

Закон Архимеда

Пусть в жидкость погружено тело произвольной формы объемом W . Возьмем проекцию этого тела на свободную поверхность жидкости и проведем вдоль полученной линии цилиндрическую поверхность с вертикальной образующей. Эта поверхность будет касаться тела по замкнутой линии, делящей поверхность тела на верхнюю и нижнюю части.

Найдем вертикальные составляющие силы давления жидкости на верхнюю и нижнюю части поверхности тела. Они будут равны весам жидкости соответственно в объемах $ACBB'A'$ и $ADBB'A'$. Обозначим их $F_{в1}$ и $F_{в2}$. Равнодействующая этих двух сил будет равна их разности, то есть весу жидкости в объеме тела, и направлена вверх.

$$F_a = F_{в2} - F_{в1} = g\rho W.$$

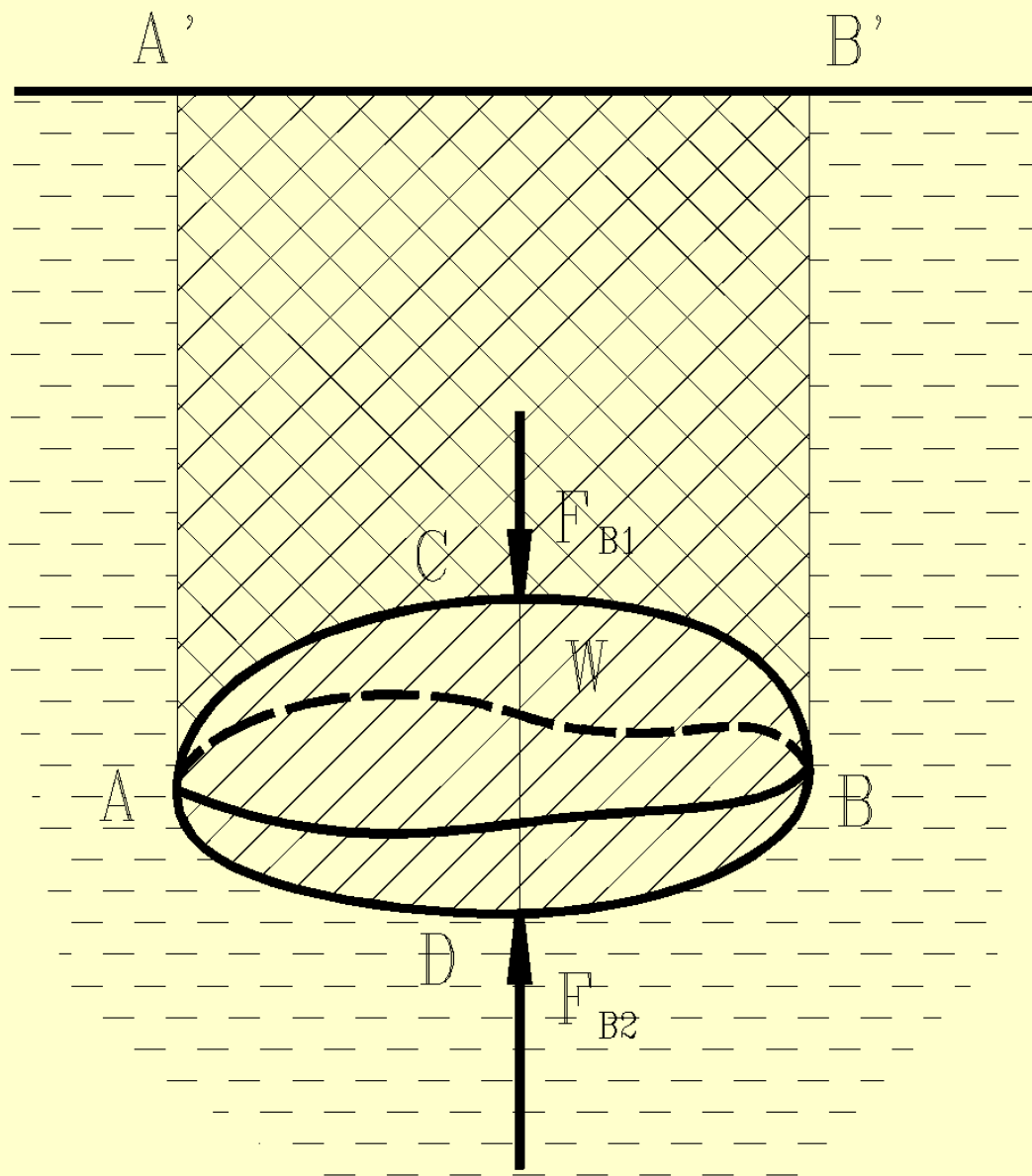


Рис. Схема для доказательства закона Архимеда

Равнодействующая всех горизонтальных составляющих сил давления всегда равна 0, так как вертикальные проекции левой и правой, передней и задней частей тела всегда попарно равны, и противоположно направленные горизонтальные составляющие силы давления друг друга уравнивают.

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх, численно равная весу жидкости, вытесненной телом, и приложенная в центре масс объема погруженной части тела.

Следует отметить, что центр масс тела и центр масс объема тела в общем случае не совпадают. Они совпадают только в случае, когда тело имеет равномерную плотность.

Если сила поддержания (архимедова) меньше веса тела, то оно тонет. Если больше, то тело всплывает на поверхность. Если равна, то тело плавает в толще жидкости.

Для равновесия плавающего тела необходимо, чтобы центр масс и центр водоизмещения лежали на одной вертикальной прямой. Если центр масс лежит ниже центра водоизмещения, то равновесие устойчивое, если выше, то — неустойчивое.

Основы кинематики жидкости.

Основные понятия

Лекция 3

Кинематика жидкости отличается от кинематики твердого тела, у которого все точки жестко соединены между собой. В жидкости частицы могут перемещаться относительно друг друга. Задачей кинематики жидкости является определение скорости в любой ее точке, то есть определение поля скоростей.

В гидравлике существуют понятия *идеальной* и *реальной* жидкости.

Идеальной жидкостью называют абстрактную модель жидкости, абсолютно лишенной вязкости и несжимаемой.

Реальная жидкость всегда рассматривается как вязкая, а сжимаемостью часто пренебрегают.

Методы изучения движения жидкости

В гидромеханике существуют два метода изучения движения жидкости: **метод Лагранжа** и **метод Эйлера**.

1. Метод Лагранжа заключается в изучении движения каждой отдельной частицы жидкости. В этом случае движение определяется положением частицы жидкости в функции от времени t . Движение частицы будет определено, если точно определить координаты x , y , и z в заданный момент времени t , что дает возможность построить траекторию движения частицы жидкости. Величины x , y , и z являются переменными Лагранжа, а их изменения за время dt позволяет получить значение dx , dy и dz , а затем путь

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

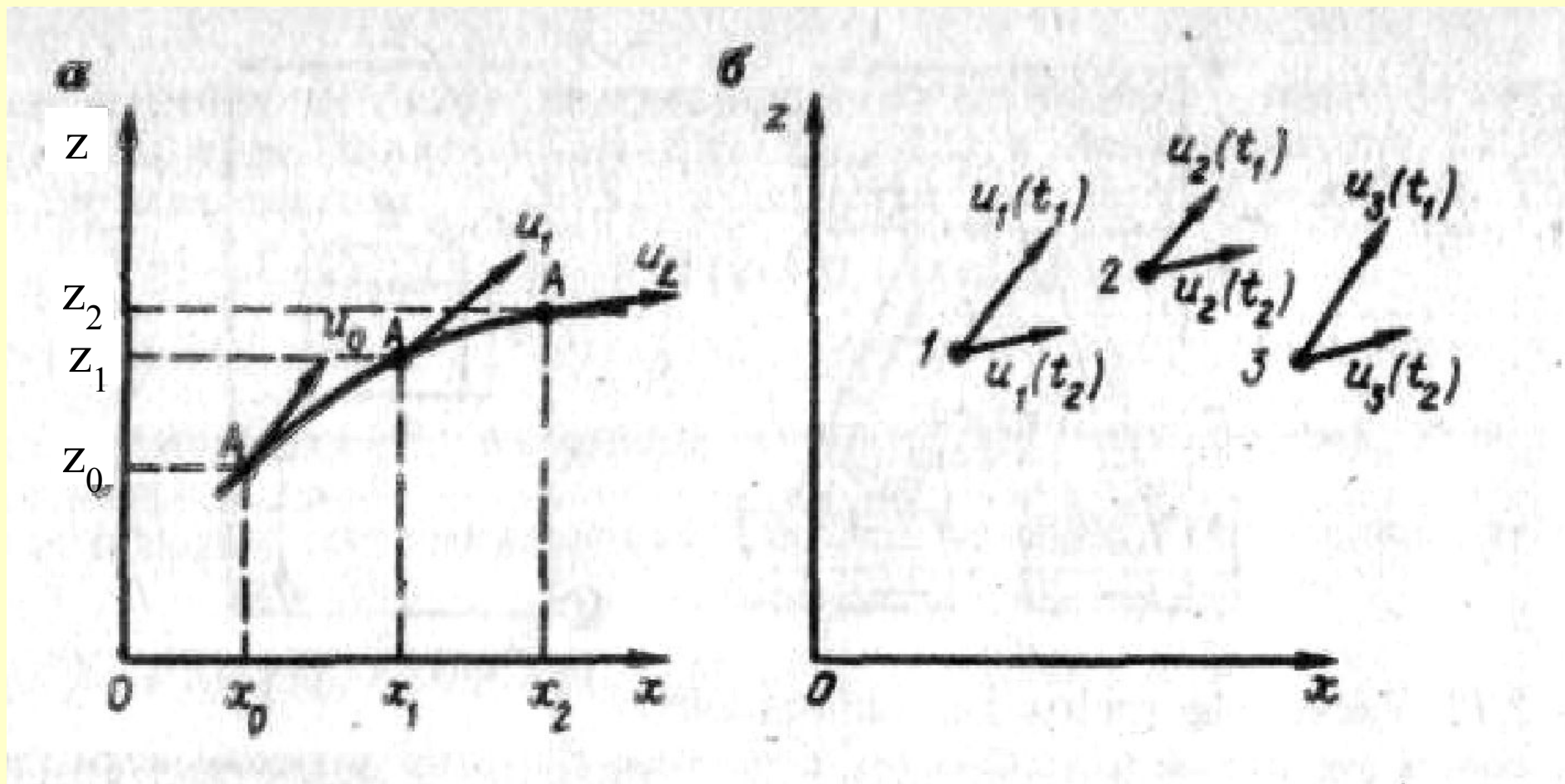


Рисунок 1 - Методы описания движения жидкости:
а) Лагранжа; б) Эйлера

Проекции скорости на координатные оси определяются зависимостями

$$U_x = \frac{dx}{dt}, \quad U_y = \frac{dy}{dt}, \quad U_z = \frac{dz}{dt}$$

а местная скорость $U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$

Метод Лагранжа сводится к определению семейства траекторий движения частиц движущейся жидкости.

Учитывая, что для установления движения линии тока совпадают с траекторией движущихся частиц, можно записать

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}$$

Это выражение называется уравнением линии тока.

Метод Лагранжа в гидравлике не нашел широкого применения ввиду его относительной сложности.

2. *Метод Эйлера* (рис. 1, б) заключается в том, что в пространстве намечаются точки $(1, 2, 3 \dots)$ или сечения, через которые проходят частицы: жидкости с различными скоростями, зависящими от времени $t_1, t_2 \dots$: $u_1(t_1), u_1(t_2), u_2(t_1), u_2(t_2), u_3(t_1), u_3(t_2) \dots$. При этом координаты точек (сечений) остаются неизменными. Использование этого метода значительно облегчает проведение теоретических и экспериментальных исследований, так как координаты частиц, зафиксированных в пространстве, известны и постоянны.

При решении большинства инженерных задач необходимо знать скорости прохождения различных частиц жидкости через определенные элементы конструкций или скорости приближения к ним, поэтому данный метод описания движения является основным.

По методу Эйлера скорости элементарных объемов жидкости в каждый момент времени в намеченных точках пространства в прямоугольной декартовой системе координат описываются зависимостями – переменными

Эйлера:

$$u_x = f(x, y, z, t),$$
$$u_y = f(x, y, z, t),$$
$$u_z = f(x, y, z, t),$$

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции проекции ускорений элементарных объемов среды в этой системе координат будут следующими:

$$j_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial t},$$

$$j_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial t},$$

$$j_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial t}.$$

Зная, что $dx/dt = u_x$, $dy/dt = u_y$, $dz/dt = u_z$ являются проекциями скорости в определенный момент времени и подставляя их в уравнения, получим:

$$j_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_x}{\partial t},$$

$$j_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial t},$$

$$j_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial t}.$$

Эти уравнения были получены академиком Эйлером в 1755г. и называются ***дифференциальным уравнением движения невязкой жидкости***.

(УПРОЩЕННО !!!) Уравнение Эйлера для движения идеальной жидкости

Уравнение Эйлера, которое выражает условия равновесия жидкости:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + X &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Чтобы получить уравнения движения воспользуемся принципом Даламбера для перехода от равновесия к движению необходимо к действующим силам прибавить силы инерции.

С учетом того, что уравнение (1) приведено к единицы массы, соответствующие силы инерции будут:

$$j_x = -1 \frac{dU_x}{dt}; \quad j_y = -1 \frac{dU_y}{dt}; \quad j_z = -1 \frac{dU_z}{dt}$$

Прибавляя силы инерции, действующие силы к силам получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + X &= \frac{dU_x}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{Y} &= \frac{dU_y}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{dU_z}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Уравнения (2) были получены академиком Эйлером в 1755г. и называются **дифференциальным уравнением движения невязкой жидкости.**

При исследовании движения жидкости в переменных Эйлера вводятся следующие понятия

1. *Установившееся* (стационарное) движение жидкости - это движение, при котором все параметры, характеризующие его в любой точке пространства, не меняются во времени, т. е. в соответствии с уравнением (2) :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

2. *Неустановившееся* (нестационарное) движение жидкости это движение, при котором параметры, характеризующие его, изменяются во времени, т. е. в этом случае скорость частиц жидкости, проходящих через определенные точки пространства, изменяется во времени (см. рис. 1, б), и частные производные *не равны нулю* . В свою очередь, зависимость скорости частицы жидкости в намеченной точке пространства от времени

приводит к изменению ее гидродинамического давления и плотности.

Для рассмотрения картины течения вводятся понятия: линия тока, трубка тока и элементарные струйки (рис. 2).

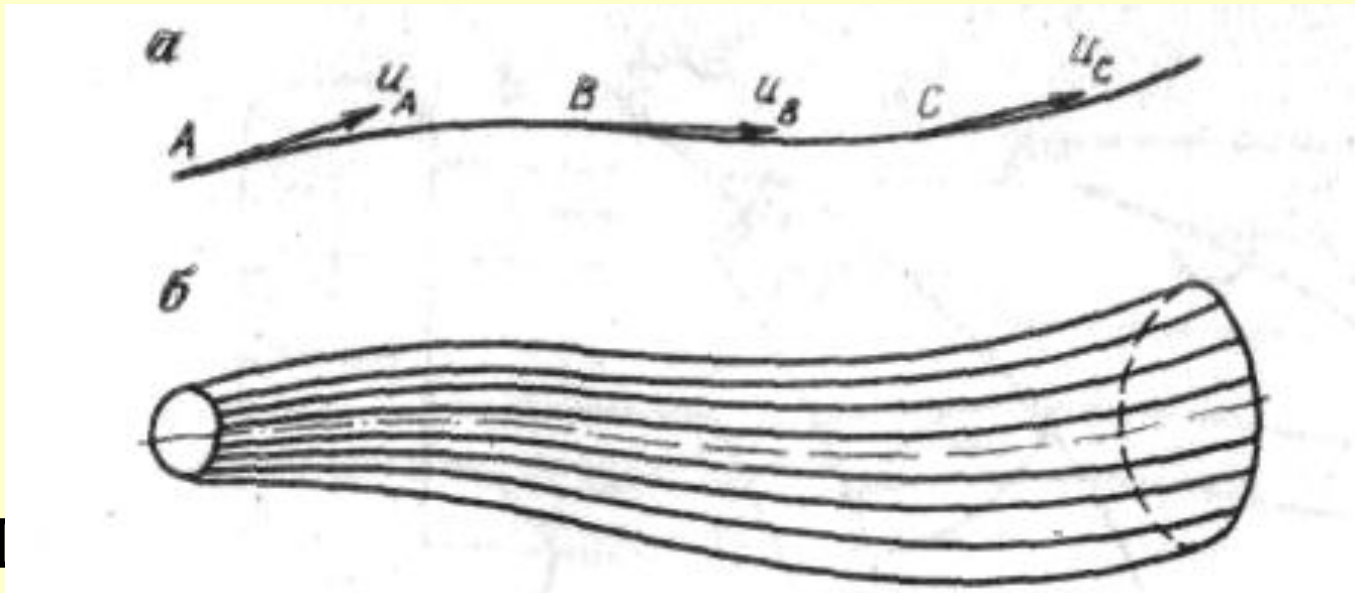
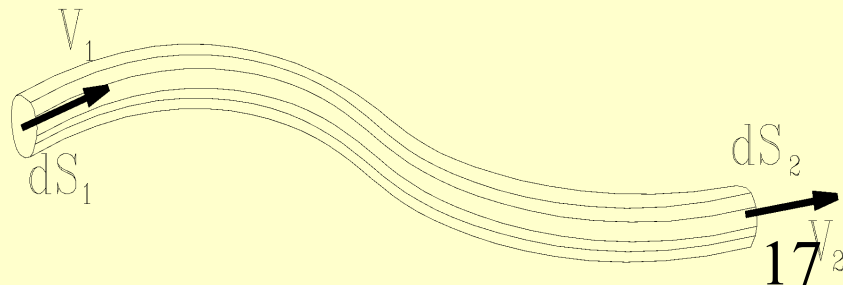


Рис. 2. Л

Трубка тока



Линия тока - это линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор скорости жидкости совпадает с касательной к этой линии (рис. 3.2, а) . В установившемся движении линия тока является траекторией движения частицы жидкости.

Трубка тока - это поверхность, образованная линиями тока, проведенными в данный момент времени через все точки бесконечно малого замкнутого контура, нормального к линиям тока и находящегося в области, занятой жидкостью.

Элементарная струйка - это часть движущейся жидкости, ограниченная трубкой тока (рис. 3.2, б).

Элементарная струйка обладает следующими важными свойствами:

- частицы жидкости не выходят из струйки и не входят в нее через боковую поверхность, так как данная поверхность образована линиями тока и, следовательно, в любой ее точке векторы скоростей направлены по касательным;
- скорости частиц во всех точках одного и того же поперечного сечения струйки одинаковы, что объясняется малыми размерами поперечного сечения;
- при установившемся движении форма струйки остается неизменной во времени.

Поток движущейся жидкости рассматривается как совокупность элементарных струек, что соответствует струйной модели движущейся жидкости.

Гидравлические элементы потока

Виды потоков

Потоки можно разделить на напорные, безнапорные и струи.

Напорным называется поток, ограниченный со всех сторон твердыми стенками (рис. 3, а) : Примерами такого потока являются движущиеся вода в водопроводе или в шахтном водоотливном трубопроводе, масло в маслопроводе и т. д.

Безнапорным называется поток, ограниченный твердыми стенками не со всех сторон и имеющий по всей длине свободную поверхность (рис. 3, б). Примеры такого потока - движение воды в реке, водоотливной канавке шахты

Струей называется поток жидкости, ограниченный не твердыми стенками, а поверхностями разрыва скоростей (рис. 3, в, поверхность $ABCD$) . Примерам и такого потока могут служить струя воды из гидромонитора.

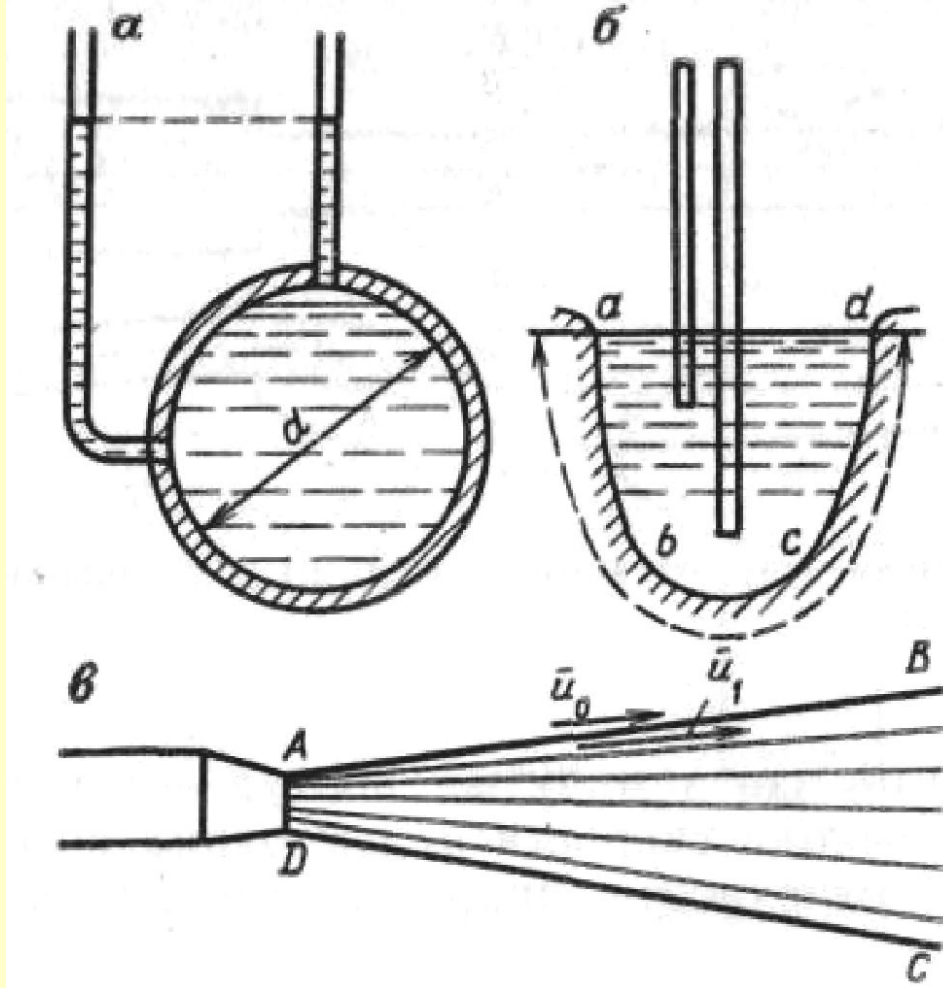


Рис. 3 - Напорный (а),
безнапорный (б) поток и
струя (в)

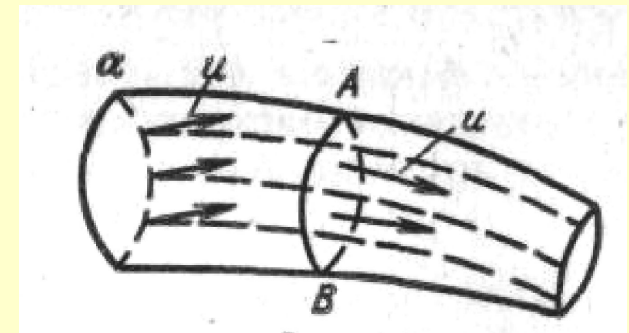


Рис. 4 – Живое сечение

Живое сечение. Расход. Средняя скорость

Живое сечение - поверхность в пределах потока (рис. 4 поверхность AB) нормальная в каждой своей точке к проходящей через нее линии тока. При равномерном или плавно изменяющемся движении живое сечение является плоским и равно площади поперечного сечения потока. Размерность ω – м^2 .

Смоченным периметром χ называют длину линии соприкосновения жидкости с твердыми стенками в данном живом сечении. Для круглого сечения (см. рис. 3, а) $\chi = \pi d$, для произвольного русла (см. рис. 3, б) $\chi = l_{abcd}$

Гидравлическим радиусом называют отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру:

$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

Гидравлический диаметр равен 4 гидравлическим радиусам: $D = 4R$.

Чаще всего живое сечение имеет форму круга, но если форма сечения другая, то в формулы подставляют эквивалентный гидравлический диаметр.

Расход. Уравнение неразрывности потока

Расходом называется количество жидкости, протекающее через живое сечение потока (струйки) в единицу времени.

Количество жидкости можно задать объемом и массой. Соответственно и расходы бывают объемный Q и массовый Q_m .

Для элементарной струйки, имеющей бесконечно малые площади живых сечений, можно считать скорость жидкости в любой точке сечения одинаковой.

Тогда $dQ = V d\omega$; $dQ_m = \rho dQ = \rho V d\omega$;
где $d\omega$ – площадь живого сечения струйки.

Для потока конечных размеров скорость в различных точках сечения будет различной, поэтому расход следует определять как сумму элементарных расходов струек

$$Q = \int V d\omega.$$

Для определения расхода обычно вводят в рассмотрение **среднюю по сечению скорость** потока, которую можно найти по измеренному расходу

$$, \text{ откуда } Q = V_{cp} \omega.$$

$$V_{cp} = \frac{Q}{\omega}$$

Основываясь на законе сохранения вещества, на предположении о неразрывности (сплошности) потока и на свойстве непроницаемости трубки тока, для стационарного течения несжимаемой жидкости можно утверждать, что объемный расход во всех сечениях элементарной струйки один и тот же:

$$dQ = V_1 d\omega_1 = V_2 d\omega_2 = \text{const (вдоль струйки)}.$$

Это уравнение объемного расхода для элементарной струйки.

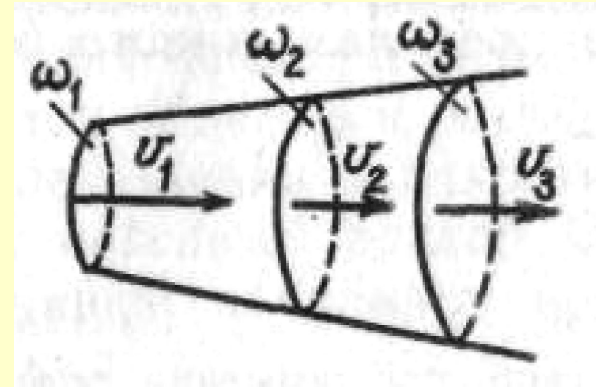
Аналогичное уравнение можно записать и для потока конечных размеров, ограниченного непроницаемыми стенками, только скорости следует брать средние

$$Q = V_{cp1} \omega_1 = V_{cp2} \omega_2 = V_{cp3} \omega_3 = \text{const (вдоль потока)}.$$

Это уравнение получило название - **уравнение неразрывности потока**

Из последнего уравнения следует, что средние скорости в потоке несжимаемой жидкости обратно пропорциональны площадям живых сечений:

$$\frac{V_{cp1}}{V_{cp2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$



Уравнение неразрывности потока – это частный случай закона сохранения вещества для условий неразрывности потока.