

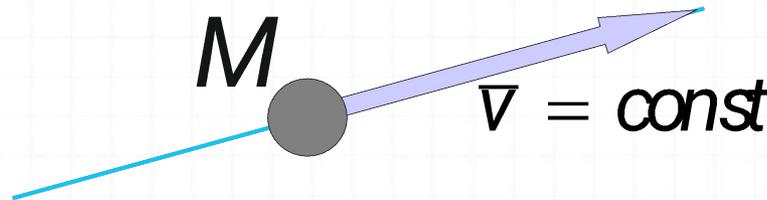
Динамика материальной точки

Динамика есть раздел теоретической (классической) механики, который изучает движение материальных тел и их систем под действием приложенных к ним сил.



Аксиомы динамики материальной точки

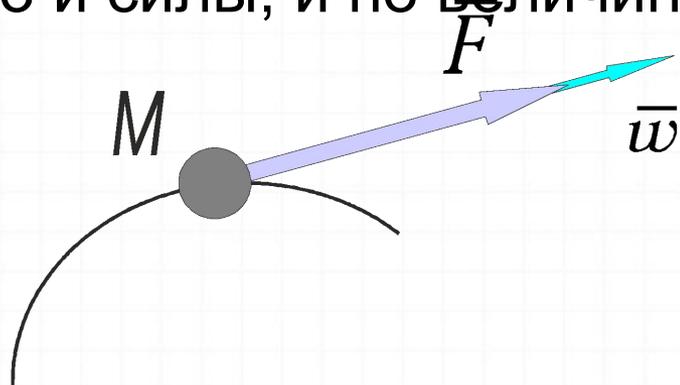
- **Закон инерции:** Материальная точка движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока действие других тел не выведет ее из этого состояния.



Свойство материальной точки сохранять прямолинейное и равномерное движение называется инерцией, а соответствующее движение точки - движением по инерции.

Аксиомы динамики материальной точки

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки): Ускорение, которое материальная точка получает под действием приложенной к ней силы, имеет то же направление, что и силы, и по величине пропорционально силе.



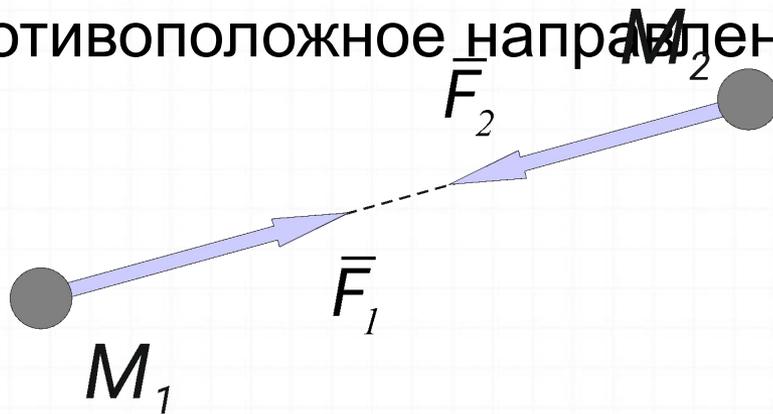
$$m\bar{w} = \bar{F}$$

Масса есть мера инертности точки – чем больше масса точки, тем большая нужна сила, чтобы изменить скорость этой точки.

Аксиомы динамики материальной точки

Закон равенства действия и противодействия:

Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, имеют равную величину, общую линию действия и противоположное направление.

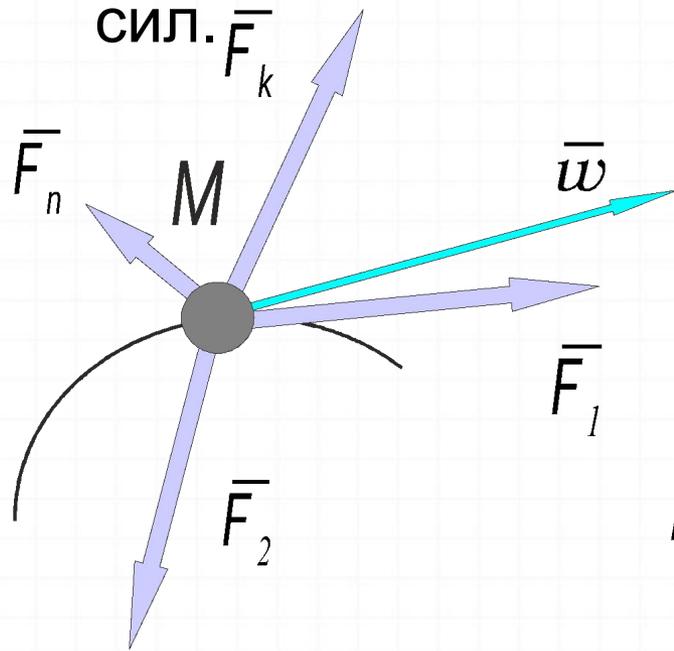


$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

Этот закон выполняется при взаимодействии тел, если они соприкасаются в одной точке. Если взаимодействие тел происходит по поверхности или в некотором объеме, то оно не будет сводиться к одной силе.

Аксиомы динамики материальной точки

- **Закон независимости действия сил:** Ускорение, получаемое точкой под действием нескольких приложенных к ней сил, равно ускорению, которое получит эта точка под действием одной силы, равной геометрической сумме всех приложенных сил.

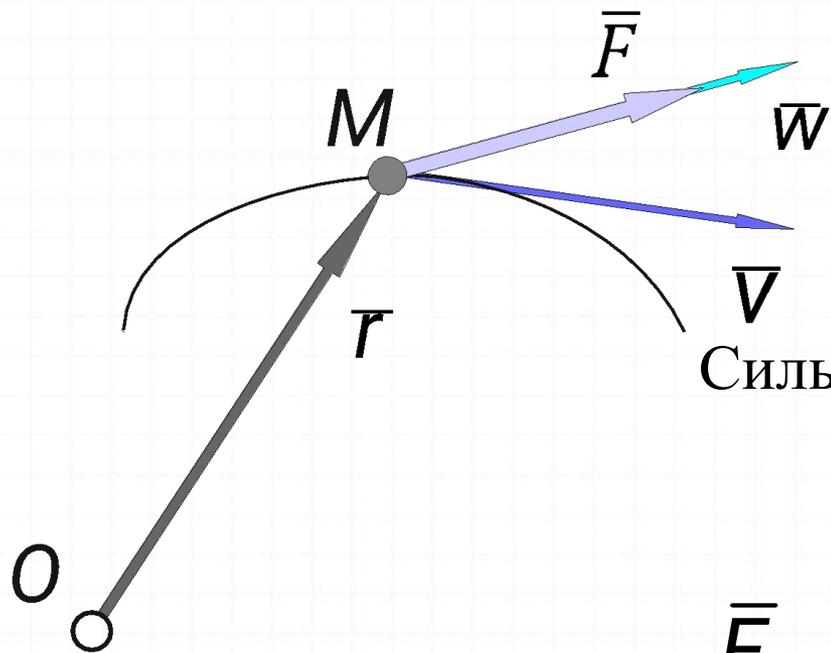


$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \Rightarrow m\vec{w} = \vec{R}$$

$$m\vec{w}_k = \vec{F}_k \Rightarrow \vec{w} = \sum_{k=1}^n \vec{w}_k$$

Основное уравнение динамики материальной

ТОЧКИ



$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \bar{\mathbf{F}} \left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

Силы, зависящие от положения точки

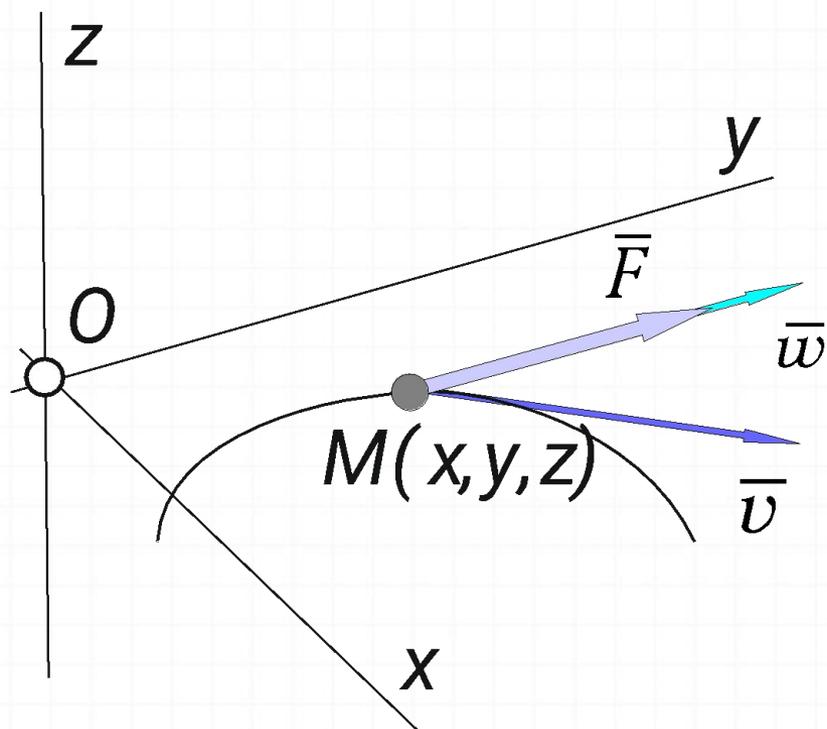
$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{упр}} = -c\mathbf{r}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{грав}} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}$$

Силы, зависящие от скорости точки

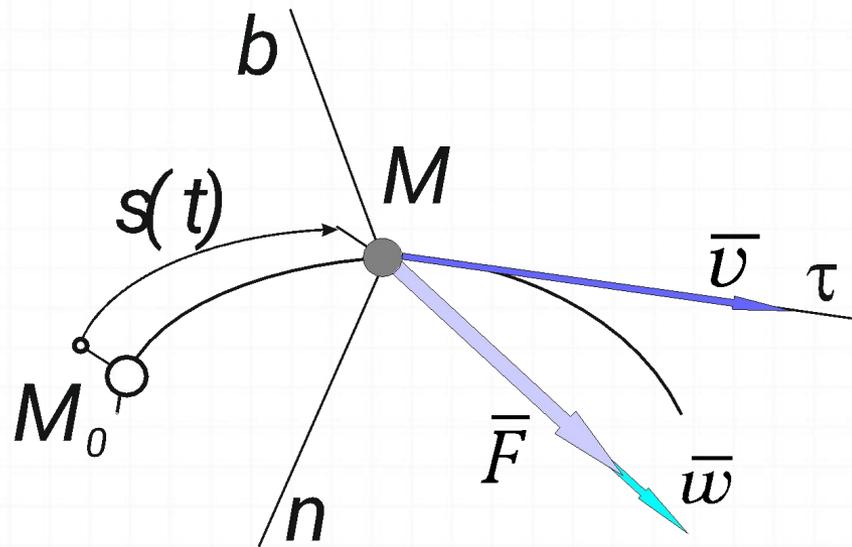
$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{тр}} = -\mu M \frac{\mathbf{v}}{v} \quad \bar{\mathbf{F}}_{\text{сопр}} = -k\mathbf{v} \quad \bar{\mathbf{F}}_{\text{сопр}} = -kv^2 \frac{\mathbf{v}}{v}$$

Основное уравнение динамики материальной точки



$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases}$$

Основное уравнение динамики материальной точки



$$\left\{ \begin{array}{l} m w_\tau = m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(t, \dot{s}, s); \\ m w_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(t, \dot{s}, s); \\ m w_b = 0 = F_b(t, \dot{s}, s). \end{array} \right.$$

Основные задачи динамики материальной точки

Первая или прямая задача: Известно движение материальной точки, требуется определить силы, вызывающие это движение.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \bar{\mathbf{F}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = ?$$

$$\bar{\mathbf{F}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = m\bar{\mathbf{w}}.$$

Для решения этой задачи достаточно найти ускорение точки, т.е. решить основную задачу кинематики.

Пример решения прямой задачи динамики

$$\begin{cases} x = a \cos kt; \\ y = b \sin kt \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x(t) = m w_x = -m a k^2 \cos kt; \\ F_y(t) = m w_y = -m b k^2 \sin kt \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x(t) = -m k^2 \cdot a \cos kt = -m k^2 x; \\ F_y(t) = -m k^2 \cdot b \sin kt = -m k^2 y. \end{cases}$$

$$\bar{F} = -m k^2 \bar{r} = -c \bar{r}$$

Основные задачи динамики материальной точки

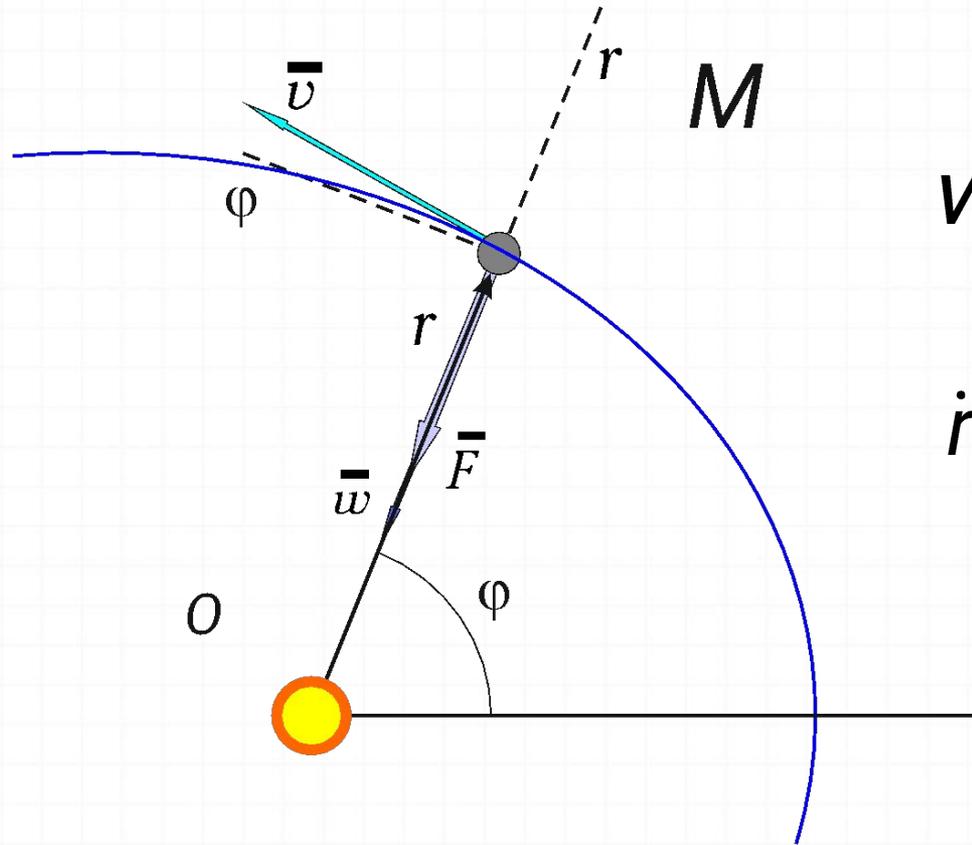
Вторая или обратная задача: Известны силы, действующие на точку, требуется определить движение этой точки.

$$\bar{F} = F(t, r, \dot{r}), \quad r(t) = ?$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F\left(t, r, \frac{dr}{dt}\right)$$

Решение этой задачи сводится к составлению и интегрированию дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Пример решения обратной задачи динамики



$$w_{\varphi} = \ddot{r}\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

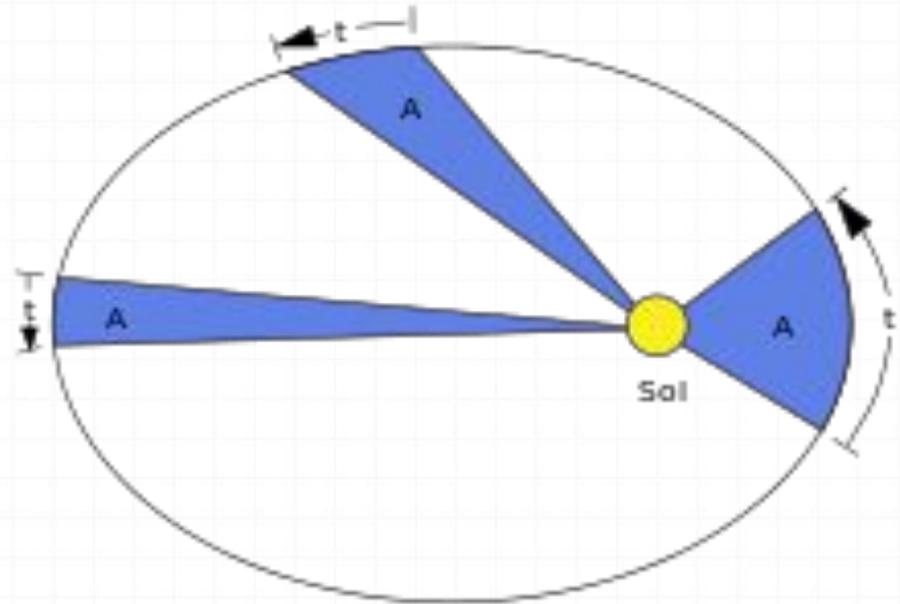
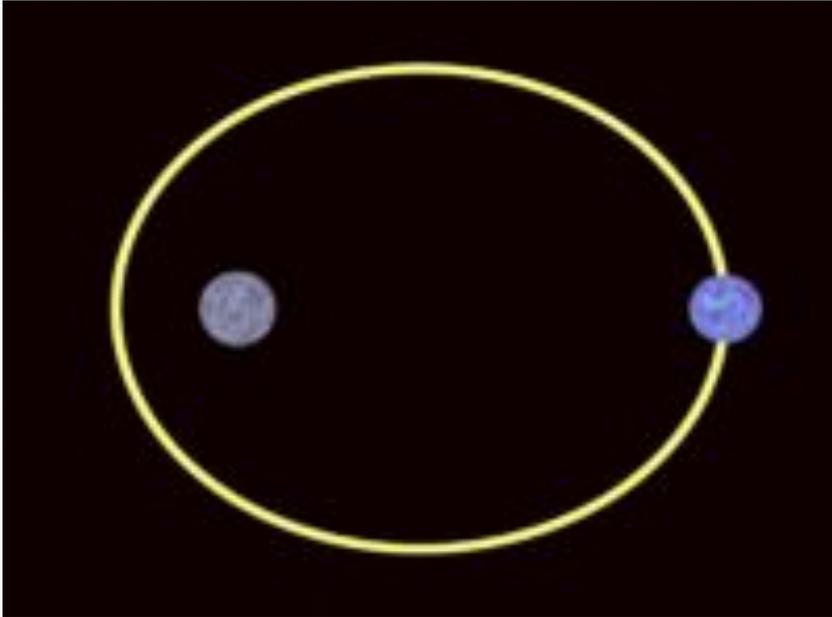
$$\ddot{r}\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}^2) = 0$$

$$r\dot{\varphi}^2 = \text{const}$$

$$\dot{\varphi} = v_{\varphi}$$

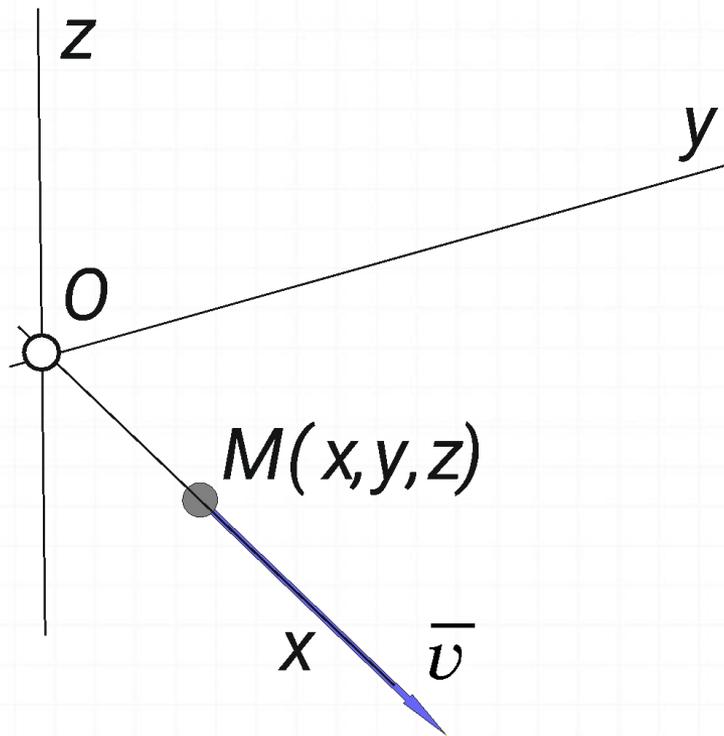
$$rv_{\varphi} = c = \text{const}$$

Второй закон Кеплера



Площади, ометаемые радиусом-
вектором
за одинаковые промежутки времени
равны

Условия прямолинейного движения материальной точки



$$\begin{cases} x(t) = x(t); \\ y(t) = 0; \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \ddot{m}x; \\ F_y = \ddot{m}y = 0; \\ F_z = \ddot{m}z = 0. \end{cases}$$

Условия прямолинейного движения материальной точки

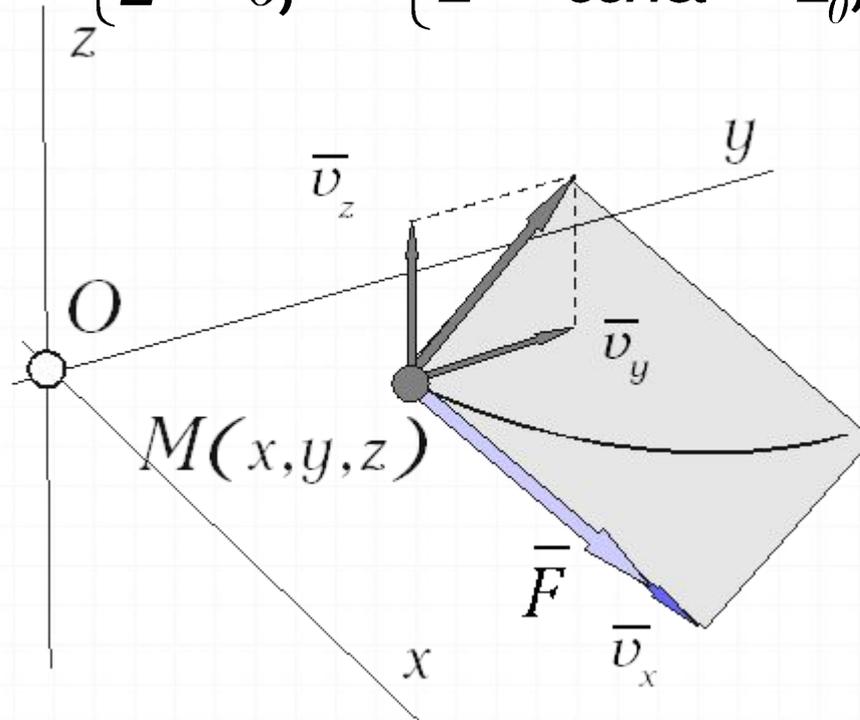
ТОЧКИ

$$\begin{cases} \ddot{m}x = F_x; \\ \ddot{m}y = F_y = 0; \\ \ddot{m}z = F_z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = 0; \\ \dot{z} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{const} = y_0; \\ z = \text{const} = z_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y_0 t + y_0; \\ z = z_0 t + z_0. \end{cases}$$



Условия прямолинейного движения материальной точки

Материальная точка будет совершать прямолинейное движение, если сила, действующая на нее, имеет неизменное направление, совпадающее с направлением начальной скорости.