МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

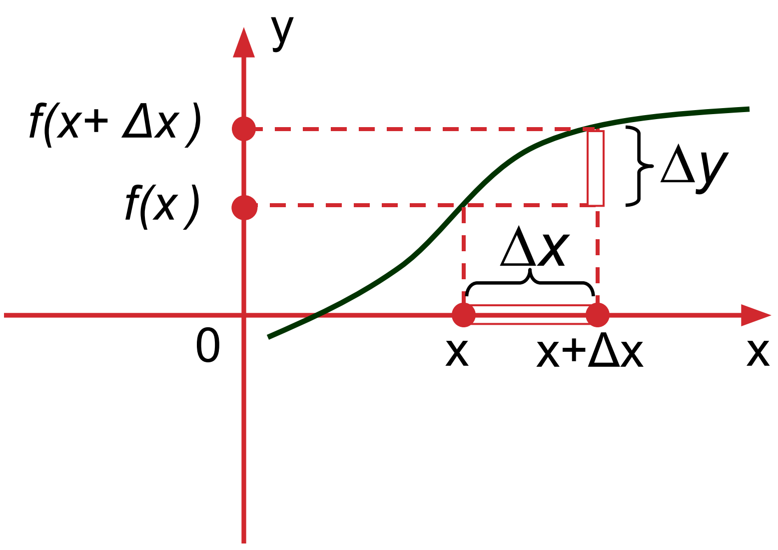
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некотором интервале ***(a; b)***.

Аргументу ***x*** придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции ***y = f(x)*** и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется дифференцируемой в этом интервале;
операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

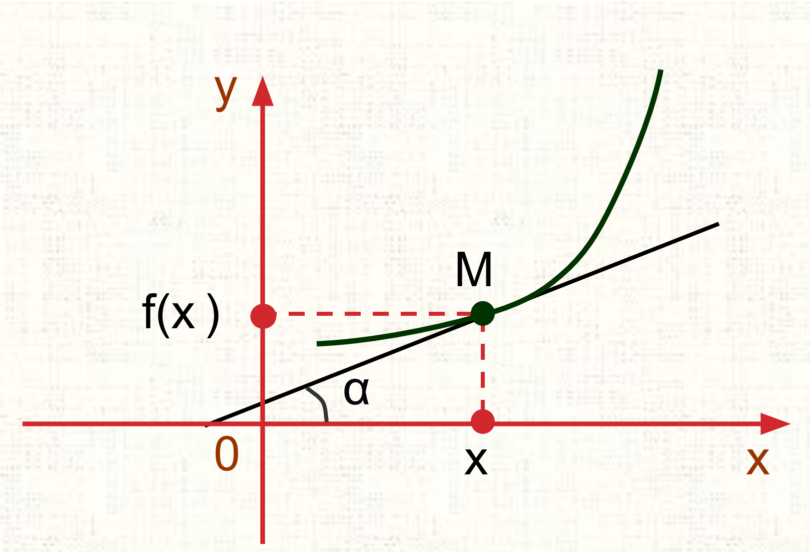
Значение производной функции ***y = f(x)*** в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\big|_{x_0}$$

Если функция ***y = f(x)*** описывает какой-либо физический процесс, то ***f '(x)*** есть скорость протекания этого процесса – ***физический смысл производной***.

5.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1:



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

5.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{y'} = tg\alpha = k \;\; = y'$$

Производная ***f '(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания M имеет координаты ***(x₀; y₀)***, угловой коэффициент касательной есть ***k = f '(x₀)***.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

Уравнение касательной

$f'(x_0)$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется нормалью к кривой.

$$k_{норм}=-\frac{1}{k_{кас}}=-\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow \boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}$$

Уравнение нормали

5.3 СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ

Теорема

Если функция ***y = f(x)*** дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция ***y = f(x)*** дифференцируема в некоторой точке ***x***, следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

(где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$)

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Функция ***y = f(x)*** – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

5.4 ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица производных (без вывода)

1. $\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$

2. $\left(x\right)' = 1$

3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^{2}}$

4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$

6. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

7. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

8. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

5.4 ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица производных (без вывода)

9. $(\sin x)' = \cos x$

10. $(\cos x)' = -\sin x$

11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

5.5 ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть u(x) , v(x) и w(x) – дифференцируемые в некотором интервале (a; b) функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$
- $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{u'}{C} \\ \left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2} \end{array} \right.$$

5.6 ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть даны функции ***y = f(u)*** и ***u = φ(x)*** , тогда ***y = f(φ(x))*** – сложная функция с промежуточным аргументом ***u*** и независимым аргументом ***x***.

Теорема

Если функция ***u = φ(x)*** имеет производную u'_x в точке ***x***,

а функция ***y = f(u)*** имеет производную y'_u в соответствующей точке ***u*** ,

то сложная функция ***y = f(φ(x))*** имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow y = f(\varphi(g(x)))$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}$$

5.6 ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)' =$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12 \ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

$$= -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12 \ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}$$

5.7 ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть задана дифференцируемая функция ***y = f(x)*** и ***f '(x) ≠ 0*** , пусть существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

Из дифференцируемости ***f(x)*** следует её непрерывность, а значит и непрерывность обратной функции, поэтому

$$\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$$

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

5.8 ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Если функция задана уравнением ***y = f(x)*** , разрешенным относительно ***y***, то говорят, что функция задана в явном виде.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения не разрешенного относительно ***y***:

$$F(x;y)=0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции необходимо продифференцировать уравнение по ***x***, рассматривая при этом ***y*** как функцию от ***x***, и полученное уравнение разрешить относительно производной.

$$\left[x^3+y^3-3xy\right]'=\left[0\right]' \Longrightarrow (x^3)'+(y^3)'-3(xy)'=0 \Longrightarrow$$

$$\cancel{3}x^2+\cancel{3}y^2\cdot y'-\cancel{3}(x'y+xy')=0 \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2\cdot y'-y-xy'=0 \Longrightarrow \boxed{y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}}$$

5.9 ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала ***прологарифмировать***, а затем результат ***продифференцировать***.

Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием***.

Типы функций, к которым применяют логарифмическое дифференцирование:

1) функция, построенная при помощи нескольких операций произведения и (или) деления

Например: $$y=\frac{\left(x^3+4\right)\cdot\sqrt[3]{\left(2x-3\right)^4}\cdot e^x}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

2) ***степенно-показательная*** функция

Например: $$y=\left(\sin\left(2x+1\right)\right)^{\cos\left(x^2-1\right)}$$

5.9 ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Для применения логарифмического дифференцирования необходимо вспомнить свойства логарифмов:

1) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3) $\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln a$

Найти производные следующих функций:

1) $$y = \frac{\left(x^3+4\right) \cdot \sqrt[3]{(2x-3)^4} \cdot e^x}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

2) $y = \left(\sin(2x+1)\right)^{\cos\left(x^2-1\right)}$ в точке $x =$

5.10 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция ***y = f(x)*** задана параметрически уравнениями: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Выведем формулу для нахождения производной этой функции:

Пусть функция ***x = f(t)*** имеет обратную $t = f^{-1}(x)$,

тогда $y = g(t) = g\left(f^{-1}(x)\right)$ – сложная функция

$$y'_x = \left(g(t)\right)'_x = \left(g\left(f^{-1}(x)\right)\right)'_x = \left(g(t)\right)'_t \cdot \left(f^{-1}(x)\right)'_x =$$

$$= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

При выводе использовали:

- ✔ производную сложной функции
- ✔ производную обратной функции
- ✔ требование $x'_t \neq 0$

5.10 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Вычислить производные следующих функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = t^2 + 4t - 1 \\ y = \operatorname{arctg} 2t \end{cases}$ $\qquad y'_x = \dfrac{1}{(t+2)\left(1+4t^2\right)}$

2) $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t \\ y = e^t \cdot \sin t \end{cases}$ при $t = \pi$ $\qquad y'_x(\pi) = 1$

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ…