

Кубанский государственный технологический университет
Институт компьютерных систем и информационной безопасности
Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина
Электротехника

Лекция № 9

Резонанс в
электрических цепях

Учебные вопросы:

1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.
2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.
3. Полоса пропускания колебательного контура.

Литература:

1. Нефедов В.И.. Основы радиоэлектроники и связи: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2005 г, с. 219 – 226
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

Общие положения резонансных явлений в цепях переменного тока

Амплитуды колебаний токов и напряжений в цепях переменного тока зависят от многих факторов: параметров цепи, амплитуды приложенного (входного) напряжения, и самое главное, при наличии в цепи реактивных элементов они зависят от частоты приложенного напряжения (воздействия)

Резонанс является одним из самых распространенных в природе физических явлений.

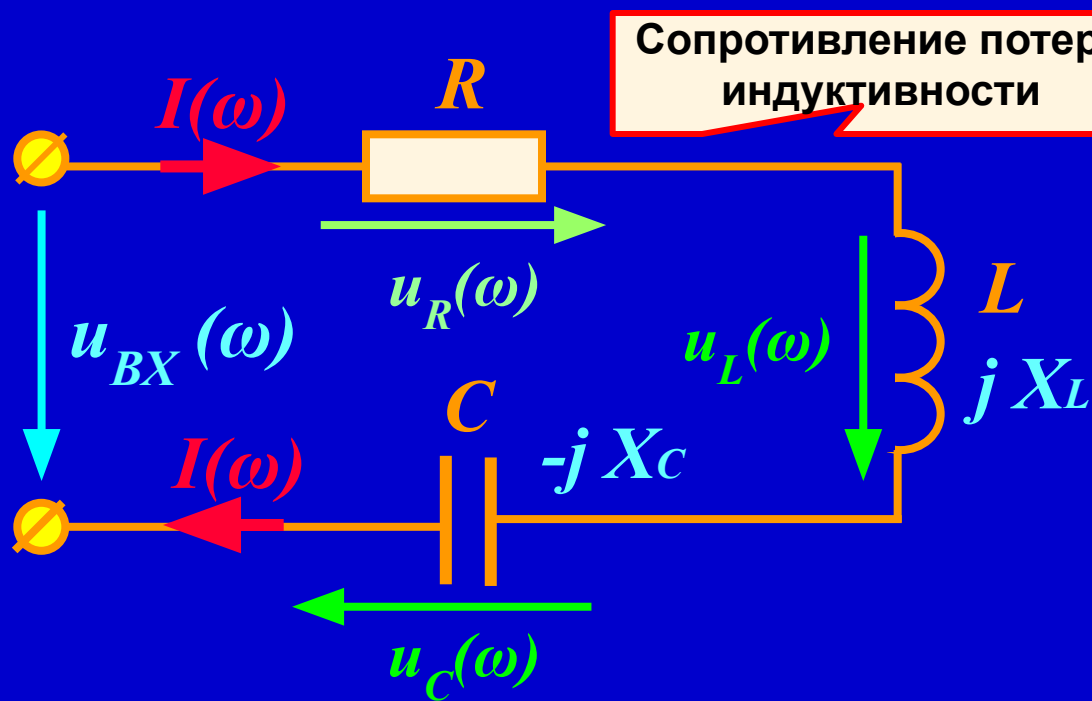


Явление резонанса можно наблюдать в механических, электрических и даже тепловых системах.

Электрическая цепь в которой может возникнуть резонанс называется *колебательным контуром*

1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура

Резонанс напряжений возможен на участке ЭЦ, содержащей последовательно соединенные : резистивный - R , индуктивный - L и емкостной - C элементы.



$$Z(j\omega) = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C)$$

Полное комплексное сопротивление цепи

Действующее значение тока в цепи

$$\dot{I} = I(j\omega) = I \cdot e^{j\varphi_I} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U}}{Z \cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j\varphi_I} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j\varphi_I}$$

$$Z = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

**Модуль полного
сопротивления цепи**

$$\varphi_Z(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}, & (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}) \geq 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}, & (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}) < 0 \end{cases}$$

Аргумент Z характеризует сдвиг фаз между U и I

Режим работы колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистивный - R , индуктивный - L и емкостной - C элементы, при котором ток в контуре и приложенное к контуру напряжение совпадают по фазе называется резонансом напряжений

$$I = I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \rightarrow \max$$

Частота входного воздействия ω при которой реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю называется резонансной частотой - ω_0

При резонансе $\phi = 0$, если $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C = 0$, что может быть выполнено лишь для некоторой частоты $\omega = \omega_0$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Leftrightarrow \omega_0^2 LC = 1$$

$$I_0 = I(\omega_0) = I_{\max} = \frac{U}{R}$$

Таким образом, в последовательном контуре из множества токов с различными частотами выделяется ток, только одной определенной частоты – ток резонансной частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \rightarrow \text{или} \rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Реактивные сопротивления контура на резонансной частоте ω_0 равны друг другу.

$$X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \rightarrow \text{Ом}$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \rightarrow \text{Ом}$$

Характеристическое (волновое) сопротивление контура

Резонансные свойства (избирательность) контура характеризуются добротностью

$$Q = \frac{\rho}{R} \quad \text{или} \quad d = \frac{1}{Q}$$

Пример: Пусть $U = 12 \text{ В}$, $X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) = 500 \text{ Ом}$, $R = 6 \text{ Ом}$.

Значение тока на резонансной частоте

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{12}{6} = 2 \text{ А}$$

$$U_{C0} = I_0 \cdot X_C(\omega_0) = U_{L0} = I_0 \cdot X_L(\omega_0) = 2 \cdot 500 = 1000 \text{ В}$$

$$U_{R0} = I_0 R = 2 \cdot 6 = 12 \text{ В}, \rightarrow \text{т. е.} \rightarrow U_C(\omega_0) = U_L(\omega_0) \gg U_{R0}$$

Физический смысл добротности

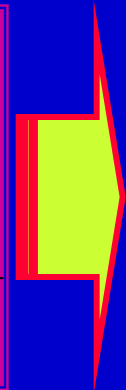
$$\frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = \frac{I_0 \cdot \omega_0 L}{U} = \frac{I_0}{U \cdot \omega_0 C} = \frac{\sqrt{L \cdot C}}{R \cdot C} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C} \cdot R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Добротность показывает, во сколько раз резонансные напряжения на реактивных элементах превышают приложенное напряжение \Rightarrow отсюда и возник термин «резонанс напряжений»

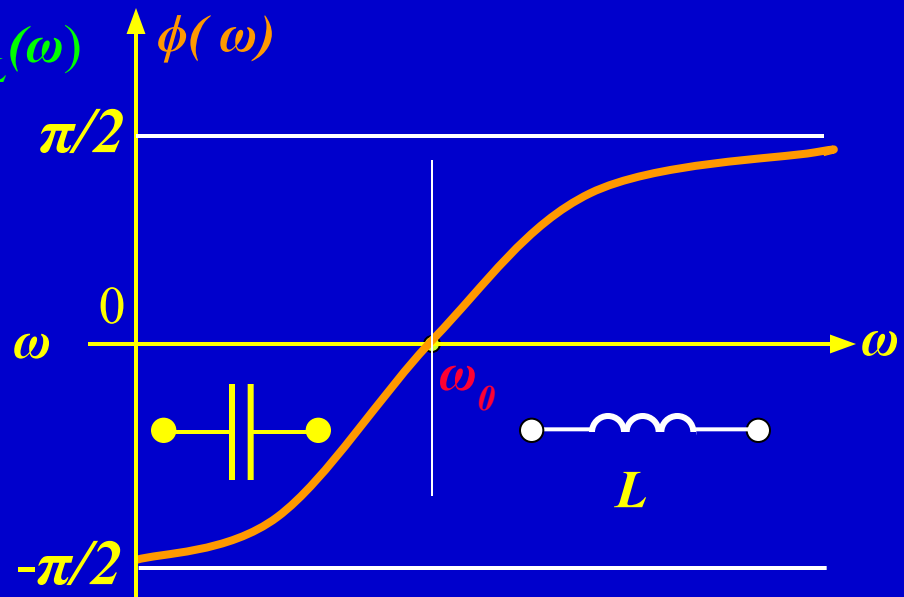
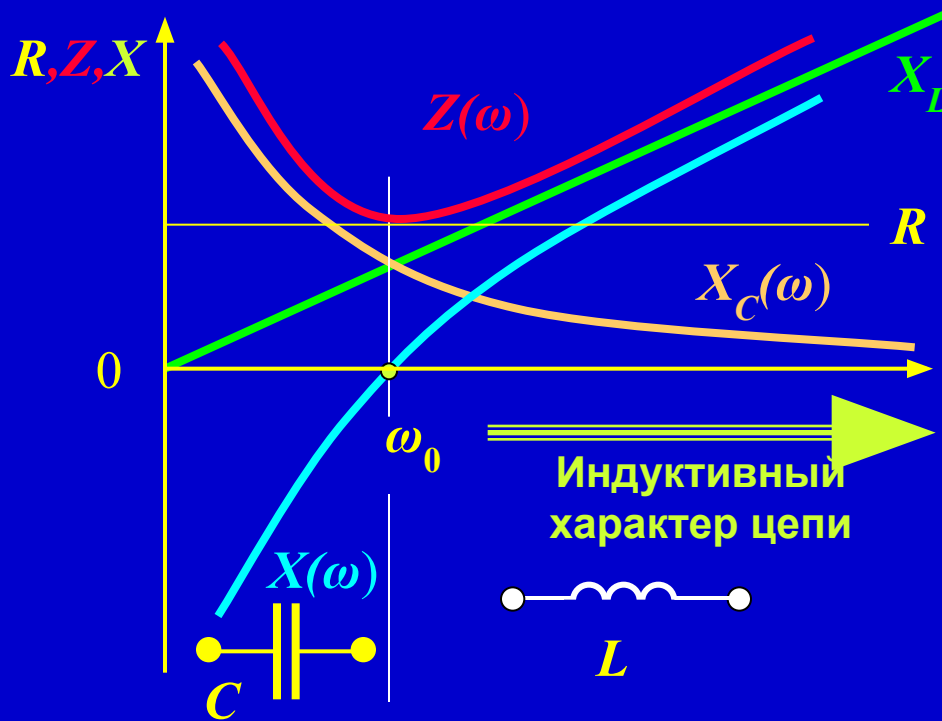
Частотные характеристики последовательного контура

Анализ характера уравнений напряжений и токов в RLC цепи показывает, что они все являются частотно-зависимыми.

$$X_L(\omega) = \omega L, \rightarrow X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}, \rightarrow X(\omega) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \rightarrow \varphi(\omega) = \arctg \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$



$X_L(\omega), X_C(\omega), X(\omega), Z(\omega) \Rightarrow$ частотные характеристики цепи,
 $\varphi(\omega) \Rightarrow$ фазочастотная характеристика цепи



Рассмотрим частотные зависимости действующих значений тока в цепи и напряжений на реактивных элементах контура.

$$I(\omega) = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$



$$I_0 = I_{\max} = \frac{U}{R}, \rightarrow \text{при } \omega = \omega_0$$

Экстремумы на частоте

$$U_L(\omega) = I(\omega)X_L(\omega) = \frac{U \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$



$$\omega_{L0} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \approx \omega_0$$

$$U_C(\omega) = I(\omega)X_C(\omega) = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

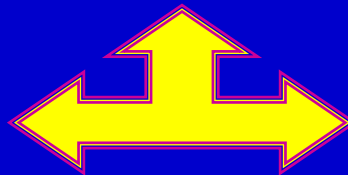


$$\omega_{C0} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0$$

Зависимости $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ – называются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ) относительно тока и напряжений, или резонансными характеристиками.

Для нахождения экстремумов $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ необходимо:

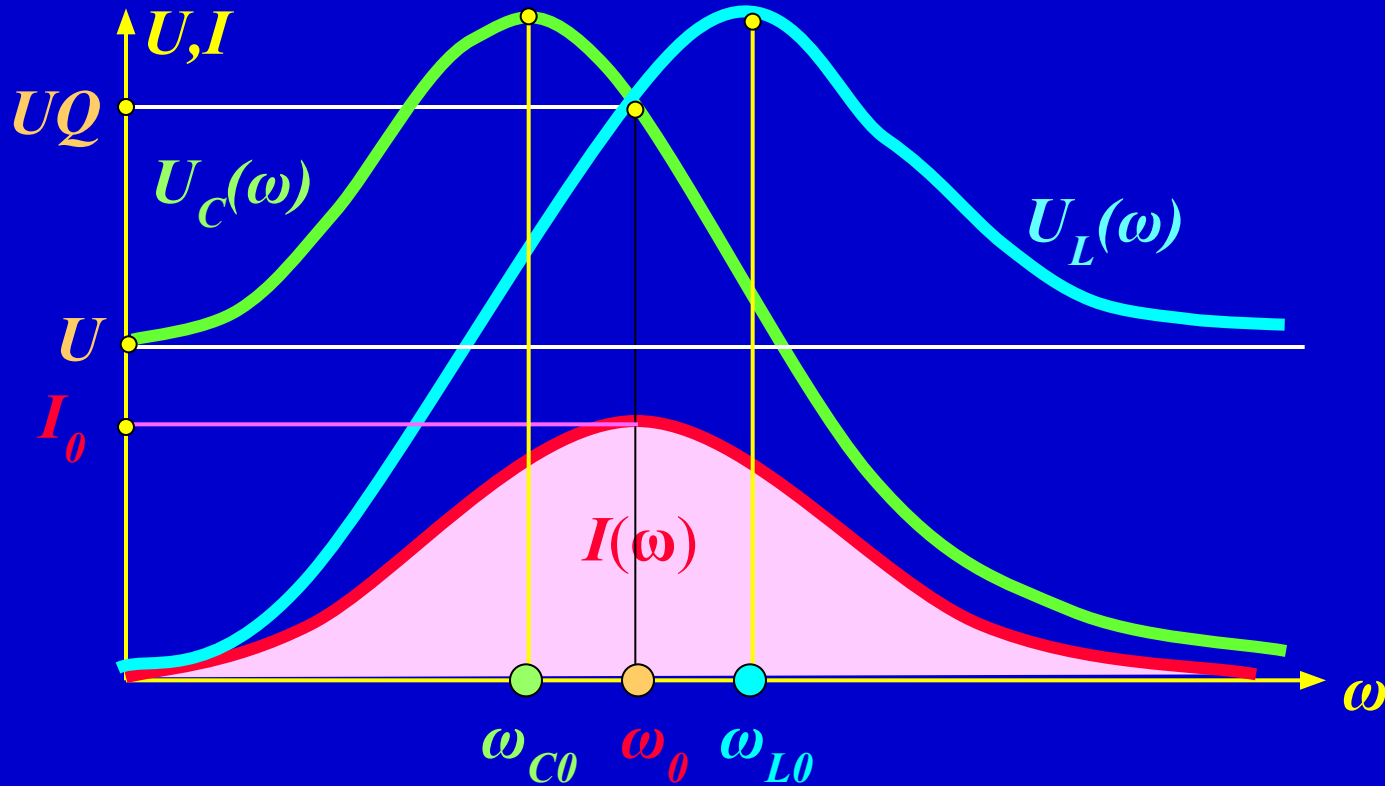
$$\frac{\partial U_L(\omega)}{\partial \omega} = 0$$



$$\frac{\partial U_C(\omega)}{\partial \omega} = 0$$

На частотах ω_{L0} и ω_{C0} напряжения на реактивных элементах контура примут максимальное значение.

$$U_{C\max}(\omega_{C0}) = U_{L\max}(\omega_{L0}) = \frac{2 \cdot U \cdot Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2U}{d\sqrt{4 - d^2}}$$



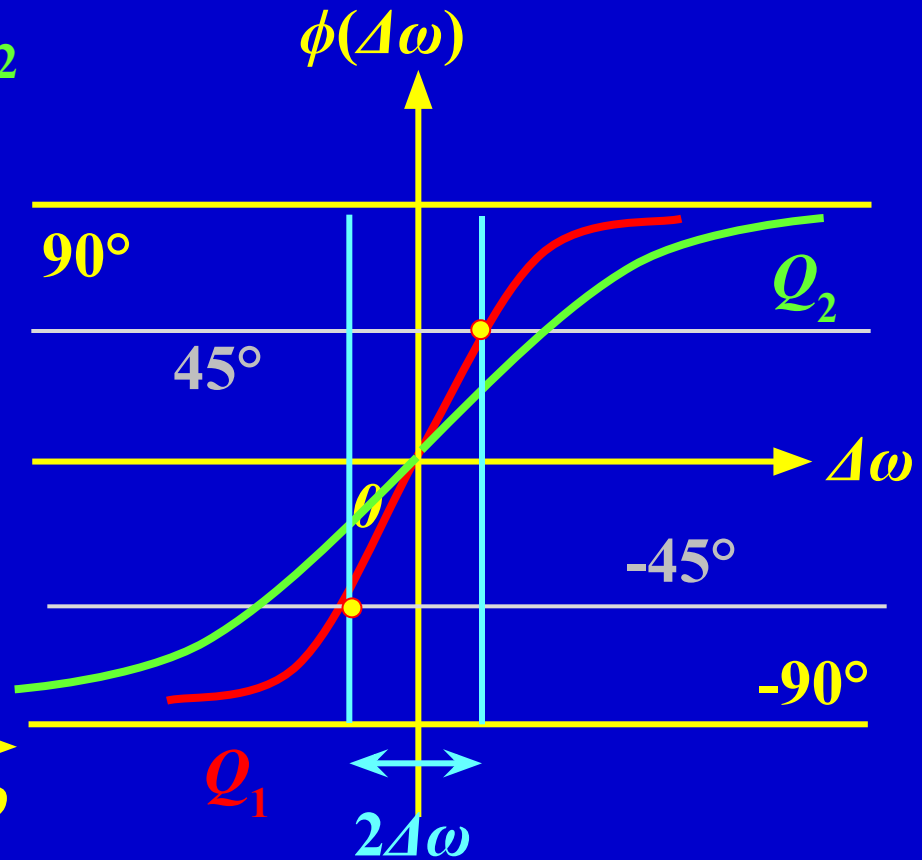
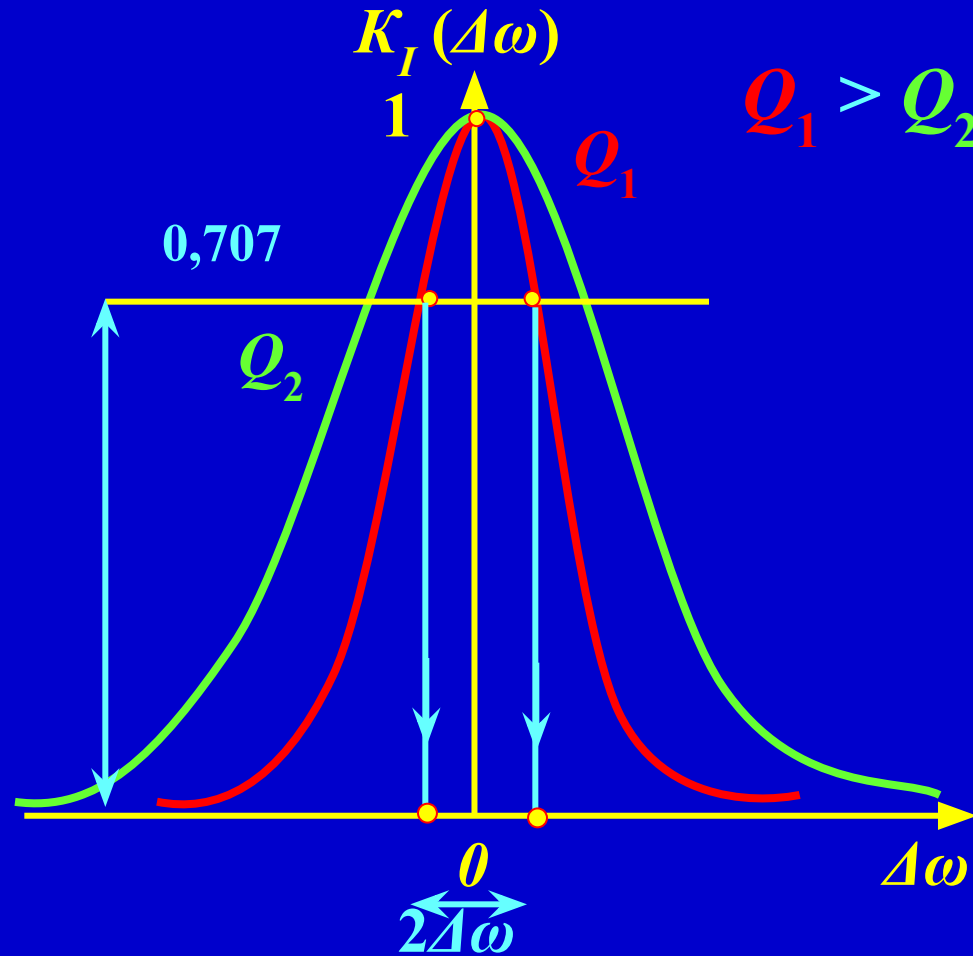
С увеличением добротности контура (уменьшением затухания) частоты ω_{L0} и ω_{C0} сближаются с резонансной частотой ω_0 , при этом I_0 , $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ возрастают и кривые становятся острее.

АЧХ контура

$$K_I(\Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2 \cdot Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}}}$$

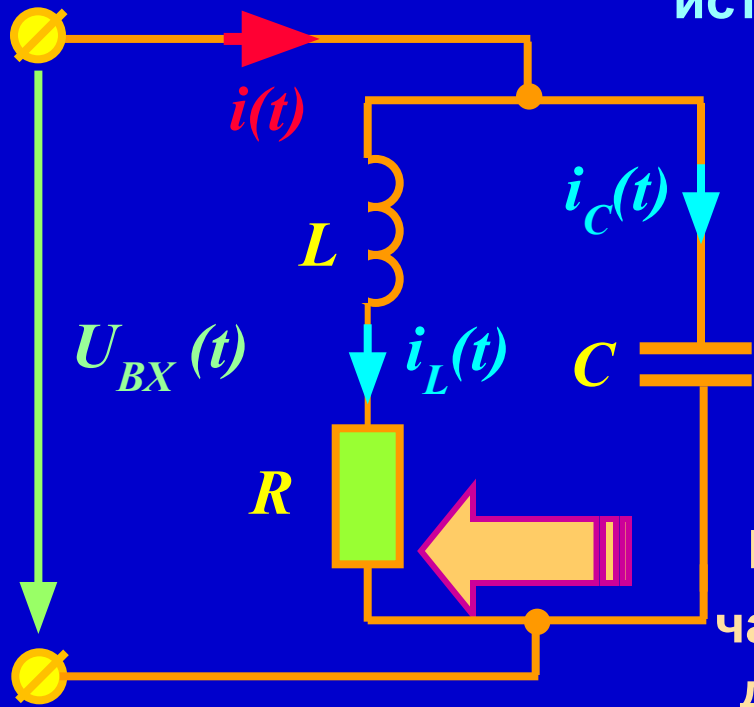
ФЧХ контура

$$\phi(\Delta\omega) = \text{arctg}\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$



2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура

Резонанс токов возможен на участке ЭЦ, в которой катушка индуктивности – L и конденсатор – C включены параллельно источнику сигнала



Сопротивление $R \rightarrow$ потери в контуре

Полное сопротивление контура

$$Z_K(j\omega) = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Вблизи резонансной частоты ω_p и большой добротности контура

$$X_L(\omega_p) = \omega_p L \gg R$$

$$Z_K(j\omega) = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{L/C}{R[1 + j(\omega L - 1/\omega C)]} = \frac{\rho^2}{R \cdot (1 + j \frac{2Q\Delta\omega}{\omega_p})}$$

$$Z_K(j\omega) = \frac{R_0}{(1 + j \frac{2Q\Delta\omega}{\omega_P})}$$

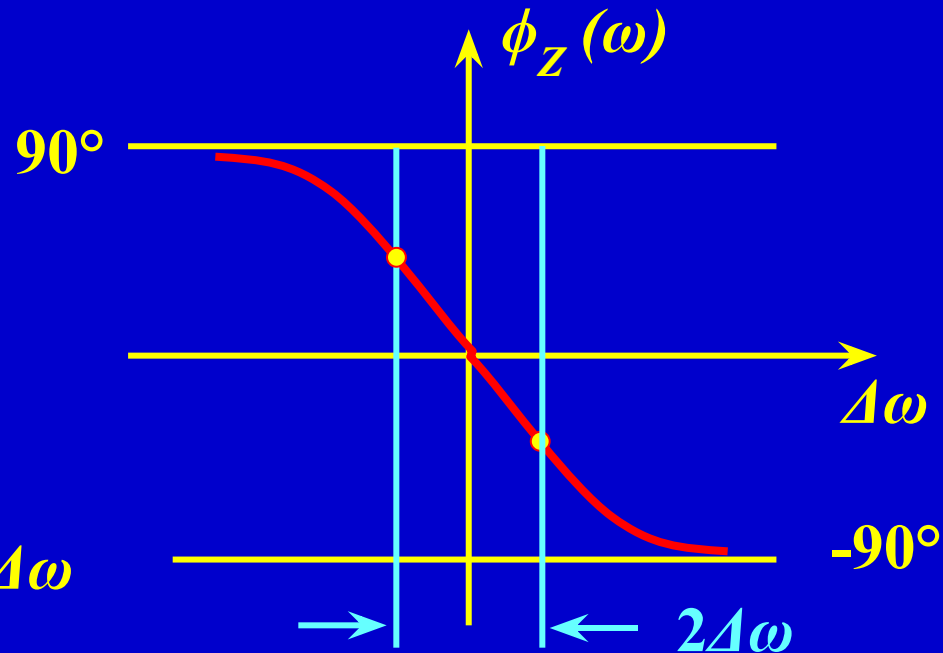
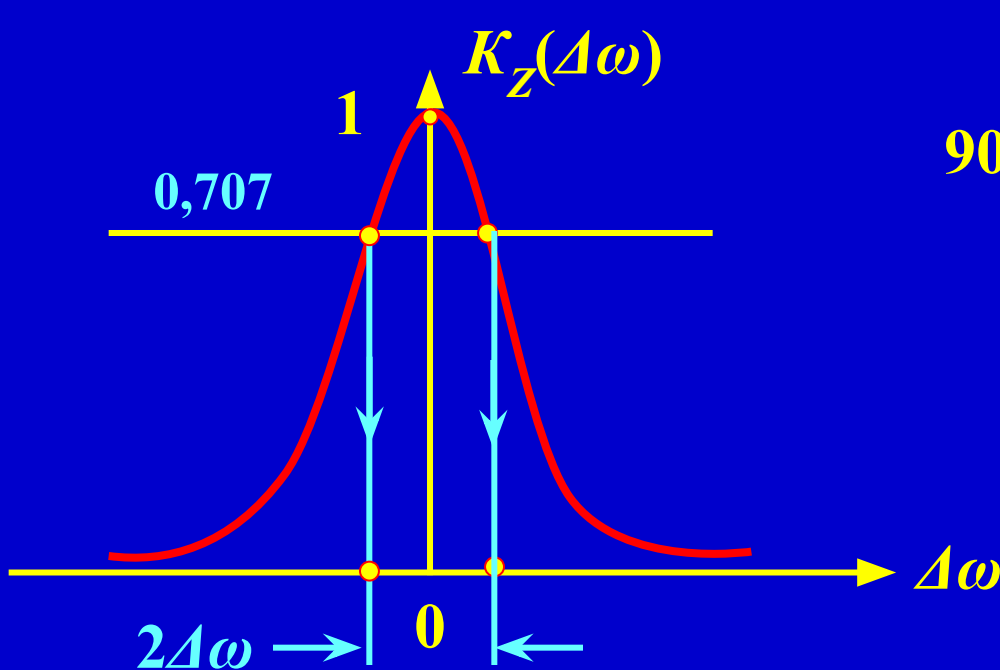
где

$$R_0 = \frac{\rho^2}{R} = \rho \cdot Q = R \cdot Q^2$$

резонансное сопротивление контура

Аналитически АЧХ контура отражается зависимостью нормированного сопротивления модуля входного сопротивления от абсолютной расстройки

$$K_Z(\Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 + (\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_P})^2)}}$$



Ток в неразветвленной части цепи

$$I_0 = U \cdot G_0 = \frac{U}{R_0}$$

R_0 – эквивалентное резонансное сопротивление контура

Режим работы участка цепи с параллельными ветвями, при котором ток в неразветвленной части и напряжение на выводах контура совпадают по фазе называется **резонансом токов**

Токи в параллельных ветвях цепи при резонансе

$$I_L(\omega_0) = \frac{U}{X_L(\omega_0)} = \frac{U}{\sqrt{L/C}} = \frac{U}{\rho}$$

Ток в индуктивной ветви

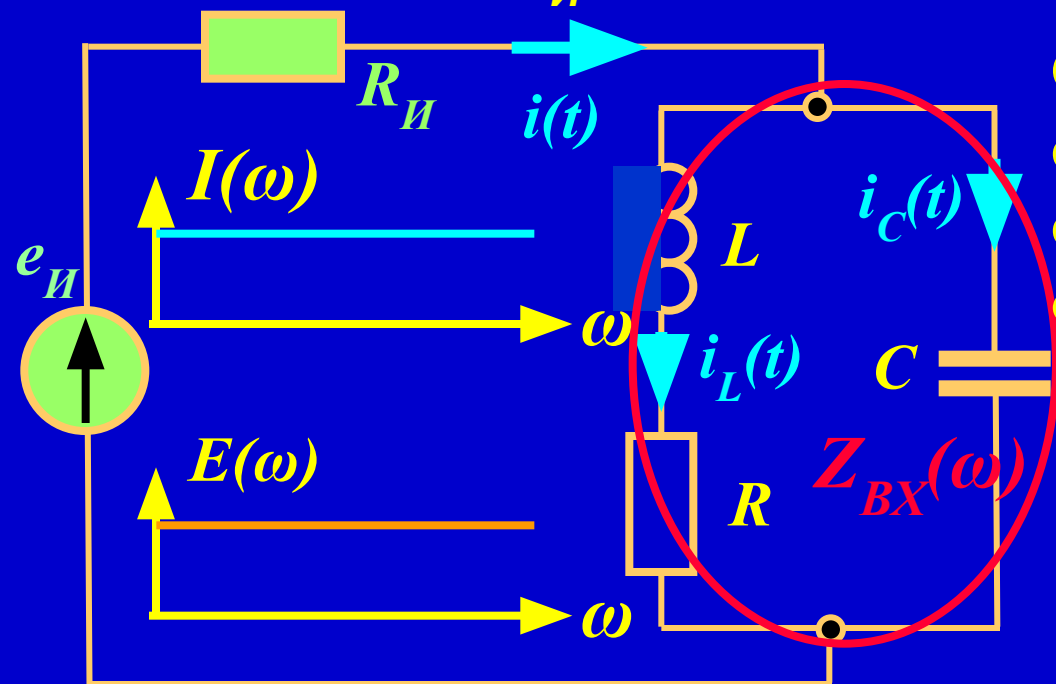
Ток в емкостной ветви

$$I_C(\omega_0) = \frac{U}{X_C(\omega_0)} = \frac{U}{\sqrt{L/C}} = \frac{U}{\rho}$$

$$\frac{I_L(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{I_C(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

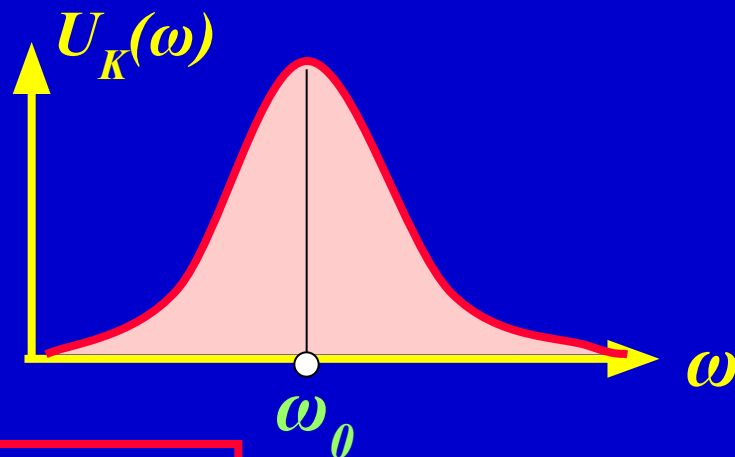
Отсюда возник термин «резонанс токов»

В реальном параллельном колебательном контуре резонансные избирательные характеристики зависят от соотношения сопротивления контура $Z_{BX}(\omega)$ и внутреннего сопротивления источника $R_{И}$ входного сигнала



Сопротивление контура $Z_{BX}(\omega)$ совместно с внутренним сопротивлением источника $R_{И}$ образуют делитель напряжения

1) При $R_{И} > Z_{BX}(\omega)$



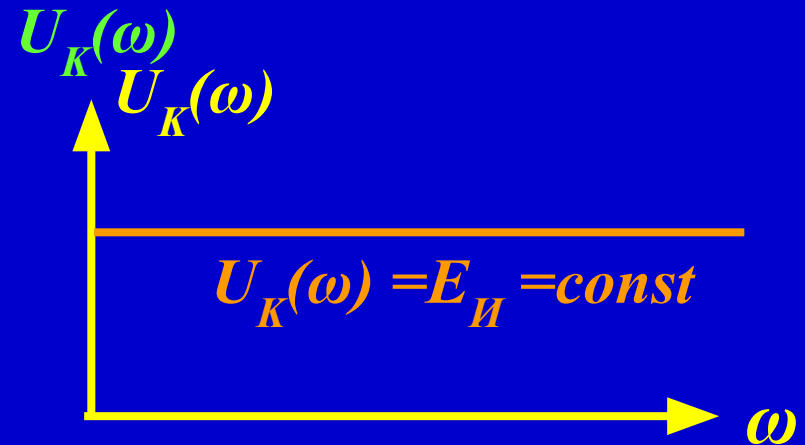
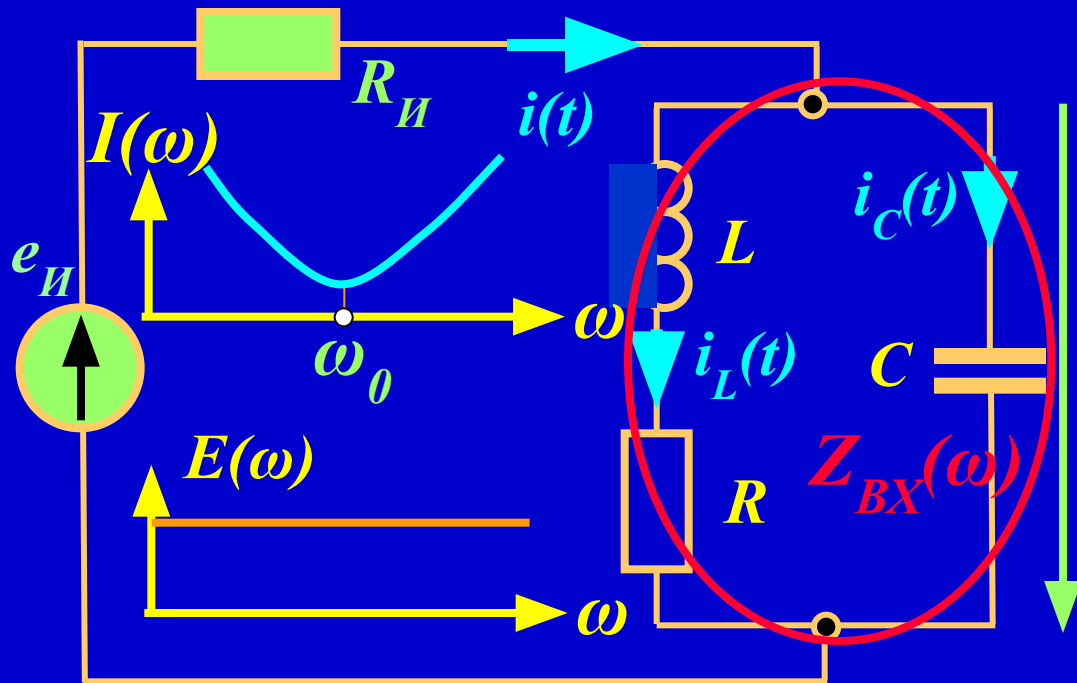
$$I(\omega) = \frac{e_{И}}{R_{И} + Z_{BX}(\omega)} \approx \frac{e_{И}}{R_{И}} \rightarrow const$$

$$U_K(\omega) = \frac{e_{И}}{R_{И}} \cdot Z_{BX}(\omega) \rightarrow var$$

$$K_{ДН}(\omega) = \frac{Z_{BX}(\omega)}{R_{И}} \rightarrow мал$$

Необходимо усиление $U_K(\omega)$

2) При $R_{И} < Z_{ВХ}(\omega)$



Избирательности
входного сигнала нет

**Параллельный
колебательный
контур включают в
цепи, обладающие**

$$R_{И} \boxtimes Z_{ВХ}(\omega)$$

$$I(\omega) = \frac{e_I}{R_{И} + Z_{ВХ}(\omega)} \approx \frac{e_I}{Z_{ВХ}(\omega)} \rightarrow \text{var}$$

$$U_K(\omega) = \frac{e_I}{Z_{ВХ}(\omega)} \cdot Z_{ВХ}(\omega) = e_I = \text{const}$$

3. Полоса пропускания колебательного контура

Способность колебательного контура выделять сигналы заданной частоты и уменьшать (подавлять) сигналы всех других частот называется избирательностью

Контур с лучшей избирательностью обладает большей добротностью

Избирательность характеризуется формой амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура

Полосой пропускания называется область частот, вблизи резонансной частоты, в пределах которой и модуль коэффициента передачи уменьшается в заданное число раз (чаще всего в $\sqrt{2}$ раз).

□ Последовательный колебательный контур

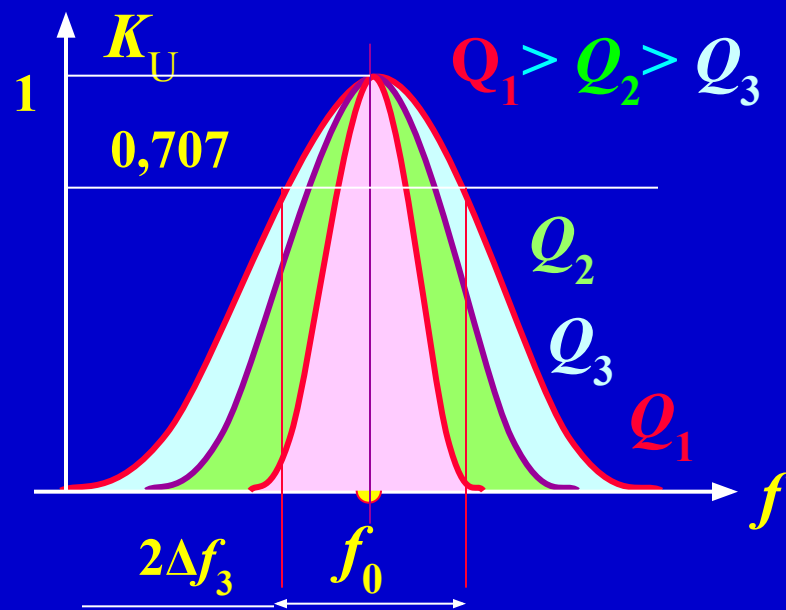
Нормированная АЧХ ($U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{С}}$)

$$K_U = \frac{K(f)}{K(f_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q\Delta f / f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

Полоса пропускания

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \rightarrow [\Gamma\text{ц}]$$

$$2\Delta f \uparrow = \frac{f_0}{Q \downarrow} = \frac{f_0 \cdot (R + R_H) \uparrow}{\rho} \rightarrow \frac{f_0 \cdot (R + R_i)}{\rho}$$



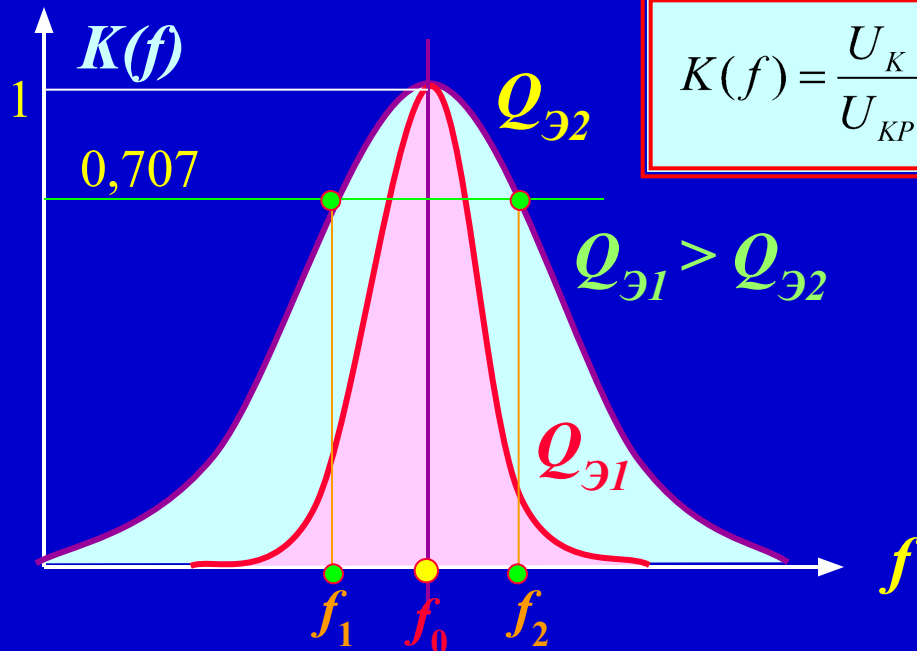
□ Параллельный колебательный контур

Обобщенная расстройка

$$\xi_{\text{об}} = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Полоса пропускания параллельного контура определяется

$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_{\text{э}}} = \frac{f_0 \cdot (1 + R_{0\text{э}}/R_i)}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\rho}{R}; Q_{\text{э}} = \frac{Q}{1 + R_{0\text{э}}/R_i}$$



$$K(f) = \frac{U_K}{U_{\text{кр}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{\text{э}}^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

Граничные частоты

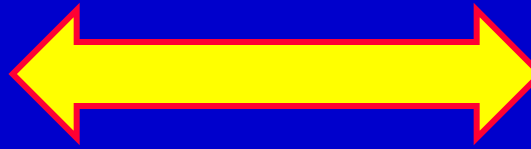
$$f_{1,2} = \frac{f_0}{2Q_{\text{э}}} (\sqrt{1 + 4Q_{\text{э}}^2} \pm 1)$$

$$2\Delta f = |f_2 - f_1|$$

Расширение полосы пропускания

На практике в ряде случаев требуется существенно расширить полосу пропускания контура, не изменяя его резонансной частоты. ($Q \downarrow \rightarrow R$) или ($\rho \downarrow$ - применяется редко \rightarrow необходимо изменять одновременно L и C)

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \rightarrow [\Gamma\Omega]$$



$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_{\text{Э}}} = \frac{f_P}{Q_{\text{Э}}}$$

Практически часто уменьшают добротность за счет увеличения активного контура двумя путями:

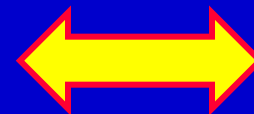
- ❑ шунтированием контура резистором $R_{\text{ш}}$ (параллельный КК)
- ❑ введением в контур добавочного сопротивления $R_{\text{д}}$ (последовательный КК);

Сопротивление добавочного резистора рассчитывают по

$$R_{\text{д}} = \frac{2\Delta f_{\text{ТРЕБ}} \cdot \rho}{f_0}$$

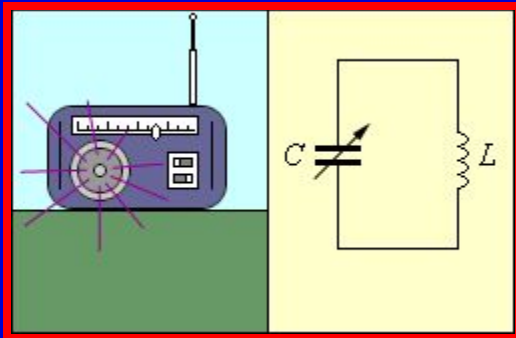
Подключение к контуру шунтирующего резистора $R_{\text{ш}}$ эквивалентно включению последовательно с элементами контура добавочного резистора $R_{\text{д}}$

$$R_{\text{ш}} = \frac{\rho^2}{R_{\text{д}}}$$

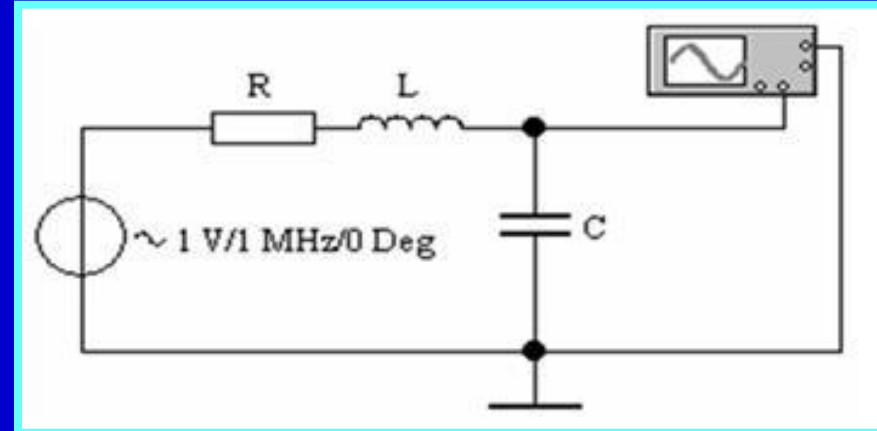
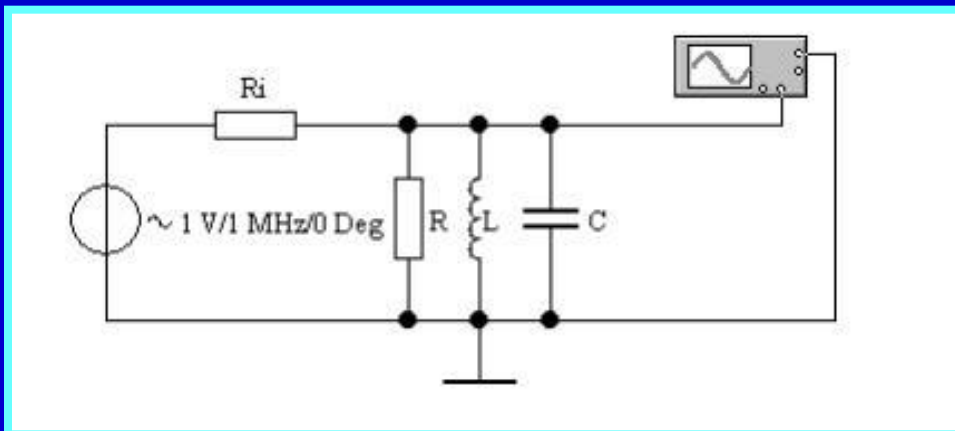


$$R_{\text{д}} = \frac{\rho^2}{R_{\text{ш}}}$$

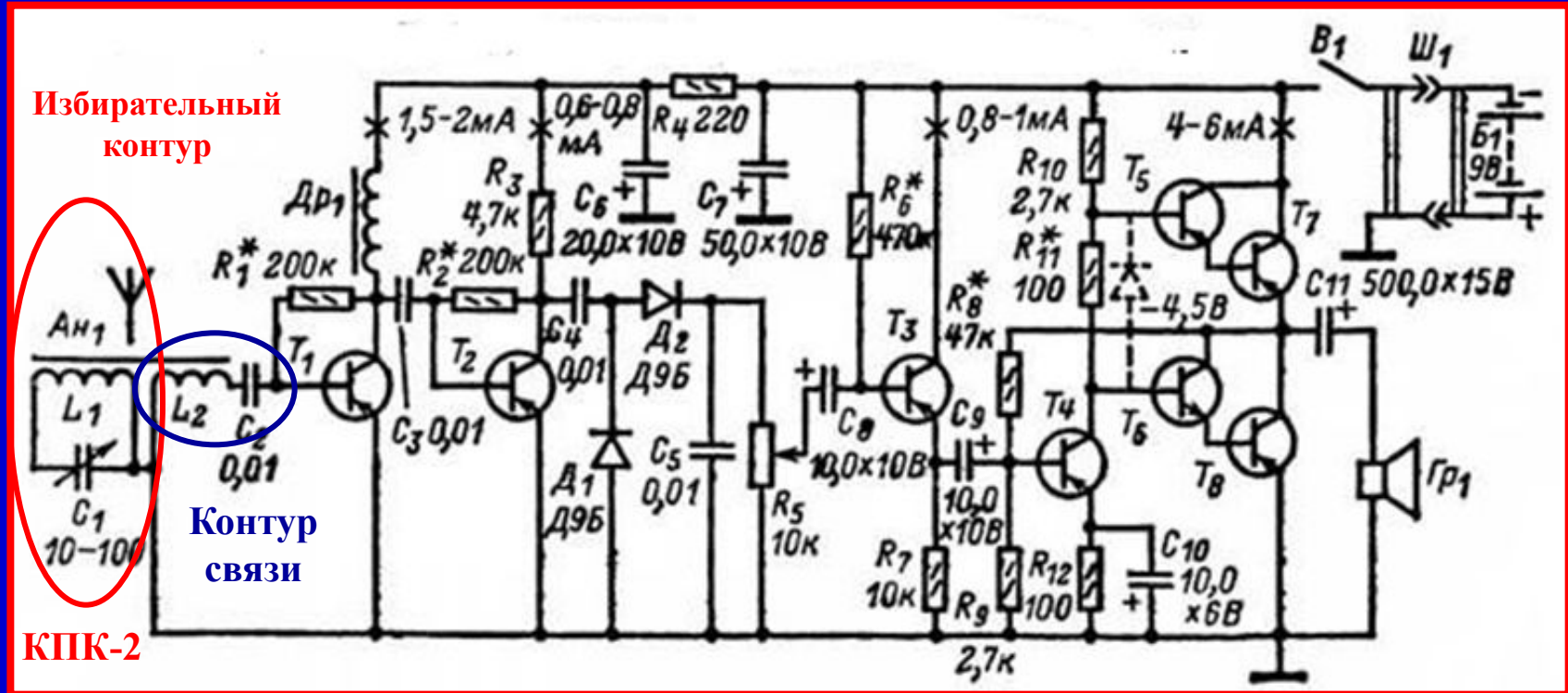
Практические схемы входных избирательных цепей приемных устройств электроники



Модели для исследования избирательных входных цепей (контуров)

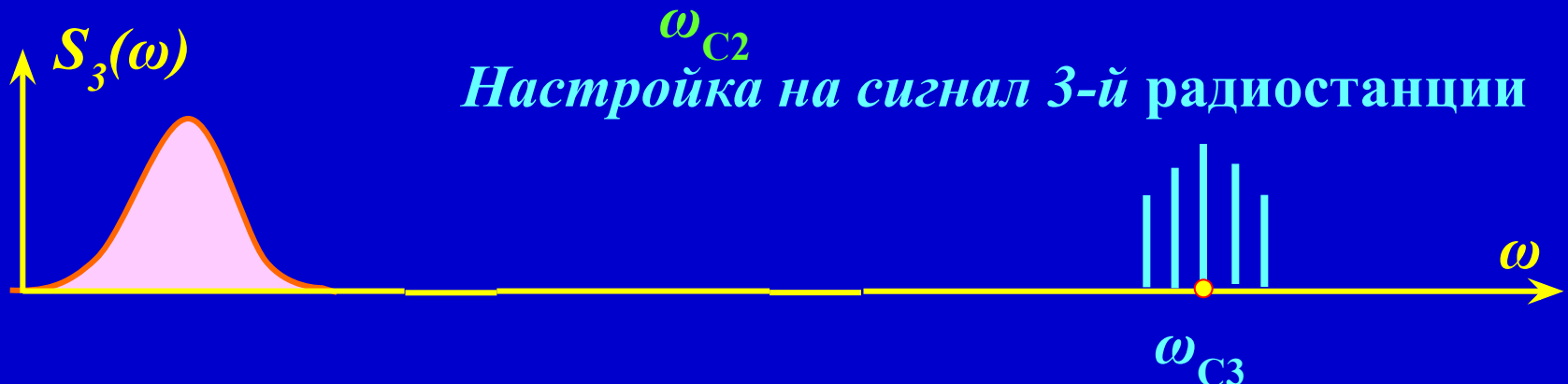
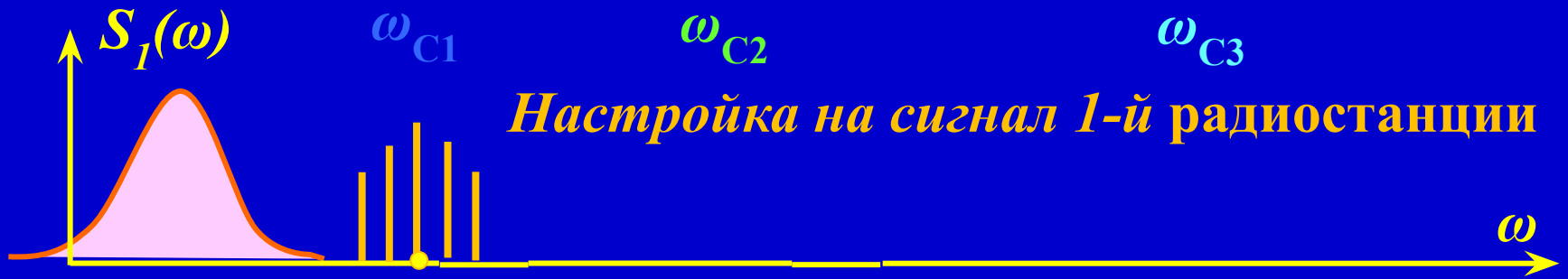
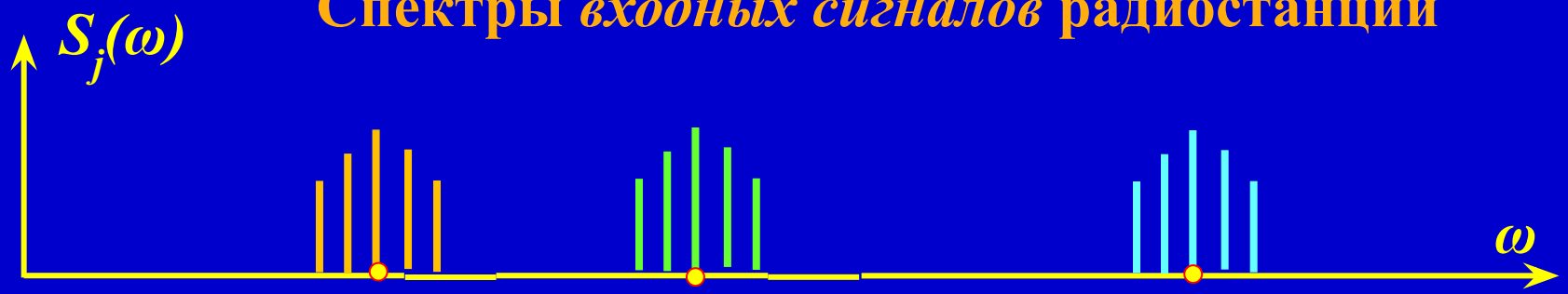


Однодиапазонный КВ приемник



Входной контур приемника, может быть настроен на частоты 3-х радиостанций, образует катушка $L1$ магнитной антенны $Ан1$ и конденсатор переменной емкости $C1$. Через катушку связи $L2$ и разделительный конденсатор $C2$ сигнал радиостанции, на которую настроен контур магнитной антенны, подается на базу транзистора $T1$ первого каскада усилителя высокой частоты.

Спектры входных сигналов радиостанций



Задание на самостоятельную работу

Литература:

1. Нефедов В.И.. Основы радиоэлектроники и связи: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2005 г, с. 219 – 226
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.