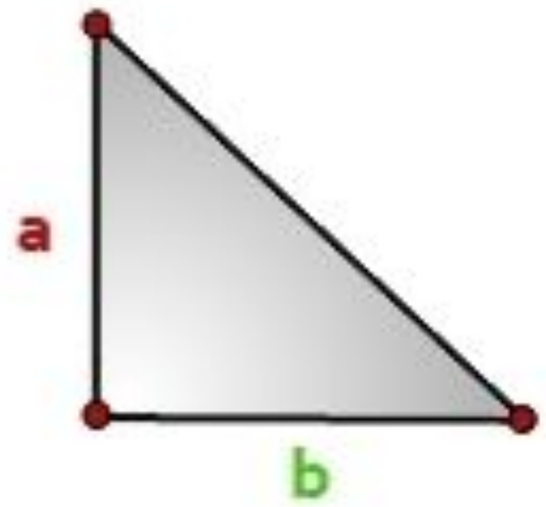
ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Повторення

Площа прямокутного трикутника



Якщо відомі катети, то можемо скористатися цією формулою

$$S = \frac{1}{2}ab$$

ЗадачаДомашнє завдання: 1: Знайдіть площу прямокутного трикутника катети якого дорівнюють 4 см і 3 см

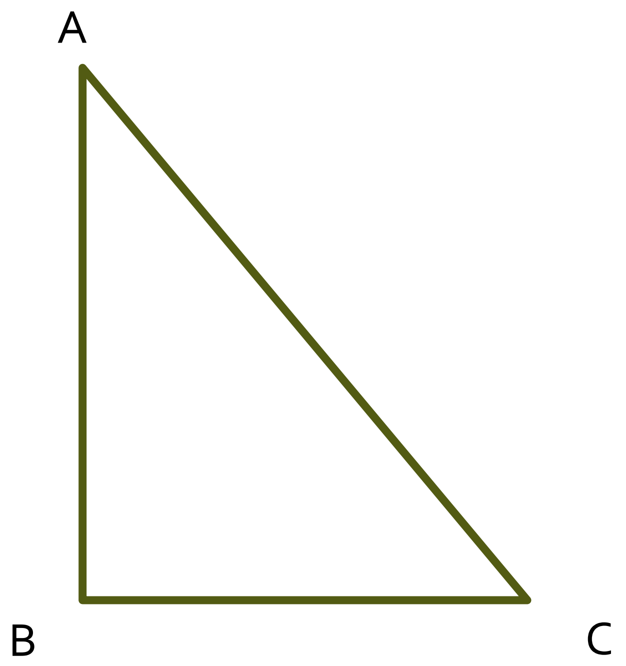
- Нехай ABC – даний трикутник. (кут B = 90°)

Тоді ми можемо скористатися формулою

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{12}{2} = 6(\text{см}^2)$.

Відповідь: 6 см^2.



Задача 2: Дано трикутник ABC, AB=6 см, а висота проведена до цієї сторони CH=4 см. Знайти площу трикутника

- **Дано:** ABC – трикутник, AB=6см,CH=4см.

Знайти: S_{ABC}

Розв'язання:

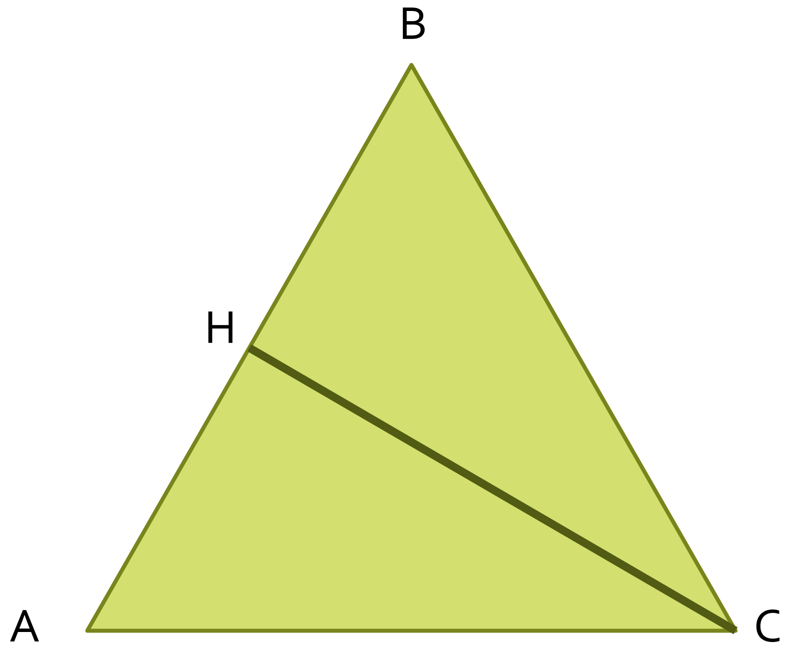
$S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a$

AB=a=6 см

CH=h_a=4см

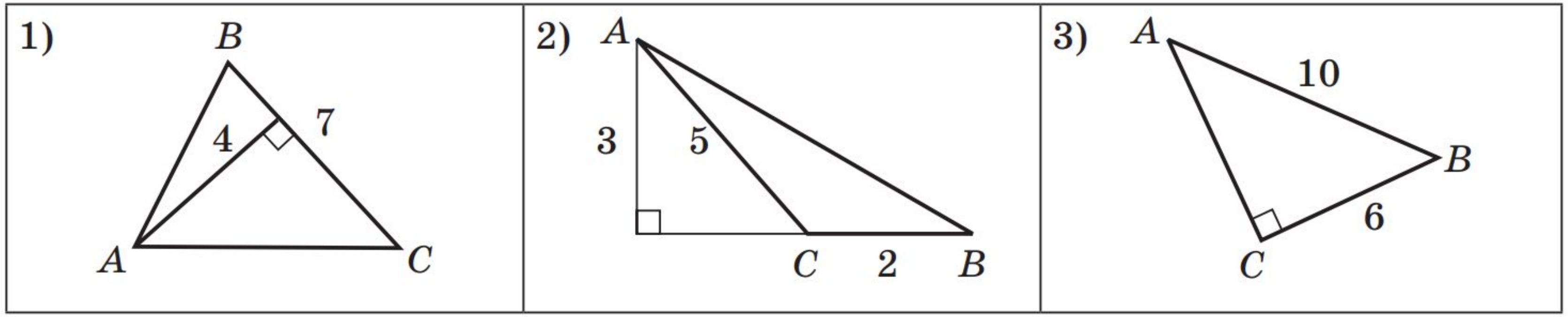
$S_{ABC}=\frac{1}{2}6\cdot4=\frac{24}{2}=12\ (\text{см}^2).$

Відповідь: 12 см^2.



$$S = \frac{1}{2} a h_a,$$

Знайдіть площу трикутника



14

3

24

Задача 3: Площа трикутника дорівнює 30 $см^2$, а одна з його висот – 8см. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

Дано: S=30 $см^2$, h=8см.

Знайти: а

Розв'язання:

Нехай ABC даний трикутник.

Тоді $S_{ABC} = 30см^2$,

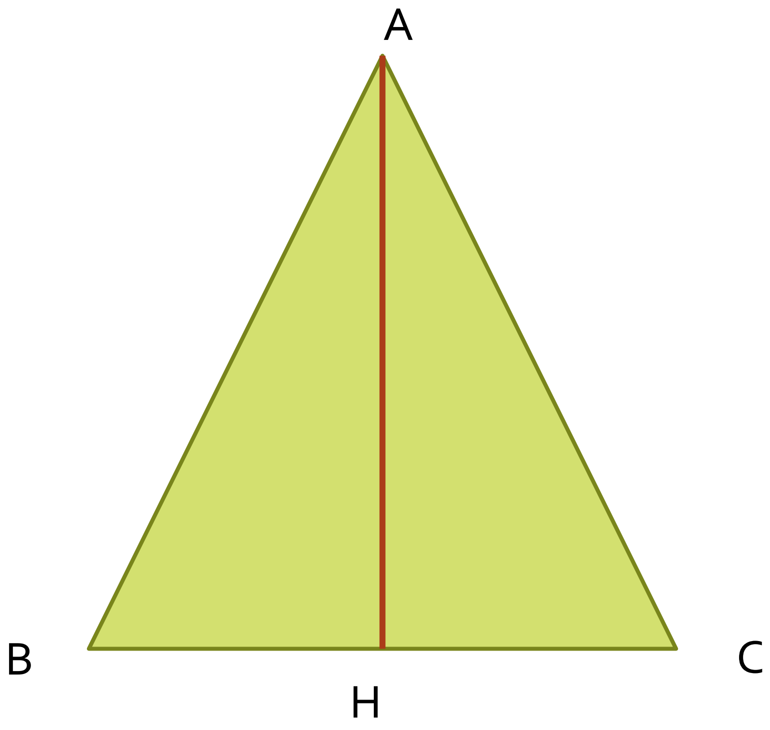
AH=h=8см.

$S_{ABC}=\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$

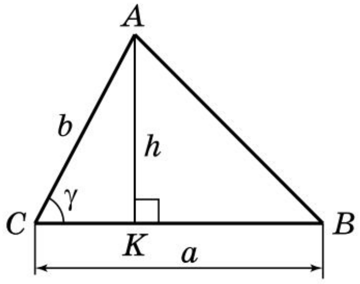
$30=\frac{1}{2} \cdot BC \cdot 8$

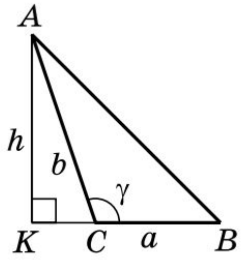
$BC=\frac{30 \cdot 2}{8} = 7{,}5(см)$

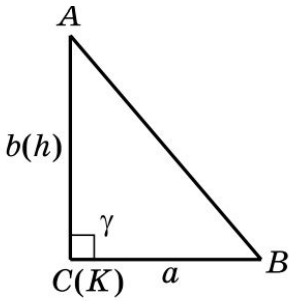
Відповідь: 7,5 см.



Т е о р е м а 1 (формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними). **Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.**







Д о в е д е н н я. Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$, S – площа трикутника. Доведемо, що

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Проведемо у трикутнику висоту AK, $AK = h$. Тоді

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Якщо кут C – гострий (мал. 119), то із трикутника ACK маємо: $h = AK = AC\sin C = b\sin\gamma$.

Якщо кут C – тупий (мал. 120), то із трикутника ACK маємо: $h = AK = AC\sin ACK = b\sin(180 - \gamma) = b\sin\gamma$.

Якщо кут C – прямий (мал. 121), то $h = AK = AC = b = b \cdot 1 = b\sin 90^\circ = b\sin\gamma$.

Отже, в усіх випадках $h = b\sin\gamma$, тобто

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \ ▲$$

5

611. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\gamma = 30°$;

2) $a = 7$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 120°$.

Задача 1. Знайти площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a.

Оскільки всі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по $60°$, маємо:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Т е о р е м а 2 (формула Герона). **Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна знайти за формулою:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ **– півпериметр трикутника.**

Д о в е д е н н я. Скористаємося формулою $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$.

За теоремою косинусів: $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$.

Тоді $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)} =$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2-(a^2-2ab+b^2))(a^2-2ab+b^2-c^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)}}{ab} =$$

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)} =$$

$$= \frac{1}{2ab} \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{c - a + b}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a + b + c}{2}}.$$

Але $\frac{c + b - a}{2} = \frac{a + b + c - 2a}{2} = \frac{a + b + c}{2} - a = p - a.$

Аналогічно $\frac{c + a - b}{2} = p - b,$ $\frac{a + b - c}{2} = p - c.$

Тоді $\sin\gamma = \frac{1}{2ab} \cdot 4 \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} =$

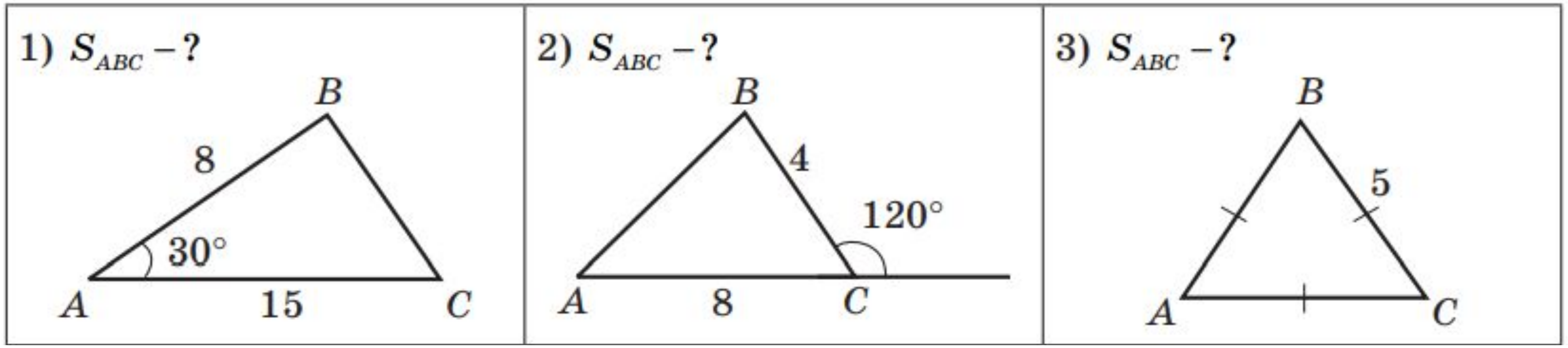
$$= \frac{2}{ab}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{ab}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \blacktriangle$$

620. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 11 см, 25 см і 30 см.

628. Знайдіть найменшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

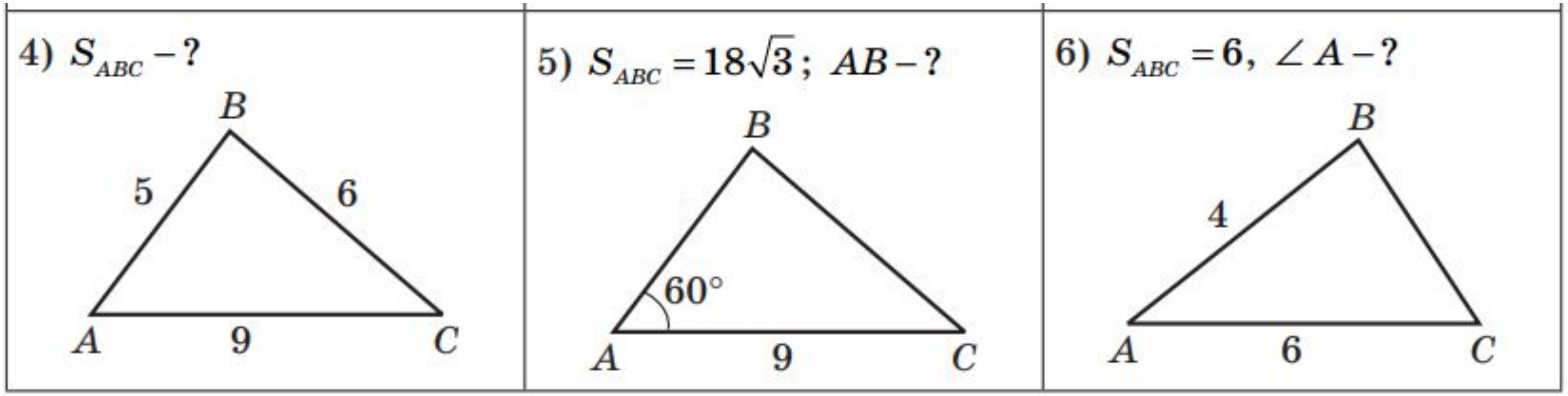


30

$8\sqrt{3}$

$\frac{25\sqrt{3}}{4}$

Домашнє завдання:



$10\sqrt{2}$

8

30° або 150 °

Бажаю вам успіхів!