

Визначений інтеграл

План

- 1) Означення визначеного інтеграла та його властивості
- 2) Метод заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі
- 3) Невласні інтеграли
- 4) Геометричні застосування визначеного інтегралу

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ (де $a < b$), і якщо:

- 1) Розбити цей відрізок на n частинних відрізків довжиною $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$;
- 2) Вибрати на кожному частинному відрізку по одній довільній точці $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$;
- 3) Обчислити значення функції $f(x)$ у вибраних точках;
- 4) Скласти суму

$$f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i,$$

то вона називається інтегральною сумою $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Означення

Якщо по різному ділити відрізок $[a;b]$ на n частинних відрізків і по-різному вибирати на них по одній точці ε_i , то можна для будь-якої неперервної функції $f(x)$ і будь-якого заданого відрізка $[a;b]$ скласти нескінченну множину різних інтегральних сум.

При цьому виявляється, що всі ці інтегральні суми при необмеженому зростанні n при прямуванні до нуля найбільшої із довжин частинного відрізка, мають одну і ту ж границю.

Ця границя всіх інтегральних сум функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається **визначенням інтегралом від $f(x)$ в межах від a до b** та позначається:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Властивості визначеного інтеграла

- 1) При перестановці меж інтегрування знак інтегралу змінюється на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- 2) Інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- 3) Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- 4) Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожного доданку:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$$

5) Постійний множник k можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Для обчислення визначеного інтеграла використовується формула **Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

тобто, визначений інтеграл дорівнює різниці значень невизначеного інтеграла при верхній та нижній межах інтегрування.

Приклад 1.

$$\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \int_{-1}^7 (3x+4)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{3 \cdot \frac{1}{2}} \Big|_{-1}^7 = \frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \Big|_{-1}^7 =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

Приклад 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos 0 =$$
$$= -2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$$

2. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ перетворюється за допомогою підстановки:

$x = \varphi(t)$ в інший інтеграл, з новою змінною t , то задані межі: $x_1 = a, x_2 = b$ змінюються новими

межами:
 $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$

, які визначаються з вибраної підстановки, тобто з рівнянь: $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$
 $\varphi(t), f(\varphi(t))$ $[\alpha; \beta]$

Якщо $\varphi(t), f(\varphi(t))$ неперервні на відріжку:

то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (2)$$

Приклад 3.

$$\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx = \left. \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ dt = e^x dx \\ a = 0 \Rightarrow \alpha = e^0 - 1 = 0 \\ b = \ln 2 \Rightarrow \beta = e^{\ln 2} - 1 = 1 \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Якщо підінтегральний вираз у визначеному інтегралі можна представити у вигляді добутку двох співмножників: u , dv , то для обчислення визначеного інтегралу треба скористатися формулою інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Приклад 4.

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-x} dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx =$$
$$= -e^{-1} + (-e^{-x}) \Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

3. Невласні інтеграли.

а) Інтеграли з нескінченними межами.

Означення. Якщо існує скінченна границя:

$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ то цю границю називають
невласним інтегралом від функції $f(x)$,

в інтервалі $[a, +\infty)$ і позначають:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Тобто:
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл існує або він є збіжним. Якщо $\int_a^b f(x)dx, b \rightarrow \infty$ не має

скінченної границі, то кажуть, що $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не існує, або він розбіжний.

Аналогічно визначаються:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

Приклад. Обчислити інтеграл: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Розв'язок:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}$$

б) Інтеграли від розривних функцій.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена та неперервна у відкритому інтервалі: $a \leq x < b$, а у точці $x = b$ невизначена, або має розрив, тоді інтеграл визначають наступним чином:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Якщо границя, що стоїть у правій частині рівності, існує, то інтеграл називають **невласний збіжний інтеграл**, у протилежному випадку – розбіжний.

У випадку, коли функція має розрив у точці $x = a$ відрізка $[a, b]$, то за означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x = c$ всередині відрізка $[a, b]$, то вважаємо, що

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx,$$

коли обидва невластних інтеграли у правій частині рівності існують.

Приклад: Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\varepsilon} \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(\sqrt{1-1+\varepsilon} - 1) = 2 \end{aligned}$$