

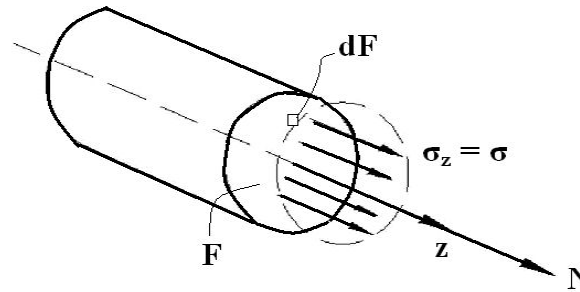
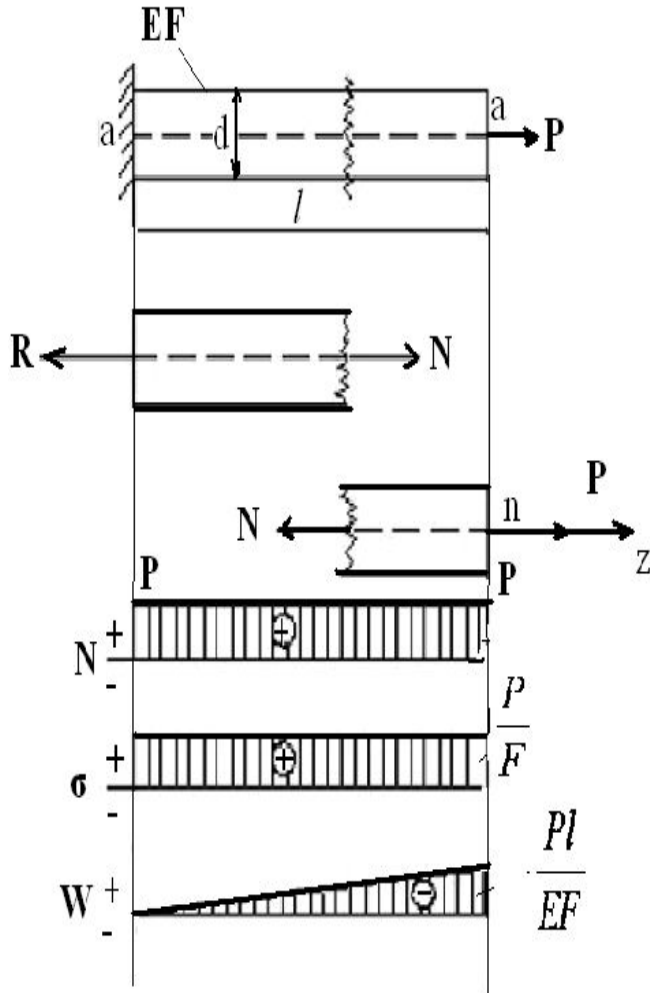
Растяжение-сжатие

$N \neq 0, N > 0, N < 0$

$\sum np_z(\bar{P}_i) = 0$

$P - N = 0$

$N = P$



$dN = \sigma dF$

$N = \int_F \sigma dF$

$\sigma = const$

$N = \sigma \int_F dF = \sigma F$

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Расчет по напряжениям

1. Проверочный расчет на прочность

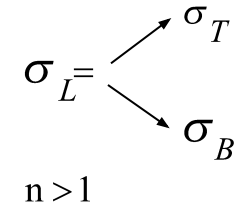
$\sigma_{max} \leq [\sigma]$

$[\sigma] = \frac{\sigma_L}{n}$

$n_L = \frac{\sigma_L}{\sigma_{max}}$

$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} \quad (1,5 \div 2)$

$n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{max}} \quad (2 \div 3)$

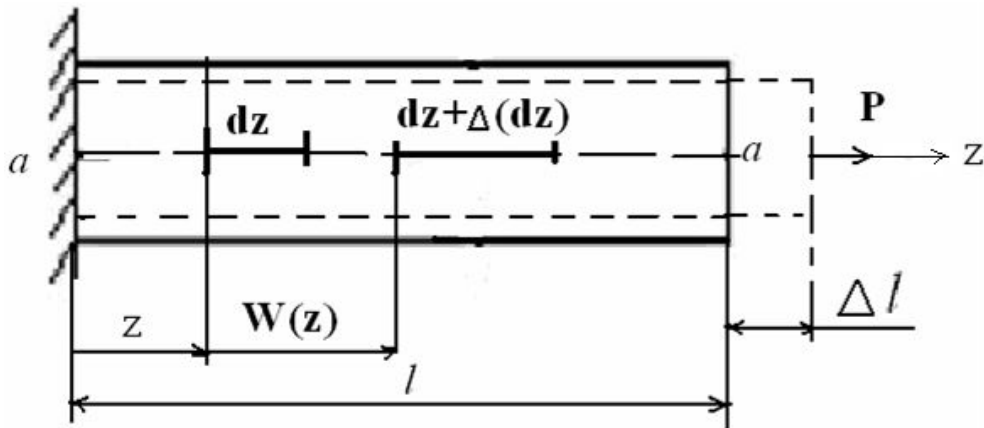


2. Конструктивный расчет

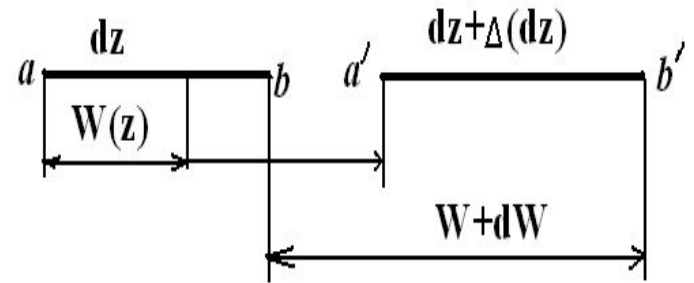
$\sigma_{max} = \left(\frac{N}{F} \right)_{max} \leq [\sigma]$

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

Расчет на жесткость при растяжении-сжатии. Закон Гука



$W(z)$ – функция перемещений



$$a'b' - ab = \Delta(dz) = dW$$

$$\frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{dW}{dz}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{dW}{dz}}$$

$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ - закон Гука

$$\frac{dW}{dz} = \frac{N}{EF}; \quad EF \text{ – жесткость при растяжении – сжатии}$$

$$dW = \frac{Ndz}{EF}, \quad W = c + \int \frac{Ndz}{EF}$$

$$\boxed{W = W_0 + \int \frac{Ndz}{EF}}$$

$$W|_{z=l} - W_0 = \Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EF}}$$

$$\boxed{W = W_0 + \frac{Nz}{EF}}$$

$$W_a = \Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

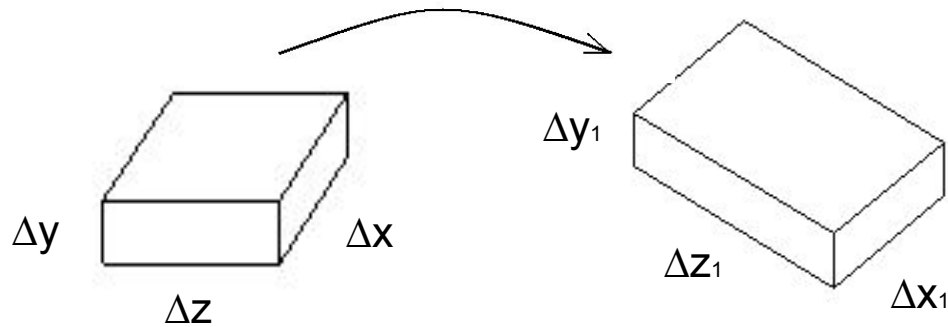
$$\boxed{W_{\max} \leq [W]}$$

Деформации

до нагружения

после нагружения

перемещение



Линейные деформации

$$\varepsilon_{x_{cp}} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x}$$

(средняя относительная деформация)

компоненты
деформации

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x} \\ \varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta y} \\ \varepsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z_1 - \Delta z}{\Delta z} \end{array} \right.$$

- истинная (относительная)
линейная деформация по оси x

Учет температуры в перемещениях

$$W = W_0 + \int \frac{Ndz}{EF} + \int \alpha t(z) dz$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l t$$

α – коэффициент линейного расширения

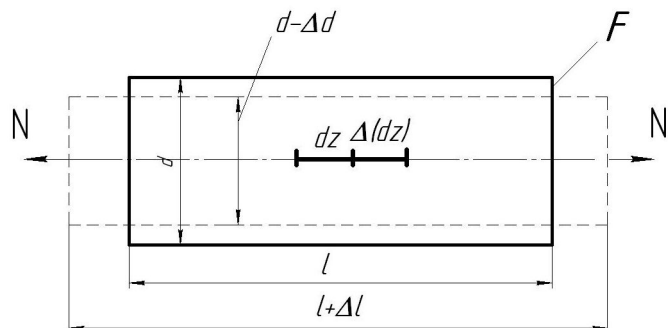
$$t(z) = T_K - T_H, (\Delta t)$$

T_K – конечная (рабочая) температура

T_H – Начальная температура (температура монтажа)

Поперечная деформация при растяжении-сжатии

Закон Пуассона



$$\varepsilon_{np} = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\Delta l}{l} > 0$$

$$\varepsilon_{non} = -\frac{\Delta d}{d} < 0$$

$$0 \leq \mu \leq 0,5$$

$$\left| \frac{\varepsilon_{non}}{\varepsilon_{np}} \right| = \mu$$

-закон Пуассона

$$\varepsilon_{non} = -\mu \varepsilon_{np}$$

$\mu \approx 0,25 \div 0,33$ – металлы

$$\varepsilon_{non} = -\frac{\Delta d}{d} = \mu \varepsilon_{np} \rightarrow \Delta d = d\mu \cdot \varepsilon_{np} = d\mu \frac{\sigma}{E} = d\mu \frac{N}{EF}$$

Учет температуры в перемещениях

$$W = W_0 + \int \frac{Ndz}{EF} + \int \alpha t(z) dz$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l t$$

α – коэффициент линейного расширения

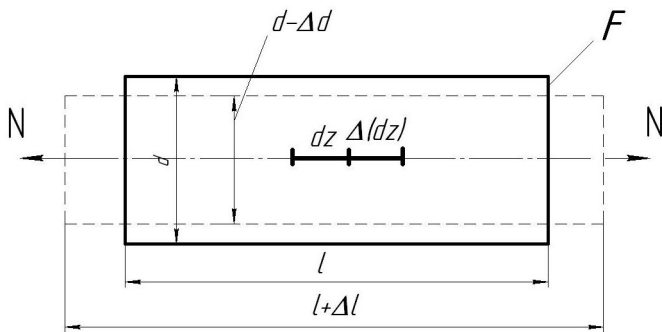
$$t(z) = T_K - T_H, (\Delta t)$$

T_K – конечная (рабочая) температура

T_H – Начальная температура (температура монтажа)

Поперечная деформация при растяжении-сжатии

Закон Пуассона



$$\varepsilon_{np} = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\Delta l}{l} > 0$$

$$\varepsilon_{non} = -\frac{\Delta d}{d} < 0$$

$$0 \leq \mu \leq 0,5$$

$$\left| \frac{\varepsilon_{non}}{\varepsilon_{np}} \right| = \mu$$

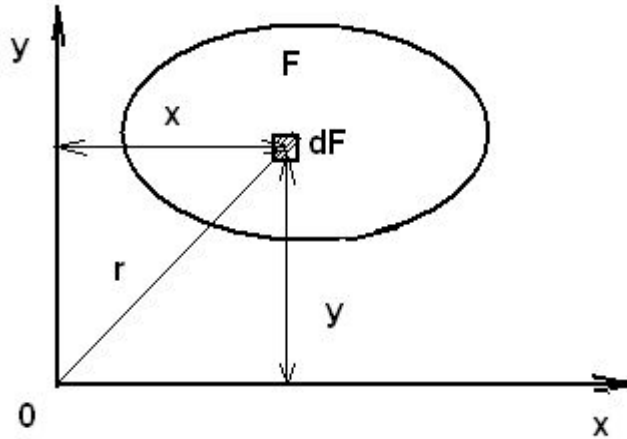
-закон Пуассона

$$\varepsilon_{non} = -\mu \varepsilon_{np}$$

$\mu \approx 0,25 \div 0,33$ – металлы

$$\varepsilon_{non} = -\frac{\Delta d}{d} = \mu \varepsilon_{np} \rightarrow \Delta d = d \mu \cdot \varepsilon_{np} = d \mu \frac{\sigma}{E} = d \mu \frac{N}{EF}$$

Общие понятия и определения



F – площадь поперечного сечения

$$0.1 \quad S_x = \int_F y dF \geq 0 \text{ [м}^3\text{]} \text{ статический момент}$$

сечения плоской фигуры относительно оси x,

$$S_y = \int_F x dF \geq 0 \text{ [м}^3\text{]}.$$

$$0.2 \quad M_x = \int_F y^2 dF \geq 0 \text{ [м}^4\text{]} \text{ или экваториальный момент инерции пл. фигуры относительно оси x,}$$

$$M_y = \int_F x^2 dF > 0 \text{ [м}^4\text{]}.$$

$$0.3 \quad M_{xy} = \int_F xy dF \text{ [м}^4\text{]} \text{ центробежный момент инерции плоской фигуры относительно осей x и y.}$$

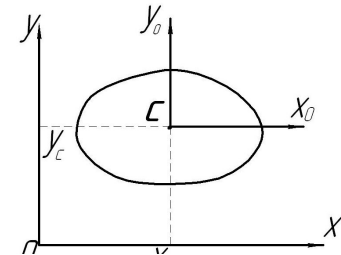
$$0.4 \quad M_0 = I_p = \int_F r^2 dF \text{ [м}^4\text{]} \text{ полярный момент инерции плоской фигуры относительно выбранного полюса O.}$$

$$0.5 \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} > 0 \text{ [м]} \text{ радиус инерции плоской фигуры относительно оси x,}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} > 0 \text{ [м]}.$$

Свойства геометрических характеристик

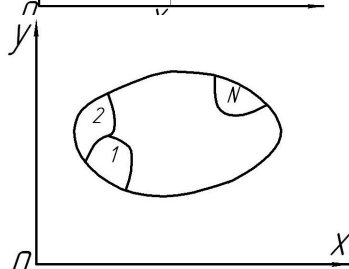
Свойство 1



x_c координаты ц.т. пл. фигуры:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{S_y}{F} \longrightarrow S_y = x_c F \\ y_c &= \frac{S_x}{F} \longrightarrow S_x = y_c F \end{aligned} \longrightarrow \boxed{S_{x_0} = S_{y_0} = 0}$$

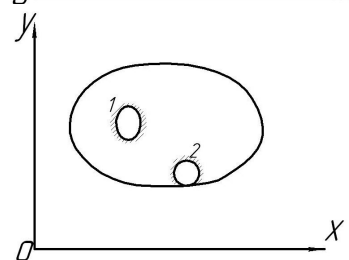
Свойство 2



Момент инерции составной фигуры:

$$\boxed{I_x = \sum_{k=1}^N I_x^{(k)}} \quad (I_y, I_{xy}, I_0, S_x, S_y)$$

Свойство 3



Момент инерции многосвязной области:

$$\boxed{I_x = I_x^{(0)} - \sum_{k=1}^N I_x^{(k)}} \quad (I_y, I_{xy}, I_0, S_x, S_y)$$

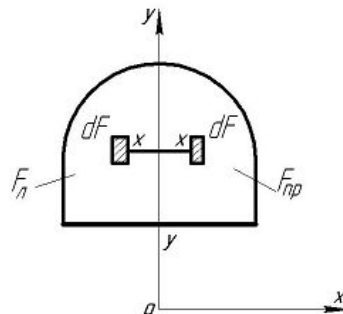
Свойство 4

$I_0 = I_x + I_y$ (две взаимно-перпендикулярные оси, проходящие через полюс O)

$$\text{Док-во: } I_0 = \int_F r^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = I_y + I_x$$

Свойство 5

$$\boxed{I_{xy} = 0}$$



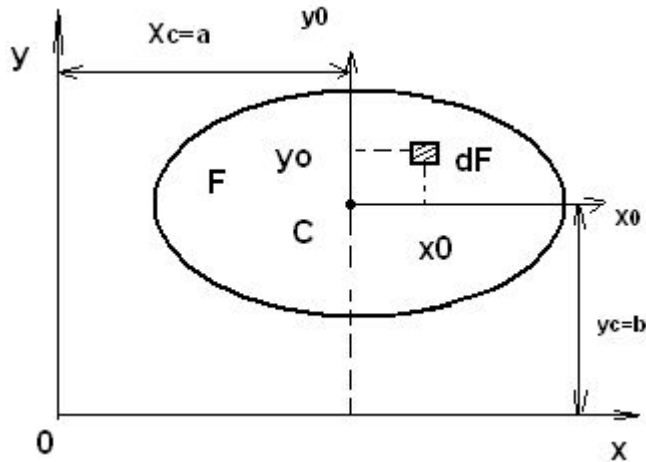
y – ось симметрии пл. фигуры

$$\begin{aligned} \text{Док-во: } I_{xy} &= \int_F xy dF = \\ &= \int_{x < 0} x^{<0} y^{>0} dF + \int_{x > 0} x^{>0} y^{>0} dF = 0 \end{aligned}$$

Определение центра тяжести пл. фигуры

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей



Дано: $I_{x_0}, I_{y_0}, I_{x_0 y_0}$; x_c, y_c – координаты ц.т. пл. фигуры в новой системе xOy

$I_x, I_y, I_{xy} = ?$

$\begin{cases} x = x_c + x_0 = a + x_0 \\ y = y_c + y_0 = b + y_0 \end{cases}$ – формулы преобразования координат при переходе к новой системе

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_F (b + y_0)^2 dF = b^2 \int_F dF + 2b \int_F y_0 dF + \int_F y_0^2 dF = b^2 F + 2b S_{x_0} + I_{x_0} \rightarrow \boxed{I_x = I_{x_0} + b^2 F}$$

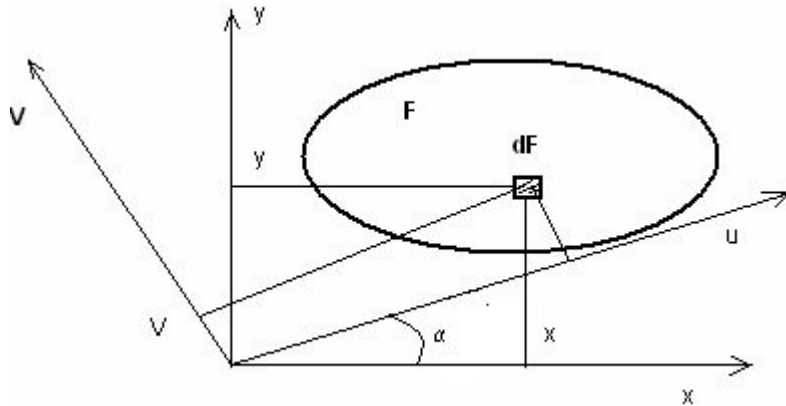
0 (СВ-ВО)

Аналогично:

$$\boxed{I_y = I_{y_0} + a^2 F}$$

$$\boxed{I_{xy} = I_{x_0 y_0} + abF}$$

Преобразование моментов инерции при повороте осей



Дано: I_x, I_y, I_{xy} ;

$\angle \alpha$ – новая система образована с помощью α

$I_u, I_v, I_{uv} = ?$

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

– формулы преобразования координат при повороте осей

$$\overline{I_u} = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \dots = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\overline{I_{uv}} = \int_F uv dF = \dots = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (2)$$

Главные оси и главные моменты инерции

$$I_u = f(\alpha) \longrightarrow \frac{dI_u}{d\alpha} = 0 \xrightarrow{(1)} \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}} \quad (3)$$

-формула для опред. положения двух главных осей инерции

$$\boxed{I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \quad (4)$$

$$I_{uv} = \varphi(\alpha) \longrightarrow \frac{dI_{uv}}{d\alpha} = 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}}} \quad (5)$$

-формула для опред. положения двух осей, относительно которых ц.б. момент инерции достигает экстремума

$$\boxed{\max I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}} \quad (6)$$

инерции I_{uv}

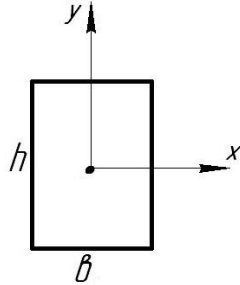
Из (4) и (6): $I_1 - I_2 = 2 \max I_{uv} \rightarrow \boxed{\max I_{uv} = \frac{I_1 - I_2}{2}}$

$I_1 + I_2 = I_x + I_y = \text{const}$ – инвариантная величина

Свойство гл. оси инерции: $\boxed{I_{uv} = 0}$

Геометрические характеристики простейших фигур

1. Прямоугольник

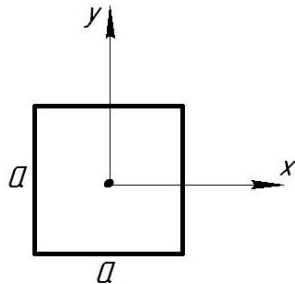


$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

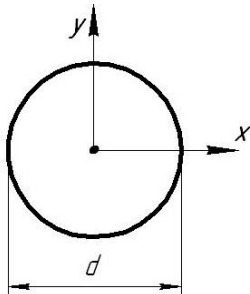
2. Квадрат



$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

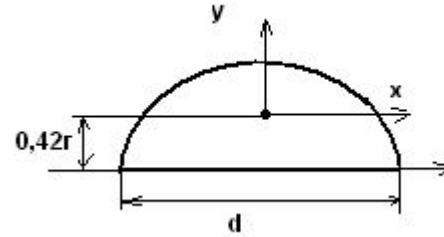
3. Круг



$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0$$

4. Полукруг

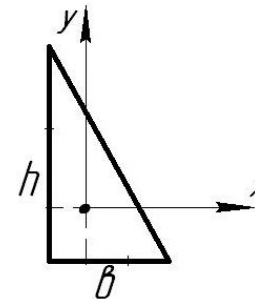


$$I_x = 0,00686d^4$$

$$y_{x_1} = I_y = \frac{\pi d^4}{128}$$

$$I_{xy} = 0$$

5. Прямоугольный треугольник

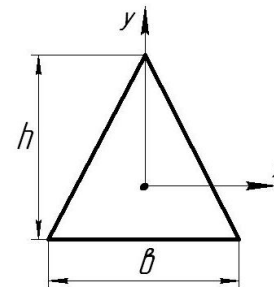


$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

6. Равнобедренный треугольник



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}$$

$$I_{xy} = 0$$