Теория перемещений. Основные понятия и теоремы

Под перемещением какой-либо точки сооружения понимается изменение ее координат в результате деформации элементов сооружения.

Основные гипотезы, используемые при определении перемещений:

- рассматриваются линейно деформируемые системы, подчиняющиеся закону Гука:

$$\Delta = k\,P,$$

где k - коэффициент пропорциональности.

- используется принцип суперпозиции (наложения), согласно которому результат действия системы сил равен сумме результатов действия отдельных сил:

$$\Delta_{кр} = P_1\,\delta_{к,1} + P_2\,\delta_{к,2} + \ldots\ldots + P_n\,\delta_{кn}\,,$$

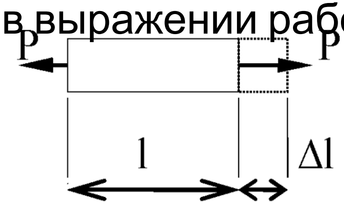
где $\Delta_{кр}$ - перемещение системы, первый индекс показывает точку и направление перемещения, а второй - причину вызвавшую перемещение;

$\delta_{кn}$ - перемещение в направлении k от действия силы P_n=1.

- используются понятия обобщенной силы и обобщенного перемещения:

а) под обобщенной силой понимается любая сила или группа сил (например: пара сил, равномерно распределенная нагрузка и т.п.).

б) обобщенное перемещение - это перемещение, соответствующее обобщенной силе, которое при умножении на обобщенную силу дает работу, т.е. это множитель при обобщенной силе в выражении работы:



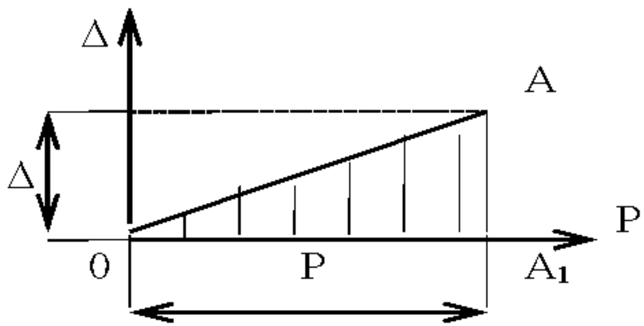
$$A = P\,\Delta l\,,$$

здесь Δl -обобщенное перемещение для двух сил P.

Теория перемещений. Основные понятия и теоремы

Действительная и возможная (виртуальная) работа внешних сил

При статическом приложении силы P, т.е. при постепенном возрастании силы от нуля до своего конечного значения, зависимость между перемещением и значением силы P выражается диаграммой



Работу силы P на перемещении Δ определяет площадь треугольника OAA_1 :

$$A = \frac{1}{2} P \Delta ,$$

т.е. при действии на упругую систему статической силы, действительная работа этой силы равна половине произведения конечного значения этой силы на конечное перемещение.

Действительная работа системы сил, при статическом их действии:

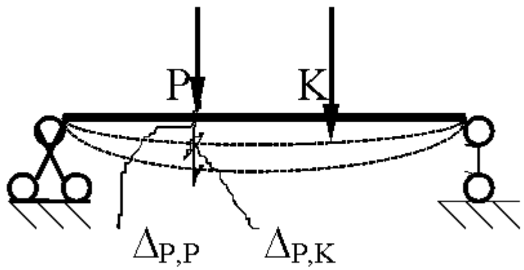
$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i , \qquad (1)$$

При статическом действии момента или распределенной нагрузки:

$$A = \frac{1}{2} M \Delta\varphi ; \qquad A = \frac{1}{2}\int_l q \cdot y(x) dx .$$

Теория перемещений. Основные понятия и теоремы

Под возможными перемещениями будем понимать такие малые перемещения точек сооружения, которые допускаются имеющимися связями и не зависят от рассматриваемой системы сил.



Здесь $\Delta_{P,P}$ - действительное перемещение;

$\Delta_{P,K}$ - возможное перемещение.

Под возможной (виртуальной) работой внешних сил понимается работа сил на перемещениях, вызванных другими силами или воздействиями. При этом данные силы остаются неизменными и их работа:

$$A = P\,\Delta , \qquad (1')$$

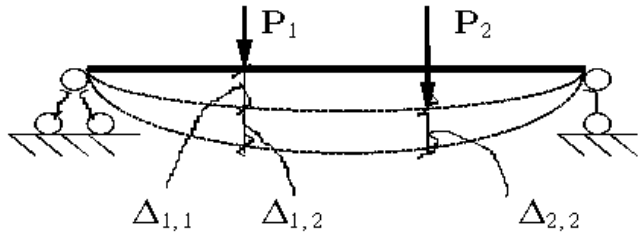
без коэффициента $\frac{1}{2}$.

Теория перемещений. Основные понятия и теоремы

Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений

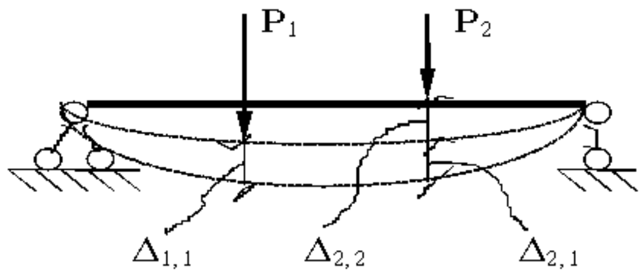
Рассмотрим два случая последовательного загружения упругой системы силами P_1 и P_2, изменяя очередность загружения этими силами. Запишем работу сил 1-го и 2-го состояний.

1.



$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{1,1} + P_1 \Delta_{1,2} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{2,2};$$

2.



$$A_2 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{1,1} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{2,2} + P_2 \Delta_{2,1}$$

Т.к. для обоих случаев начальное и конечное состояния одинаковы, следовательно, в обоих вариантах загружения произведена одна и та же работа. Приравняв их, получим:

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}, \qquad (2)$$

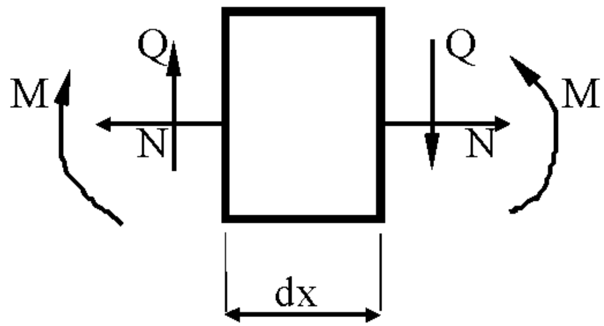
или

$$A_{12} = A_{21}. \qquad (3)$$

Для двух состояний упругой системы виртуальная работа сил 1-го состояния на перемещениях, вызванных силами второго состояния, равна виртуальной работе сил 2-го состояния на перемещениях, вызванных силами 1-го состояния. (Теорема Бетти).

Потенциальная энергия упругой системы

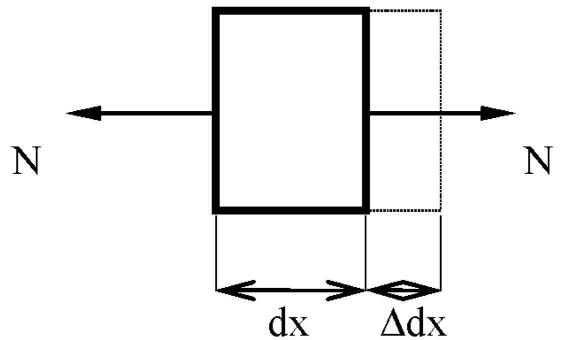
Работа внешних сил на вызванных ими перемещениях может быть выражена через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержневой системы. В общем случае в элементе dx возникают усилия:



Усилия N, M, Q являются внутренними усилиями по отношению к стержню. Однако, для выделенного элемента они являются внешними силами, а потому работу A можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями N, M, Q на соответствующих деформациях.

Потенциальная энергия упругой системы

а) работа, обусловленная действием продольной силы N

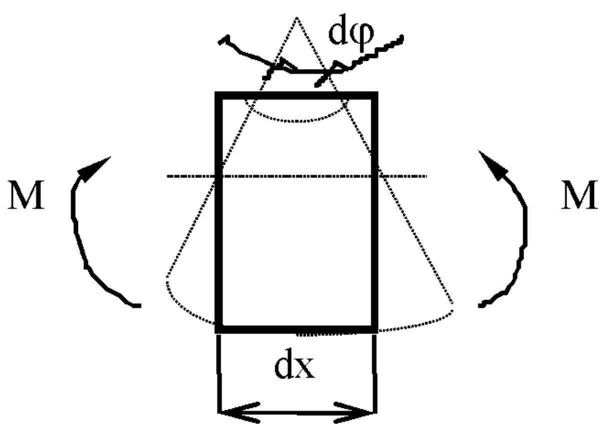


$$dA_N = \frac{1}{2} N\,\Delta dx;$$

$$\Delta dx = \frac{N\,dx}{EF};$$

$$dA_N = \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

б) работа, обусловленная действием изгибающего момента M

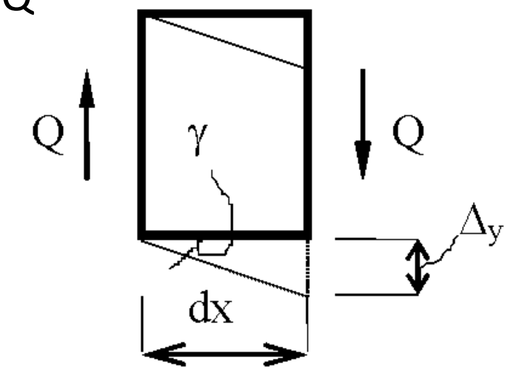


$$dA_M = \frac{1}{2} M d\varphi;$$

$$d\varphi = \frac{M\,dx}{EI}$$

$$dA_M = \frac{M^2 dx}{2EI}.$$

в) работа, обусловленная действием поперечной силы Q



$$dA_Q = \frac{1}{2} Q\, \Delta_y$$

$$\Delta_y = \gamma\, dx = \frac{\tau}{G} dx$$

Предположим, что касательные напряжения равномерно распределены по всей площади сечения, т.е. $\tau = Q / F$. Тогда: $\Delta_y = \dfrac{Q\,dx}{G\,F}$, $dA_Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2 dx}{G\,F}$.

В действительности касательные напряжения τ распределены по площади поперечного сечения неравномерно, что учитывается введением поправочного коэффициента η :

$$dA_Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2 dx}{G\,F}\eta \, .$$

Полная работа внешних сил, выраженная через внутренние усилия:

$$A = \sum\int_0^l \frac{M^2dx}{2EI} + \sum\int_0^l \frac{N^2dx}{2EF} + \sum\eta\int_0^l \frac{Q^2dx}{2GF}. \qquad (5)$$

На основании закона сохранения энергии работа A внешних сил переходит в потенциальную энергию U деформации, т.е.

$$U = \sum\int_0^l \frac{M^2dx}{2EI} + \sum\int_0^l \frac{N^2dx}{2EF} + \sum\eta\int_0^l \frac{Q^2dx}{2GF}. \qquad (6)$$

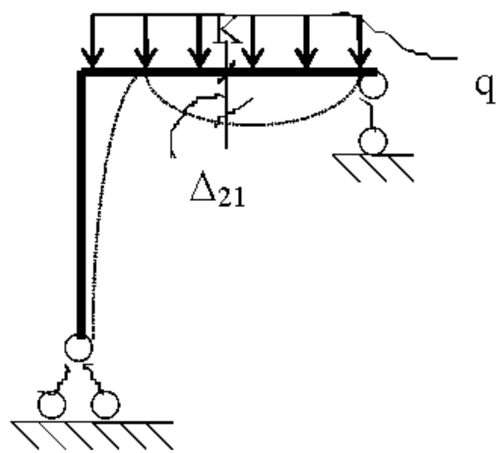
Возможная работа внешних сил, выраженная через внутренние усилия M_1, N_1, Q_1, на перемещениях $\frac{M_2dx}{EI}$, $\frac{N_2dx}{EF}$ и $\frac{Q_2dx}{GF}$

$$A_{1,2} = \sum\int_0^l \frac{M_1M_2dx}{EI} + \sum\int_0^l \frac{N_1N_2dx}{EF} + \sum\eta\int_0^l \frac{Q_1Q_2dx}{GF}. \qquad (7)$$

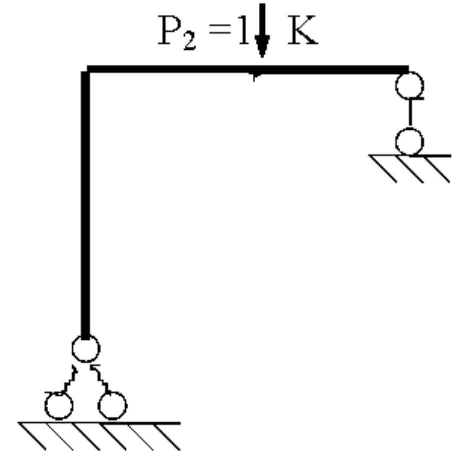
Интеграл Мора для определения перемещений

Пусть требуется определить вертикальное перемещение точки К при действии на сооружение заданной нагрузки. Рассмотрим два состояния системы : под действием заданной нагрузки - состояние 1; и по направлению искомого перемещения приложим силу P=1 - состояние 2.

1)



2)



Работа A_{21} сил второго состояния $P_2 = 1$ на перемещениях, вызванных силами первого состояния Δ_{21}:

$A_{21} = P_2\,\Delta_{21}$ учитывая, чтоP_2=1, $\Delta_{21} = A_{21}$.

Выразим A_{21} через внутренние усилия в стержнях системы

$$\Delta_{21} = A_{21} = \sum\int_0^l \frac{M_P\overline{M}dx}{EI} + \sum\int_0^l \frac{N_P\overline{N}dx}{EF} + \sum\eta\int_0^l \frac{Q_P\overline{Q}dx}{GF}. \qquad (8)$$

Здесь: M_p, N_p, Q_p - внутренние усилия в стержнях системы от действия внешних нагрузок (первое состояние); $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{Q}$ - от действия силы P=1 (второе состояние).

Порядок определения перемещений с помощью интеграла Мора

1) Записывают аналитические выражения усилий M_p, N_p, Q_p от заданной внешней нагрузки.

2) По направлению искомого перемещения прикладывают единичную силу P=1 или единичный момент M=1 (если определяется угол поворота сечения). Записывают выражения усилий $\overline{M}, \overline{Q}, \overline{N}$ от единичной силы.

3) Полученные аналитические выражения усилий M_p, N_p, Q_p и $\overline{M}, \overline{Q}, \overline{N}$ подставляют в правую часть формулы (8) и интегрированием по участкам в пределах всего сооружения, определяют искомое перемещение.

Примечания: В частных случаях формула Мора принимает более простой вид. Так, при расчете ферм, в стержнях которых возникают только продольные усилия, формула имеет вид:

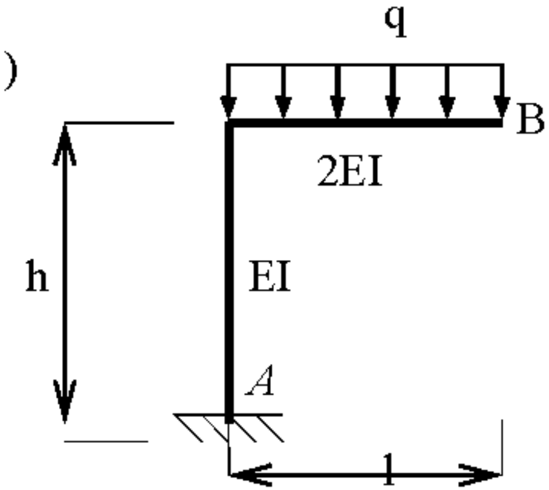
$$\Delta_{KP} = \sum \int_l \frac{N_P \overline{N} dx}{EF} = \sum \frac{N_P \overline{N} l}{EF} ,$$

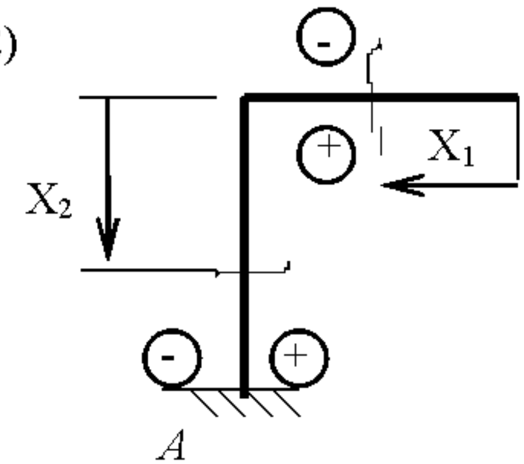
при расчете балок и рам, где влияние на перемещения продольных и поперечных сил незначительно, формула (8) принимает вид:

$$\Delta_{KP} = \sum \int_l \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} .$$

Пример

Определить вертикальное перемещение сечения В рамы от заданной нагрузки :

1) 

2) 

На ригеле, участок 1 $M_p = -\dfrac{qx^2}{2}$; $\overline{M} = -X$,

На стойке, участок 2 $M_p = -\dfrac{ql^2}{2}$; $\overline{M} = -1$.

Тогда, искомое перемещение

$$\Delta_в^{верт} = \sum\int_l \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} = \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x)\frac{dx}{2EI} + \int_0^h \left(-\frac{ql^2}{2}\right)(-l)\frac{dx}{EI} = \frac{q}{4EI}\int_0^l x^3 dx + \frac{ql^3}{2EI}\int_0^h dx =$$

$$= \left.\frac{qx^4}{16EI}\right|_0^l + \left.\frac{ql^3 x}{2EI}\right|_0^h = \frac{ql^4}{16EI} + \frac{ql^3 h}{2EI} \ .$$

Вычисление интеграла Мора путем перемножения эпюр (правило Верещагина, формула Симпсона)

Определение перемещений в системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, можно значительно упростить путем применения специальных приемов вычисления интегралов типа

$$\Delta_{\text{KP}} = \sum \int_0^l \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} \quad .$$

Предположим, что для какого-то элемента системы с постоянной жесткостью построены эпюры M_p и $\overline{M}$, причем одна из них, например $\overline{M}$, прямолинейна.

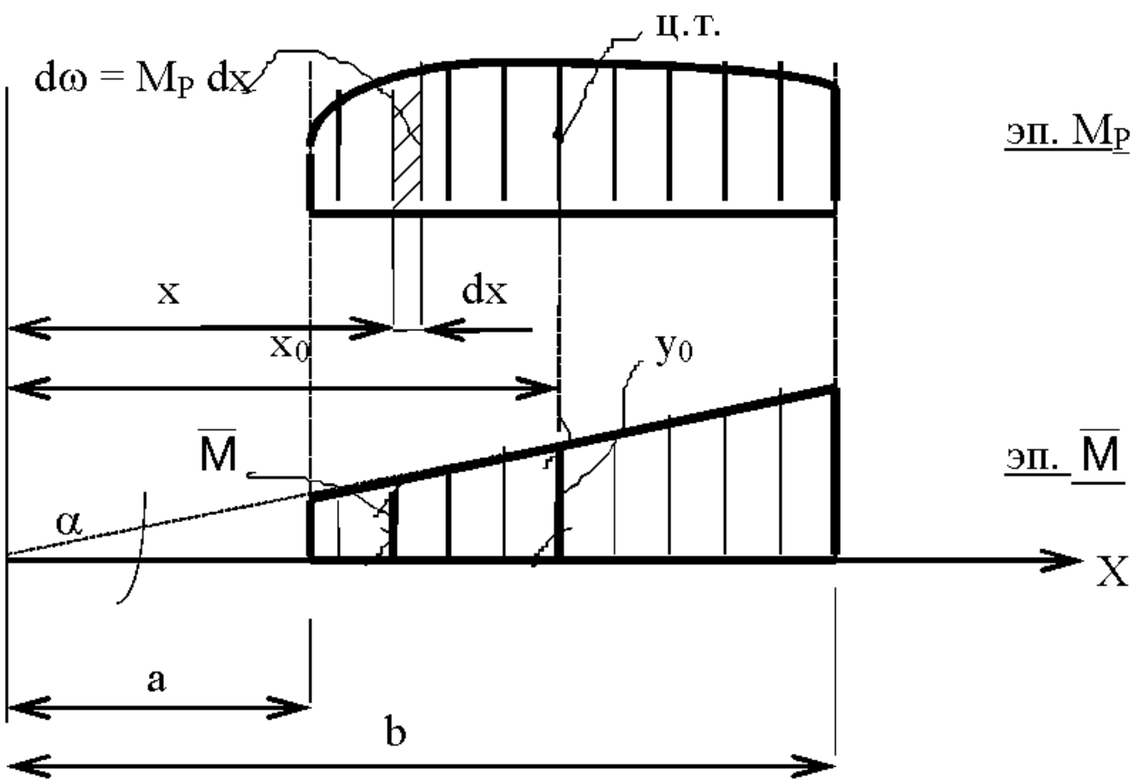
Вычислим:

$$\int_a^b \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} = \frac{1}{EI} \int_a^b M_P \overline{M} dx .$$

Вычисление интеграла Мора путем перемножения эпюр (правило Верещагина, формула Симпсона)

Из приведенного ниже рисунка следует, что $\overline{M} = tg\,\alpha \cdot X$, тогда:

$$\int_a^b M_P \overline{M} dx = \int_a^b M_P X tg\alpha dx = tg\alpha \int_a^b X M_P dx \ .$$



Вычисление интеграла Мора путем перемножения эпюр (правило Верещагина, формула Симпсона)

Вычислим:

$$\int_a^b \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_a^b M_P \overline{M} dx.$$

Из рисунка следует, что $\overline{M} = tg\,\alpha \bullet X$, тогда:

$$\int_a^b M_P \overline{M} dx = \int_a^b M_P X tg\alpha dx = tg\alpha \int_a^b X M_P dx .$$

Из рисунка $M_P\, dx = d\omega$, а интеграл $\int_a^b X d\omega$ представляет собой статический момент площади эпюры M_p относительно оси Y. Этот статический момент можно выразить иначе: $\int_a^b X d\varpi = \omega X_0$, где X_0 - расстояние от центра тяжести эпюры M_p до оси Y. Тогда:

$\int_a^b M_P \overline{M} dx = \omega X_0 tg\alpha$, но так как $X_0\ tg\,\alpha = y_0$ (см. рисунок), то $\int_a^b M_P \overline{M} dx = \omega y_0$

Или $$\int_a^b \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} = \frac{\omega y_0}{EI} . \qquad (9)$$

Таким образом, **результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату y0 другой (прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры**.

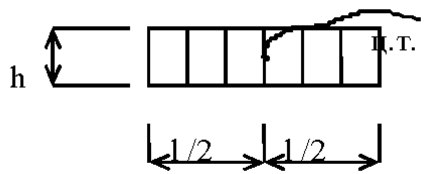
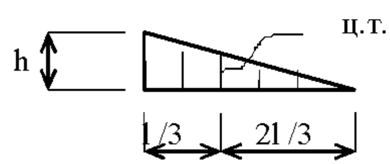
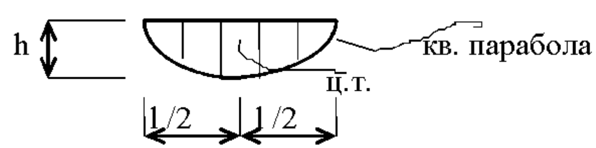
Вычисление интеграла Мора путем перемножения эпюр (правило Верещагина, формула Симпсона)

Порядок определения перемещений с использованием правила Верещагина:

1) строится грузовая эпюра Мр, от действия заданных внешних нагрузок;

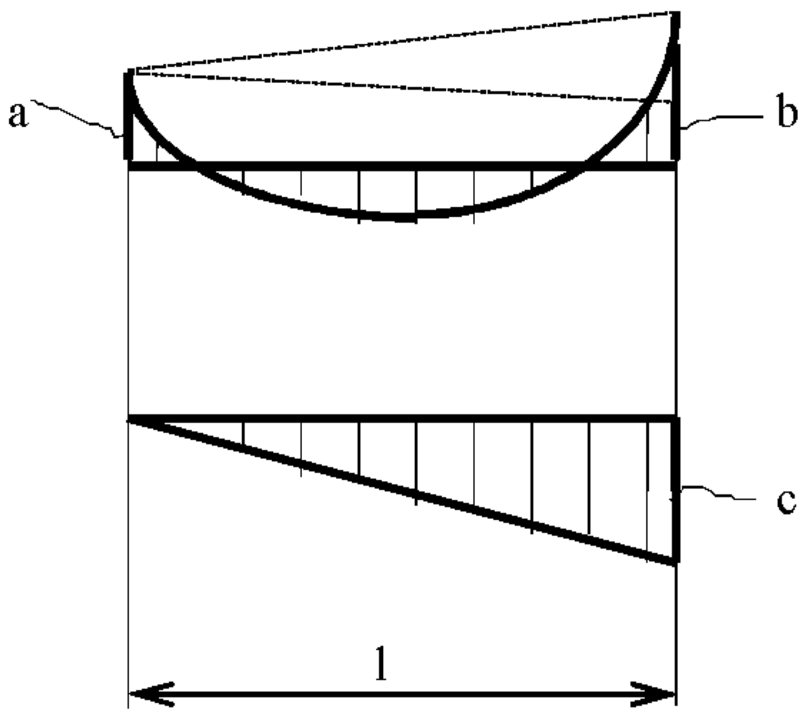
2) по направлению искомого перемещения прикладывается единичная сила Р=1 или единичный момент М=1 и строится единичная эпюра;

3) перемножая эпюры по правилу Верещагина, определяют искомое перемещение. Эпюры перемножают по участкам, результат перемножения берут со знаком "+ ", если эпюры расположены по одну сторону элемента и со знаком минус "- ", если по разные.

Эскиз эпюры и расстояния до центра тяжести	Площадь эпюры
	$l\,h$
	$1/2\; l\,h$
	$2/3\; l\,h = q\,l^3/12$

Вычисление интеграла Мора путем перемножения эпюр (правило Верещагина)

Пример. Перемножить по правилу Верещагина показанные на рисунке две эпюры.



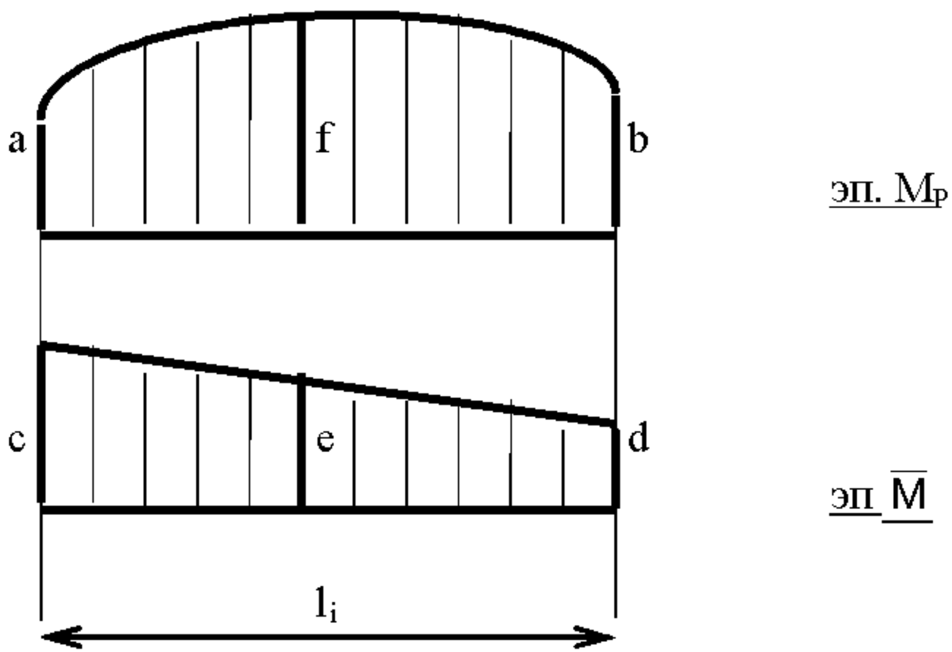
$$\frac{\omega y_0}{EI} = \frac{1}{EI}\left[-a \cdot l \cdot \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}(b-a)\cdot l \cdot \frac{2}{3}c + \frac{ql^3}{12}\frac{1}{2}c\right].$$

Вычисление интеграла Мора путем перемножения эпюр (формула Симпсона)

В некоторых случаях интеграл Мора удобно вычислять с помощью формулы Симпсона-Корноухова. Эта формула применима, если сумма порядков линий эпюр подинтегральных функций не превышает трех (кубической параболы).

Стержневую систему разбивают на отдельные участки, элементов с постоянной жесткостью, и на этих участках интеграл Мора вычисляют по формуле:

$$\int\limits_{l_i} \frac{M_P \overline{M} dx}{EI} = \frac{l_i}{6EI}\left(a \cdot c + 4fe + bd\right), \tag{10}$$



Здесь: f,e - ординаты эпюр M_p и $\overline{M}$ посредине длины участка.