ПРАВИЛЬНЫЕ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Далее

Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, — одна из самых увлекательных глав геометрии.
Л. А. Люстерник

- Правильные многогранники
- Полуправильные многогранники
- Это интересно

Правильные многогранники

«Правильных многогранников вызывающе мало,
но этот весьма скромный по численности отряд сумел
пробраться в самые глубины различных наук»
Л. Кэррол.

Правильным многогранником ***называется выпуклый многогранник, грани которого – равные правильные многоугольники, а двугранные углы при всех вершинах равны между собой. Доказано, что в каждой из вершин правильного многогранника сходится одно и то же число граней и одно и то же число ребер.***

Всего в природе существует пять правильных многогранников (почему?).

Тетраэдр
Октаэдр
Гексаэдр
Додекаэдр
Икосаэдр

Названия правильных многогранников пришли из Греции. В дословном переводе с греческого "тетраэдр", "октаэдр", "гексаэдр", "додекаэдр", "икосаэдр" означают: "четырехгранник", "восьмигранник", "шестигранник". "двенадцатигранник", "двадцатигранник". Этим красивым телам посвящена 13-я книга "Начал" Евклида. Их еще называют телами Платона, т.к. они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания.

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у него граней, сколько ребер и вершин. Как и для любых выпуклых многогранников, для правильных справедлива формула Эйлера.

Вернуться на главную

Правильные многогранники

Иоганн Кеплер называл куб "родителем" всех правильных многогранников. На основе куба он смог построить все другие виды правильных многогранников.

- *Если провести в противоположных гранях куба скрещивающиеся диагонали, то их концы окажутся вершинами тетраэдра, а вершины октаэдра – это центры граней куба. Полученные многоугольники действительно правильные, так как их грани – правильные треугольники. Равенство же двугранных углов следует из того, что при повороте куба ребро многогранника можно перевести в любое другое.*
- *Для того, чтобы построить икосаэдр, на каждой грани куба нужно построить отрезок длиной х (пока что это – любая длина) так, чтобы он был параллелен двум сторонам своей грани и перпендикулярен таким же отрезкам на соседних гранях. Середина его должна совпадать с центром грани. Соединим концы этих отрезков между собой, и мы получим двадцатигранник, грани которого – треугольники, и при каждой вершине их пять.*

  Найдем такое число х, при котором все ребра этого многогранника равны, т. е. он правильный. Т.к. куб симметричен, то все ребра, не принадлежащие граням куба равны между собой. Примем длину ребра куба за а. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 2), где AC = а – х,
  BC2 = CD2 + BD2 = 1/4 а2 + 1/4 х2. По теореме Пифагора получаем:
  AB2 = AC2 + CB2 = (х2 + а2 + (а – х)2) / 4.

  Приравнивая AB к х, получаем квадратное уравнение: х2 + а х – а2 = 0, откуда х = а (√ 5 – 1) / 2. Интересно, что полученный множитель при а, т. е. отношение ребра куба к ребру вписанного в него икосаэдра – не что иное, как золотое сечение.

  Теперь докажем равенство двугранных углов. Рассмотрим 5 ребер, выходящих из точки А. Концы их всех равноудалены и от точки А, и от центра куба О. Отсюда следует, что они лежат на пересечении двух сфер с центрами А и О, а значит – на окружности, причем ребра, соединяющие их с точкой А, равны. Значит, эти пять точек и точка а – вершины правильной пирамиды, а ее двугранные углы при вершине равны.
- *Додекаэдр из икосаэдра можно получить так же, как и октаэдр из куба. соединяя середины смежных граней икосаэдра, мы получаем правильнгый пятиугольни. Всего таких пятиугольников будет 12. Двугранные углы многоугольника будут равны, так как трехгранные углы при его вершинах имеют равные плоские углы.*

Философия Платона

Великий древнегреческий ученый Платон, живший в IV-V вв. до н. э. и его ученики в своих работах уделяли большое внимание правильным многогранникам, и их поэтому ещё называют "платоновыми телами". Они считали, что эти тела олицетворяют сущность природы. Человечеству были известны четыре стихии: огонь, вода, земля и воздух. По мнению Платона их атомы имели вид правильных многогранников: огня — тетраэдр, земли — гексаэдр, воздуха —октаэдр, воды — икосаэдр. Но оставался еще додекаэдр, для которого отсутствует полное соответствие. Платон предположил, что существует еще одна сущность- мировой эфир, атомы которого имеют вид додекаэдра.

Возникает вопрос «какими соображениями руководствовался Платон, приписывая частицам огня форму тетраэдра, частицам земли – форму куба и т.д.?». Здесь он учитывает чувственно-воспринимаемые свойства соответствующих стихий. Огонь – наиболее подвижная стихия, он обладает разрушительным действием, проникая в другие тела (сжигая или расплавляя, или испаряя их); при соприкосновении с ним мы испытываем чувство боли, как если бы мы укололись или порезались.

Какие частицы могли бы обусловить все эти свойства и действия? Очевидно, наиболее подвижные и легкие частицы, и притом обладающие режущими гранями и колющими углами. Из четырех многогранников, о которых может идти речь, в наибольшей степени удовлетворяет тетраэдр. Поэтому, говорит Платон, образ пирамиды (т.е. тетраэдра) и должен быть в согласии с правильным рассуждением и с правдоподобием, первоначалом и семенем огня. Наоборот, земля выступает в нашем опыте как самая неподвижная и устойчивая из всех стихий. Поэтому частицы, из которых она состоит, должны иметь самые устойчивые основания. Из всех четырех тел этим свойством в максимальной мере обладает куб. Аналогичным образом с двумя прочими стихиями мы соотнесем частицы, обладающие промежуточными свойствами. Икосаэдр, как самый обтекаемый, представляет частичку воды, октаэдр – частицу воздуха.

Пятый многогранник – додекаэдр – воплощал в себе «все сущее», символизировал весь мир и почитался главнейшим.

Почему их пять?

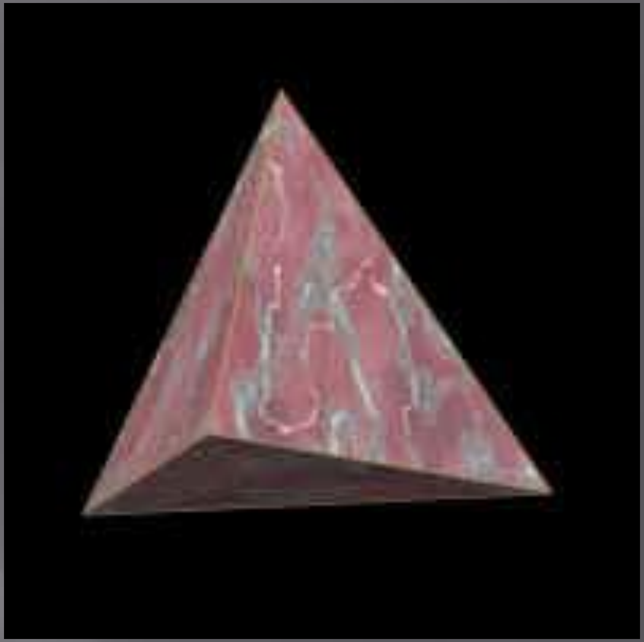
Доказательство того, что существует ровно пять правильных выпуклых многогранников, очень простое. Рассмотрим развертку вершины такого многогранника. Каждая вершина может принадлежать трем и более граням.

- Сначала рассмотрим случай, когда грани многогранника - равносторонние треугольники. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен 60°, три таких угла дадут в развертке 180°. Если теперь склеить развертку в многогранный угол, получится тетраэдр - многогранник, в каждой вершине которого встречаются три правильные треугольные грани. Если добавить к развертке вершины еще один треугольник, в сумме получится 240°. Это развертка вершины октаэдра. Добавление пятого треугольника даст угол 300° - мы получаем развертку вершины икосаэдра. Если же добавить еще один, шестой треугольник, сумма углов станет равной 360° - эта развертка, очевидно, не может соответствовать ни одному выпуклому многограннику.
- Теперь перейдем к квадратным граням. Развертка из трех квадратных граней имеет угол 3x90°=270° - получается вершина куба, который также называют гексаэдром. Добавление еще одного квадрата увеличит угол до 360° - этой развертке уже не соответствует никакой выпуклый многогранник.
- Три пятиугольные грани дают угол развертки 3*108°=324° - вершина додекаэдра. Если добавить еще один пятиугольник, получим больше 360°.
- Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки 3*120°=360°, поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует. Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

  Таким образом, мы убедились, что существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.

Тетраэдр

Простейшим среди правильных многогранников является тетраэдр. Его четыре грани – равносторонние треугольники. Четыре – это наименьшее число граней, отделяющих часть трехмерного пространства. Каждая грань отделяется ребром в точности от одной грани. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Все многогранные углы тетраэдра равны между собой. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов. Таким образом, тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.



Элементы симметрии:

Тетраэдр не имеет центра симметрии, но имеет 3 оси симметрии и 6 плоскостей симметрии.

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

Радиус вписанной сферы:

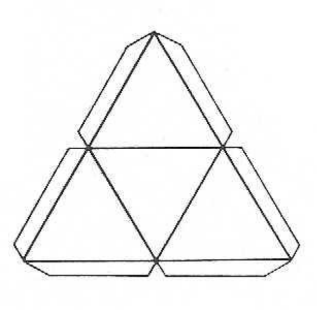
Площадь поверхности:

$$S = a^2\sqrt{3}$$

Объем тетраэдра:

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

Модель тетраэдра можно сделать, пользуясь одной разверткой, на которой будут расположены все четыре треугольные грани. Чтобы изготовить модель, достаточно склеить боковые грани



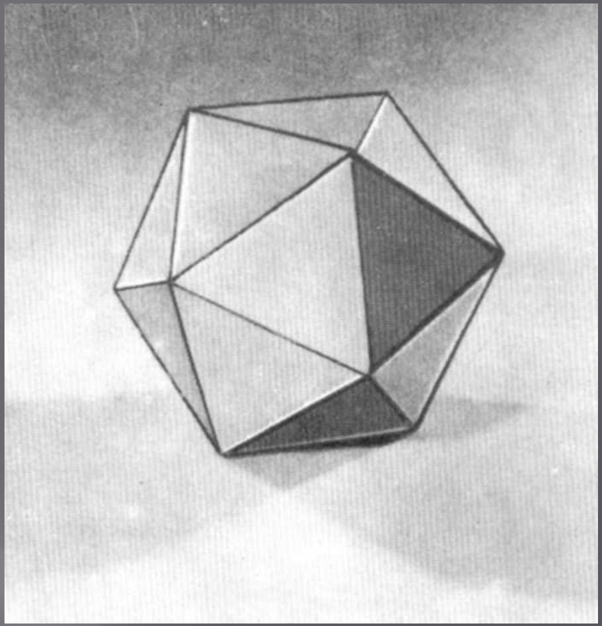
Икосаэдр

Икосаэдр – одно из пяти платоновых тел, по простоте следующее за тетраэдром и октаэдром.

Икосаэдр составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов. Таким образом икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.

Элементы симметрии:

Икосаэдр имеет центр симметрии - центр икосаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.



Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

Радиус вписанной сферы:

$$r = \frac{a}{4\sqrt{3}}\left(3+\sqrt{5}\right)$$

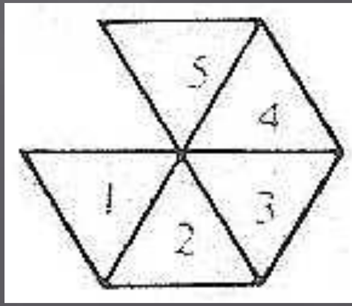
Площадь поверхности:

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

Объем икосаэдра:

$$V = \frac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$$

Модели можно строить исходя из одного и того же начального расположения пяти равносторонних треугольников, как показано на рисунке. Они образуют невысокую пятиугольную пирамиду без основания. К сторонам ее приклеиваем следующие пять треугольников. Между ними приклеиваем по одному треугольнику – это сделать несложно, если обратить внимание на то, что в каждой вершине сходятся пять граней. Завершая модель, приклеим последние пять треугольников.



Гексаэдр

Куб составлен из шести квадратов. Каждая его вершина является вершиной трех квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов. Таким образом, куб имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

Элементы симметрии:

Куб имеет центр симметрии - центр куба, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Радиус вписанной сферы:

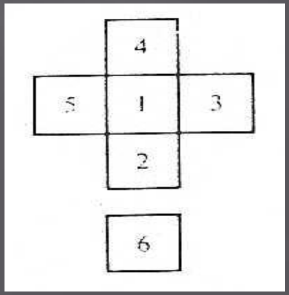
$$r = \frac{a}{2}$$

Площадь поверхности куба:

$$S = a^2$$

Объем куба:

$$V = a^3$$



Развертка модели квадрата дана на рисунке. Чтобы изготовить модель, достаточно склеить боковые грани.

Октаэдр

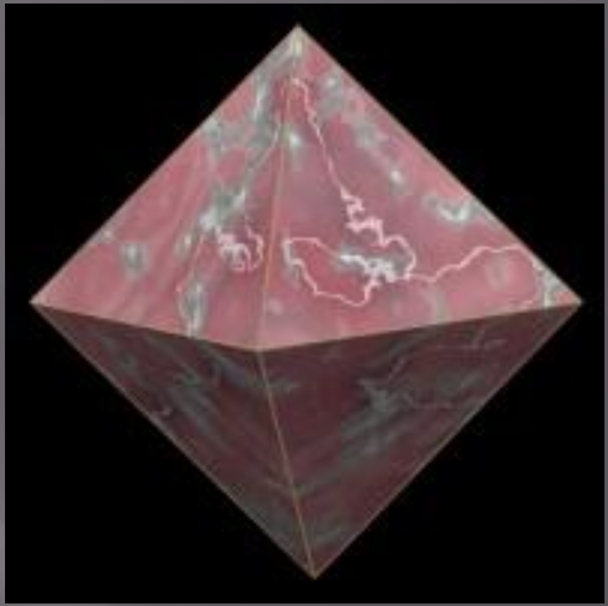
Октаэдр составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников. Противоположные грани лежат в параллельных плоскостях.

Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов.

Таким образом, октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.

Элементы симметрии:

Октаэдр имеет центр симметрии - центр октаэдра, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.



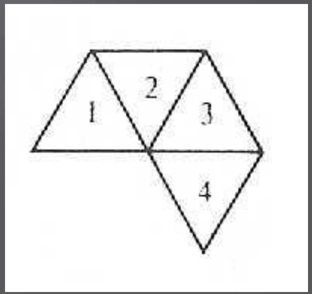
Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$

Площадь поверхности: $S = 2a^2\sqrt{3}$

Объем октаэдра: $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$

Модель этого многогранника можно изготовить из двух равных частей, одна из которых показана на рисунке. Склеивая между собой грани 1 и 4, получим правильную четырехугольную пирамиду без квадратного основания. Эта часть составляет половину модели. Склеивая ее с такой же частью, получим октаэдр. Теперь можно заметить, что квадрат, только что служивший основанием первой половины модели, на самом деле является одним из трех квадратов такого рода, которые можно видеть на полной модели. При этом ребра квадратов лежат в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.



Додекаэдр

Додекаэдр представляет наибольшую привлекательность среди платоновых тел, соперничая с икосаэдром, который почти ему не уступает (а может быть, в чем-то и превосходит).

Додекаэдр составлен из двенадцати равносторонних пятиугольников. Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников.

Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градусов.

Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.

Элементы симметрии:

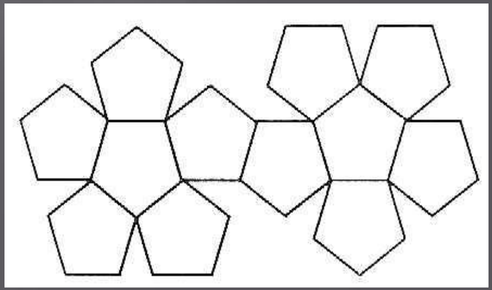
Додекаэдр имеет центр симметрии - центр додекаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}$

Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$

Площадь поверхности: $S = 3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$

Объем додекаэдра: $V = \frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$



Модель этого многогранника можно изготовить, если воспользоваться разверткой, изображенной на рисунке, при последовательном соединении граней.

Полуправильные многогранники

Наряду с правильными многогранниками существуют еще многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани – правильные многоугольники нескольких видов. Они не могут быть отнесены к правильным – их называют полуправильными многогранниками.

В полуправильных многогранниках равны одноименные многоугольники; причем в каждой вершине сходится одно и тоже число одинаковых граней; в одинаковом порядке каждый из этих многогранников может быть вписан в сферу.

Конечно, возникает вопрос: сколько всего существует полуправильных многогранников? Более двух тысяч лет думали, что только тринадцать (их называют телами Архимеда, т.к. именно ему принадлежит их открытие), не считая двух бесконечных серий, составленных из призм и антипризм.

Разрешите назвать тела Архимеда и показать их изображение.

Но в настоящее время находят все новые и новые полуправильные многогранники. Так математик В.Г. Ашкинузе нашел еще один полуправильный многогранник. Если в многограннике ромбокубооктаэдр верхнюю «восьмиугольную чашу» повернуть на 45º, то получим многогранник, который «не совсем архимедово» тело: он не обладает некоторыми свойствами, которыми обладают тела Архимеда, но зато у него есть свои свойства. Кроме этого, можно еще представить полуправильные многогранники.

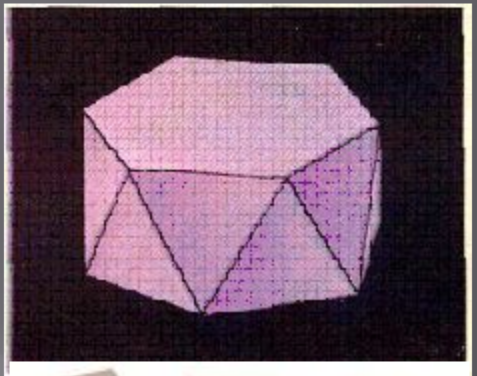
Вернуться на главную

Антипризма

Представьте себе, например, два правильных шестиугольника, расположенных в параллельных плоскостях, один из которых повернут относительно центра другого на 30 градусов. Каждая вершина, как нижнего, так и верхнего шестиугольников, соединена с ближайшими вершинами другого. Расстояние между шестиугольниками (основаниями) подбирается так, чтобы боковыми гранями были правильные треугольники.

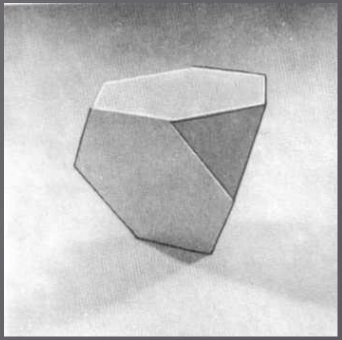
У шестиугольной антипризмы 12 вершин, 14 граней и 24 ребра, все ребра и все четырехгранные углы равны между собой.

Используя для призм и антипризм все правильные многоугольники мы получим бесконечные серии полуправильных многогранников. Однако, эти серии не исчерпывают всех равноугольно полуправильных многогранников.

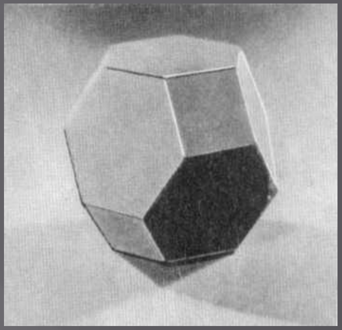


Полуправильные многогранники

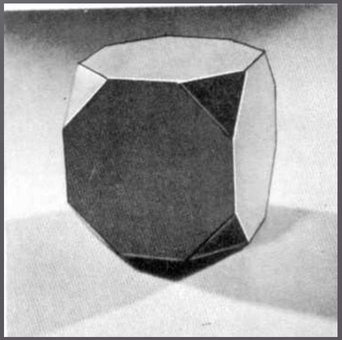
- ***Усеченный тетраэдр***. Он получается при сечении тетраэдра плоскостями. Гранями являются треугольники и шестиугольники.



- ***Усеченный октаэдр***. Он получается при сечении правильного октаэдра плоскостями. Гранями являются квадраты и шестиугольники.

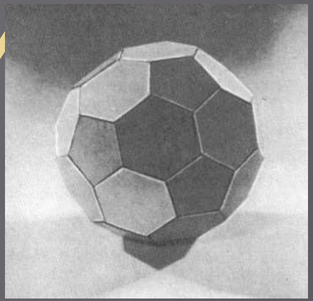


- ***Усеченный гексаэдр***. Этот многогранник представляет собой усеченный куб, гранями являются треугольники и восьмиугольники.

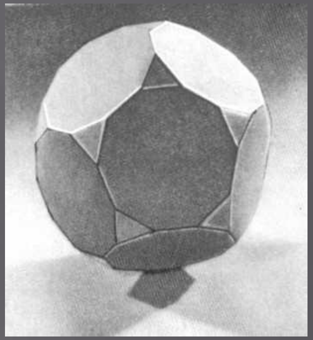


Полуправильные многогранники

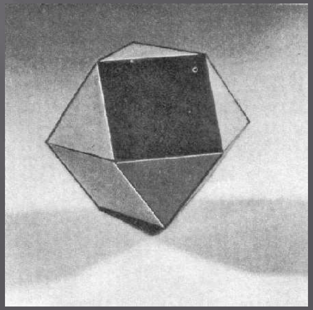
- ***Усеченный икосаэдр***. Это усеченный вариант икосаэдра. Гранями являются пятиугольники и шестиугольники.



- ***Усеченный додекаэдр***. Гранями являются треугольники и десятиугольники.

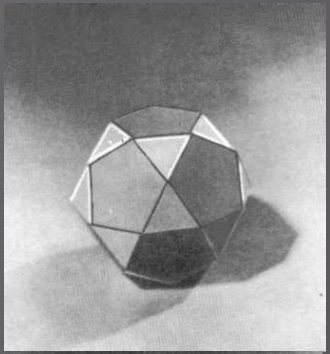


- ***Кубооктаэдр***. Само название многогранника указывает на некоторую близость его к кубу и к октаэдру. Важнейшим свойством этого многогранника является то, что он имеет грани двух типов, причем каждая грань одного типа соседствует только с гранями другого типа. Многогранники, обладающие этим свойством, называются квазиправильными.

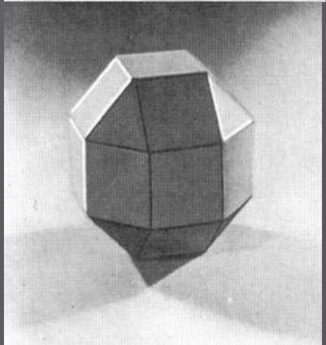


Полуправильные многогранники

- ***Икосододекаэдр***. Подобно кубооктаэдру, являет собой квазиправильный комбинированный многогранник. Его также можно рассматривать как общую часть соединения двух тел – икосаэдра и додекаэдра.



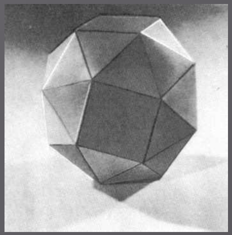
- ***Ромбокубооктаэдр***. Название многогранника и на этот раз объясняет его происхождение. Гранями являются треугольники и квадраты.



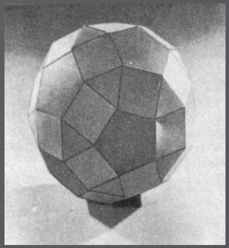
- ***Ромбоусеченный икосододекаэдр***. Этот многогранник часто называют также усеченным додекаэдром. Гранями являются квадраты, шестиугольники и десятиугольники.

Полуправильные многогранники

- ***Курносый куб***. Этот многогранник можно вписать в куб таким образом, что плоскости шести квадратных его граней совпадут с плоскостями граней куба, причем эти квадратные грани курносого куба окажутся как бы слегка повернутыми по отношению к соответственным граням куба.



- ***Ромбоикосододекаэдр***. Эта модель принадлежит к числу наиболее привлекательных среди всех других моделей архимедовых тел. Гранями являются треугольники, квадраты и пятиугольники.



- ***Ромбоусеченный кубооктаэдр***. Этот многогранник, известный также под названием усеченного кубооктаэдра, гранями имеет квадраты, шестиугольники и восьмиугольники.

- ***Курносый додекаэдр*** – это последний из семейства выпуклых однородных многогранников. Гранями являются треугольники и пятиугольники.

Это интересно

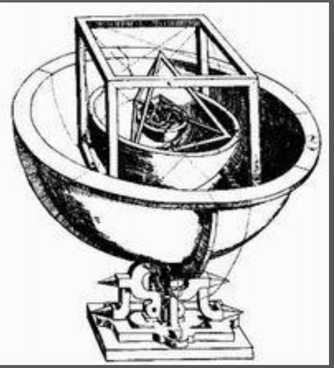
- Теория Кеплера
- Многогранники в искусстве
- Многогранники в природе

Вернуться на главную

Теория Кеплера

Кеплер Иоганн (Kepler I,1571-1630г) – немецкий астроном. Открыл законы движения планет. В 1596 году Кеплер предложил правило, по которому вокруг сферы Земли описывается додекаэдр, а в нее вписывается икосаэдр. («Гармония мира» 1619г.)

И.Кеплер предположил, что расстояния между орбитами планет можно получить на основании Платоновых тел, вложенных друг в друга. Результаты его расчётов хорошо согласовались с действительными расстояниями между планетными орбитами



Весьма оригинальна космологическая гипотеза Кеплера, в которой он попытался связать некоторые свойства Солнечной системы со свойствами правильных многогранников. Кеплер предположил, что расстояния между шестью известными тогда планетами выражаются через размеры пяти правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел). Между кажд ой парой "небесных сфер", по которым, согласно этой гипотезе, вращаются планеты, Кеплер вписал одно из Платоновых тел. Вокруг сферы Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, описан октаэдр. Этот октаэдр вписан в сферу Венеры, вокруг которой описан икосаэдр. Вокруг икосаэдра описана сфера Земли, а вокруг этой сферы - додекаэдр.

Додекаэдр вписан в сферу Марса, вокруг которой описан тетраэдр. Вокруг тетраэдра описана сфера Юпитера, вписанная в куб. Наконец, вокруг куба описана сфера Сатурна.

Эта модель выглядела для своего времени довольно правдоподобно. Во-первых, расстояния, вычисленные при помощи этой модели, были достаточно близки к истинным (учитывая доступную тогда точность измерения). Во-вторых, модель Кеплера давала объяснение, почему существует только шесть (именно столько было тогда известно) планет - именно шесть планет гармонировали с пятью Платоновыми телами.

Однако даже на тот момент эта привлекательная модель имела один существенный недостаток: сам же Кеплер показал, что планеты вращаются вокруг Солнца не по окружностям ("сферам"), а по эллипсам (первый закон Кеплера). Нечего и говорить, что позже, с открытием еще трех планет и более точным измерением расстояний, эта гипотеза была полностью отвергнута.

Замечено, что наша матушка-Земля последовательно проходит эволюцию правильных объемных фигур. Существует много данных о сравнении структур и процессов Земли с вышеуказанными фигурами.

Полагают, что четырем геологическим эрам Земли соответствуют четыре силовых каркаса правильных Платоновских тел: Протозоа - тетраэдр (четыре плиты) Палеозою - гексаэдр (шесть плит) Мезозою - октаэдр (восемь плит) Кайнозою - додекаэдр (двенадцать плит).

Многогранники в искусстве

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой - красотой отточенной и строгой возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.
Бертран Рассел

Мир наш исполнен симметрии. С древнейших времен с ней связаны наши представления о красоте. Наверное, этим объясняется непреходящий интерес человека к ***правильным многогранникам*** - удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание множества выдающихся мыслителей, от Платона и Евклида до Эйлера и Коши.

Форма первоэлемента Земли - куб, Воздуха - октаэдр, Огня - тетраэдр, Воды - икосаэдр, а всему миру творец придал форму пятиугольного додекаэдра. О том, что Земля имеет форму шара, учили Пифагорейцы. По Пифагору, существует 5 телесных фигур: высшее божество само построило Вселенную на основании геометрической формы додекаэдра. Земля подобна Вселенной, и у Платона Земля – тоже додекаэдр. (Сальвадор Дали. Тайная вечеря (1955))

Морис Эшер. “Рептилии”(литография, 1943 г).

Надгробный памятник в кафедральном соборе Солсбери

Титульный лист книги Ж. Кузена «Книга о перспективе»

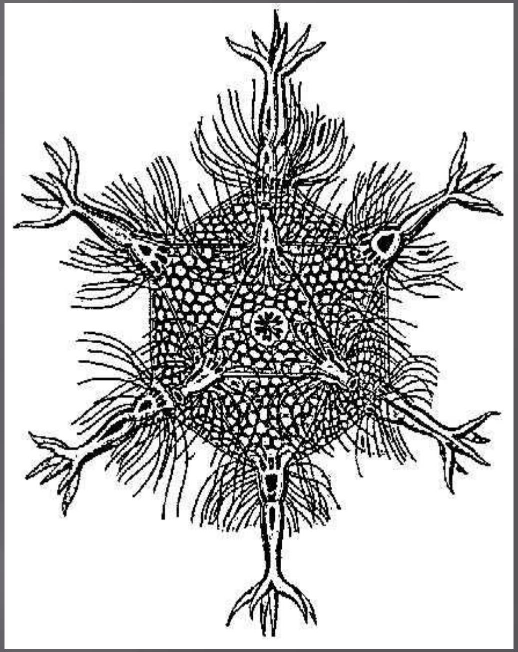
Многогранники в природе

Правильные многогранники встречаются и в живой природе.

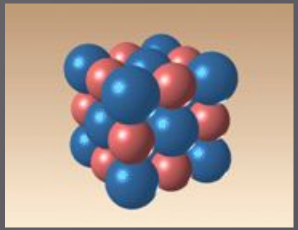
Например, скелет одноклеточного организма феодарии (Circogonia icosahedra) по форме напоминает икосаэдр. Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшее животное пытается себя защитить: из 12 вершин скелета выходят 12 полых игл. На концах игл находятся зубцы, делающие иглу еще более эффективной при защите.

Чем же вызвана такая природная геометризация феодарий? Тем, по-видимому, что из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наибольший объем при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи.

Интересно, что икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы некоторых вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось раньше. Для того чтобы определить его форму, брали разные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень – икосаэдр.

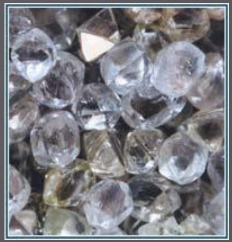


Многогранники в природе



Правильные многогранники – самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Взять хотя бы поваренную соль, без которой мы не можем обойтись. Известно, что она хорошо растворима в воде, служит проводником электрического тока. А кристаллы поваренной соли (NaCl) имеют форму куба (см. рис.).

При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми квасцами (K[Al(SO4)2]·12H2O), монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра.



Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана (FeS). Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра (см.рис.).

В разных химических реакциях применяется сурьменистый сернокислый натрий (Na5(SbO4(SO4)) – вещество, синтезированное учеными. Кристалл сурьменистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра.

Последний правильный многогранник – икосаэдр передает форму кристаллов бора (B). В свое время бор использовался для создания полупроводников первого поколения.

Итак, благодаря правильным многогранникам, открываются не только удивительные свойства геометрических фигур, но и пути познания природной гармонии.