференциации расчетов на надежность



Все многообразие деталей машин и элементов сооружений, подлежащих расчету на прочность, разобьем в зависимости от экономической ответственности на четыре группы.

Детали и элементы сооружений **группы I** – это объекты, несущая способность которых лимитируется жесткостью или устойчивостью; для них достаточен поверочный расчет на прочность либо по одному из нормированных коэффициентов запаса прочности, либо по допускаемому напряжению (расчетному сопротивлению материала в строительстве).

К **группе II** относятся силовые детали массовых машин и несущие элементы массовых сооружений. Такие каталы подлежат вероятностному расчету на прочность, что требует, как показано выше, знания по меньшей мере параметров функций распределения $p(\sigma_*)$ и $p(\sigma)$ характеристик прочности σ_* и нагруженности σ .

К **группе III** отнесем крупногабаритные силовые детали и элементы уникальных машин и сооружений. Для таких объектов, ввиду крайне ограниченного их числа, нет смысла искать функцию распределения предельных напряжений – следует устанавливать их индивидуальную прочность $\sigma_{*инд}$, которую разумно считать детермированной величиной. Все формулы, относящиеся к объектам этой группы, получают как частные случаи формул, приведенных для объектов II группы при условии, что **среднеквадратическое отклонение равно 0**.

К **IV группе** отнесем силовые детали машин и элементы сооружений, для которых действующее напряжение σ можно считать, с разумным приближением, детермированной величиной.