Лекционно-практические занятия по теме

Линейная алгебра

Введение. Понятие матрицы

Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Таблица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется матрицей. Для данной системы основная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица размера (mxn)

Любая прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размера (mxn).

Числа, образующие матрицу, называются элементами матрицы.

Например, система из трех уравнений с тремя неизвестными и ее основная матрица

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица размера (3x3) или матрица 3-го порядка

В этой же системе можно выписать в виде матрицы столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица - столбец размера (3x1)

Можно записать матрицу-строку $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, размер матрицы (1x4)

В квадратных матрицах можно выделить главную и побочную диагонали

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

побочная

главная

Для квадратных матриц можно вычислить определитель.

Определитель квадратной матрицы есть некоторое число, которое вычисляется из элементов матрицы по определенному правилу, которое будет сформулировано после введения понятий миноров и алгебраических дополнений элементов определителя.

Минором элемента определителя называется определитель, полученный после вычеркивания из исходного строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Алгебраическое дополнение элемента – это минор этого элемента, взятый со знаком (+), если сумма номеров строки и столбца, на которых находится элемент – четная, и со знаком (-), если эта сумма – нечетная.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = M_{11}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -M_{23}$$

Вычисление определителей

1. Определитель 1-го порядка равен самому элементу

$$\boxed{\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}}$$

Например: $\Delta_1 = |2| = 2,$ $\Delta_1 = |-7| = -7$

2. Определитель 2-го порядка находится по правилу

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c}$$

Определитель 2-го порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 - (-12) = 10 + 12 = 22$$

Например:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 7 - (-2) \cdot (-3) = -42 - 6 = -48$$

Определитель 3-го порядка находится путем разложения определителя по элементам строки или столбца.
При этом используется

Основное правило вычисления определителя:
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения

Например, разложение определителя по элементам 1-ой строки будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример вычисления определителя путем разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3\cdot 6-(-2)\cdot(-1)) + 4\cdot(5\cdot 6-(-2)\cdot 4) + 2\cdot(5\cdot(-1)-3\cdot 4) =$$

$$= (18-2)+4\cdot(30+8)+2\cdot(-5-12) = 16+152-34 = 134$$

Наиболее выгодным является разложение определителя по элементам того ряда, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю

Например, данный определитель наиболее выгодно разложить по элементам 2-й строки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= -3\cdot((-1)\cdot 7-(-2)\cdot 4) = -3\cdot(-7+8) = -3\cdot 1 = -3$$

Если строк или столбцов с нулями нет, то их можно получить, используя элементарные преобразования, не меняющие величины определителя.

Согласно свойству определителей: *Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, предварительно умноженные на число.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2+2 & -4+3 & -6-4 & -8-1 \\ 3-3 & 6+1 & 9-2 & 12+5 \\ 4-4 & 8-3 & 12+1 & 16+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 7 & 7 & 17 \\ 0 & 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 7 & 7 & 17 \\ 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ -7+7 & -70+7 & -63+17 \\ -5+5 & -50+13 & -45+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 0 & -63 & -46 \\ 0 & -37 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -63 & -46 \\ -37 & -27 \end{vmatrix} = -(-63 \cdot (-27) - (-46) \cdot (-37)) =$$

$$= -(1701 - 1702) = 1$$

Свойства определителей

1. Постоянный множитель из элементов какого либо ряда можно выносить за знак определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Определитель равен нулю, если все элементы какого-либо ряда равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 9 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Определитель равен нулю, если есть два ряда, соответствующие элементы которых равны или пропорциональны

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -1 & 12 \\ -3 & -5 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Решение систем методом Крамера

С вычислением определителей связан один из методов решения систем линейных уравнений – метод Крамера.
Рассмотрим его на примере.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$$

Для решения системы необходимо вычислить 4 определителя 3-го порядка.

1. Вычисляем главный определитель из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(18\cdot 3+1) = -55$$

2. Вычисляем побочные определители для каждого неизвестного, для этого поочередно в главном определители заменяем столбцы , соответствующие одному из неизвестных, столбцом свободных членов

Метод Крамера

а) Находим определитель для первого неизвестного, заменяя в главном определителе первый столбец на столбец свободных членов

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 10 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(60-5) = -55$$

б) Находим определитель для второго неизвестного, заменяя в главном определителе второй столбец на столбец свободных членов

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 5(8+25) = 165$$

в) Находим определитель для третьего неизвестного, заменяя в главном определителе третий столбец на столбец свободных членов

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 10 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -5(2+20) = -110$$

Метод Крамера

Для нахождения значений неизвестных используем формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-55}{-55} = 1$$

Значения неизвестных находятся делением побочных определителей на главный определитель

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{165}{-55} = -3$$

$$\boxed{x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-110}{-55} = 2}$$

Это означает, что методом Крамера можно решать только такие системы, у которых главный определитель отличен от нуля $\Delta \neq 0$

Полученное решение запишем в виде матрицы-столбца

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Легко проверить подстановкой в каждое уравнение Системы, что полученное решение верно.

Обратная матрица. Матричные уравнения

Обратной матрицей для квадратной матрицы А называется матрица A^{-1} произведение которой на исходную матрицу равно единичной матрице

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица существует только для квадратных невырожденных матриц, т.е. таких матриц, определитель которых отличен от нуля $\det A \neq 0$

Равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ Служит для проверки правильности нахождения обратной матрицы

Матричные уравнения

Матричные уравнения – это уравнения, в которых участвуют как известные матрицы, так и неизвестная матрица, которую и нужно найти. Существуют два основных типа матричных уравнений.

1 тип (левое умножение)

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

2 тип (правое умножение)

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

В виде матричного уравнения $A \cdot X = B$ может быть записана система линейных уравнений, решение которой $X = A^{-1} \cdot B$ существует, если определитель основной матрицы отличен от нуля.

Если в системе количество уравнений и неизвестных разное, то нельзя говорить об определителе основной матрицы и решать систему матричным методом нельзя.
Для решения таких систем применяется метод Гаусса

Схема нахождения обратной матрицы

- 1) Находится определитель матрицы.

Если он отличен от нуля $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует.

- 2) Составляется союзная матрица A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.
- 3) Полученную союзную матрицу транспонируем, т.е. меняем ролями строки и столбцы матрицы. Получаем матрицу A^{*T}.
- 4) Матрицу A^{*T} делим на определитель матрицы и получаем обратную матрицу. (При делении матрицы на число все ее элементы нужно разделить на это число)

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*T}}$$

Рассмотрим примеры.

1. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22$

2) $A^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $A^{*T} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Нахождение обратной матрицы

2. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Находим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(18 \cdot 3 + 1) = -55 \neq 0$$

Т.о. обратная матрица существует.

2) Составляем союзную матрицу

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+8) = -11 \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 20 = 22 \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(2+16) = -18$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 = 13 \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-15) = 11 \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 1 & 22 & -18 \\ 13 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

3) Полученную матрицу транспонируем

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

4) Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{55} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

Решение систем методом Гаусса

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных. При решении системы методом Гаусса все действия проводятся над строками расширенной матрицы.

Понятие ранга матрицы.

Понятие ранга помогает при анализе системы уравнений.

Определение. Рангом матрицы называется максимальное число линейно независимых строк этой матрицы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и запишем ее основную матрицу и расширенную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Определение 1. Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение. Это возможно только в том случае, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной.

$$RangA = RangA^{p}$$

Определение 2. Система называется несовместной, если она не имеет решений.

Определение 3. Система называется определенной, если она имеет единственное решение. Это возможно, если ранг системы равен количеству неизвестных:

$$RangA = n$$

Определение 4. Система называется неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений. Это возможно в том случае, когда ранг системы меньше количества неизвестных:

$$RangA < n$$

Таким образом, при решении системы необходимо установить ее совместность, а затем определить единственное или множество решений она будет иметь.

Рассмотрим на примере системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_3 = -7 \\ -2x_1 - 8x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 12x_2 - 6x_3 = 9 \end{cases}$$

Расширенная матрица – это матрица коэффициентов при неизвестных с добавлением столбца свободных членов.

$$A^p = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ -2 & -8 & 4 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 9 \end{array}\right)$$

Видно, что 3-я и 4-я строки получаются умножением первой на числа (-2) и 3, значит соответствующие уравнения системы являются лишними. И система будет иметь множество решений. Решаем ее методом Гаусса.

Схема решения системы методом Гаусса.

1. Выписываем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому или треугольному виду также, как это делалось при вычислении определителей (процедура получения нулей).
2. В процессе всех этих действий могут проявиться линейно зависимые строки (т.е. строки, соответствующие элементы которых одинаковые или пропорциональные, нулевые строки и т.п.), которые можно вычеркнуть

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ \cancel{-2} & \cancel{-8} & \cancel{4} & \cancel{-6} \\ \cancel{3} & \cancel{12} & \cancel{-6} & \cancel{9} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$Rang A = 2$$

Т.о. осталось 2 линейно независимых строки и ранг матрицы равен 2

3. В полученной матрице нужно выбрать базисный минор. Базисный минор – это отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. Соответственно определяются базисные и свободные неизвестные.

В нашем примере базисный минор можно составить из элементов 1-го и 3-го столбцов

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

, тогда так как минор, составленный из элементов 1-го и 2-го столбцов, равен нулю

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Для данной ситуации базисными будут неизвестные x_1 и x_3

4. Записываем эквивалентную систему, при этом базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся в правую.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -4x_2 + 3 \\ \qquad 3x_3 = -7 \end{cases}$$

5. В итоге решается эта система и находится общее решение, в котором базисные неизвестные выражаются через свободные. Этим свободным неизвестным даются произвольные числовые значения, по ним вычисляются базисные и получается каждый раз новое частное решение. Таких решений можно составить бесчисленное множество.

$$X = \begin{cases} -4x_2 - 5/3 \\ \quad x_2 \\ -7/3 \end{cases}$$ - общее решение

$$X = \begin{cases} -3 \\ 1/3 \\ -7/3 \end{cases}$$ -частное решение (при $x_2 = 1/3$)

Замечание. Если в матрице системы не вычеркивается ни одна строка, то есть все строки линейно независимы, то ранг будет равен числу неизвестных и решение получится единственным.

Система линейных однородных уравнений имеет вид и решается также, как и неоднородная

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$