Дисциплина:

МАТЕМАТИКА

- Лектор: Ахкамова Юлия Абдулловна
- доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
- akhkamovayua@cspu.ru

МАТЕМАТИКА ППИ

Лекция № 18 (продолжение).

Основные формулы комбинаторики. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ:

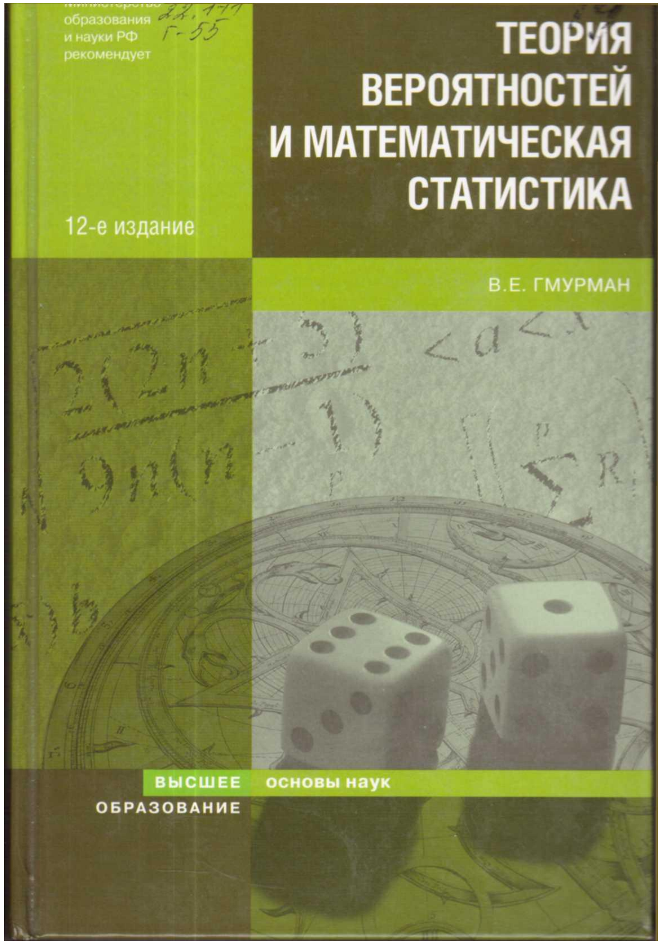
- 3.Теоремы сложения вероятностей.
- 4.Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

- Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.
- Баврин И.И. Высшая математика.
- Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть II.

ЛИТЕРАТУРА

- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование, 2006, с. 50-63.

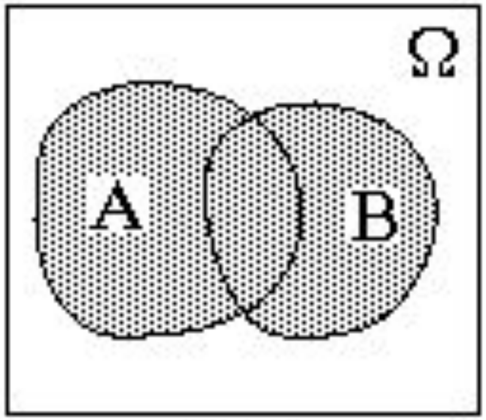


- <u>**Учебный вопрос.**</u>

Теоремы сложения вероятностей.

- **Суммой** **нескольких событий называется событие, состоящие в наступлении в результате испытания хотя бы одного из этих событий.**

$$A + B,\ A \cup B,\ \ A \ \ \textit{или} \ \ B$$

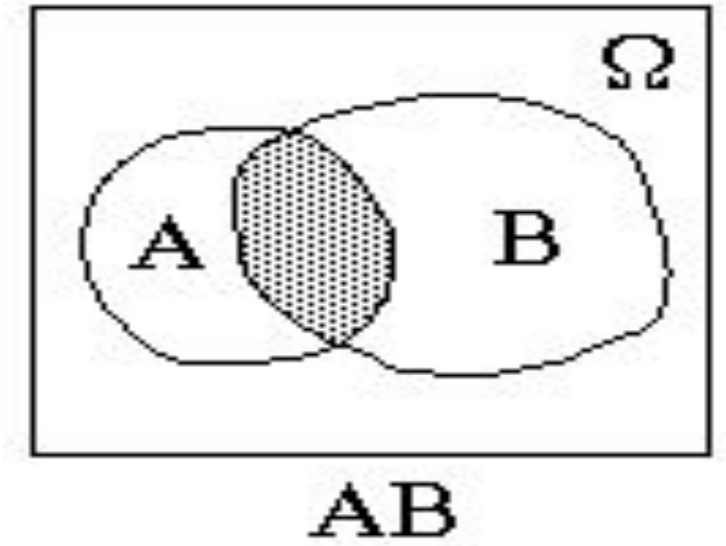


A+B

- Пусть A - идет дождь, а B - идет снег, то (A + B) - либо дождь, либо снег, либо дождь со снегом, т. е. осадки;
- Ω – пространство элементарных исходов испытания.

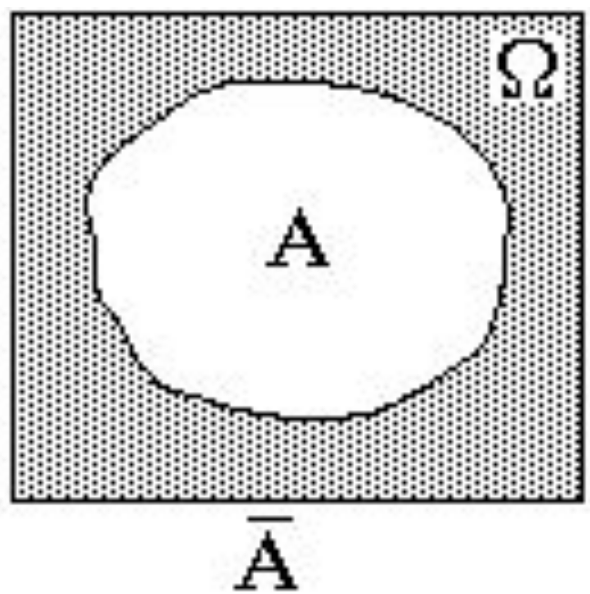
- **Произведением** **нескольких событий называется событие, состоящие в совместном наступлении в результате испытания всех этих событий.**

$A \cdot B, A \cap B, A \ и \ B$

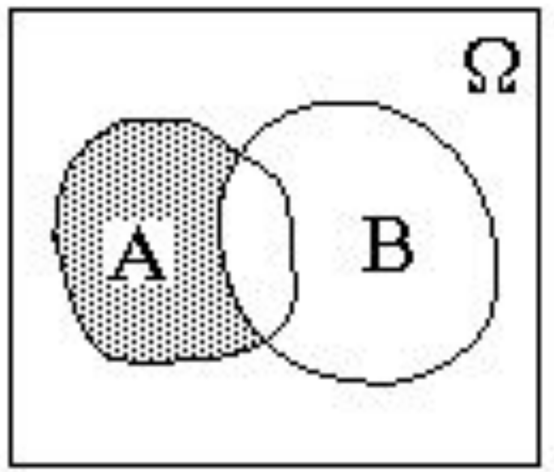


- Пусть события: А – «из колоды карт вынута дама», В – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Значит, А·В означает «вынута дама пик».

Противоположное событие $\bar{A}$ **(по отношению к рассматриваемому событию А) – это событие, которое происходит, если не происходит событие А.**



- **Разностью** событий A и B называется событие A\B, которое состоит в том, что происходит событие A, но не происходит событие B.



A/B

- **Теорема 1 сложения вероятностей.**

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- **Следствие.**

Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$P(A_1)+\ldots+P(A_n)=1.$$

В частности,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

- **Пример.** Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а по геометрии - 0,6. Какова вероятность правильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?
- Решение.

Обозначим через A событие – правильно решены все три задачи по алгебре;   через B – правильно решены все три задачи по геометрии.

Тогда событие - правильно решены все три задачи хотя бы по одному из предметов – записывается как $A + B$.

Так как события A и B несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Найдем вероятности событий A и B.

$P(A) = 0{,}8^3 = 0{,}512;$

$P(B) = 0{,}6^3 = 0{,}216.$

Следовательно, $P(A+B) = 0{,}512 + 0{,}216 = 0{,}728.$

- **Теорема 2 сложения вероятностей.**

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

- **Расширенная теорема сложения**

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC).

- Пример. Из 25 студентов группы 10 человек занимаются сноубордом, 5 – горными лыжами, 5 - сноубордом и горными лыжами, а остальные - другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом?
- Решение.

- Обозначим через А событие – выбранный спортсмен занимается только горными лыжами; через В – выбранный спортсмен занимается только сноубордом.
- Тогда событие - наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом можно записать как А + В.
- Так как события А и В совместны, то

  Р(А+В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ).
- Найдем вероятности событий А, В и АВ.

Итак, Р(А)=5/25=0,2; Р(В)=10/25=0,4;

Р(АВ)=5/25=0,2 .
- Следовательно, Р(А+В)=0,2+0,4–0,2=0,4.

- **Определение.** Событие А называется **независимым** от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

- **Определение.** Два события называются **зависимыми**, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

- **Учебный вопрос.**

Условная вероятность.

Теоремы умножения вероятностей.

- **Определение.** Вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А произошло, называется **условной вероятностью** события В.

- **Обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$.**
- **По определению**

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность появления двух событий равна произведению вероятности наступления одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \quad \text{или}$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$$

- В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что все предыдущие события уже совершились

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

- Если события независимые, то **теорема умножения вероятностей** принимает вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Пример.** Из 25 билетов студент выучил 20. Какова вероятность того, что он вытянет счастливый билет, который знает, если он вытягивает билет:

  а) первым; б) вторым.
- **Решение.**
- **а) P= 20/25=4/5.**
- **б) обозначим события:**

А – первый студент вынул «счастливый» билет,
В – второй студент вынул «счастливый» билет.

$$P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(A)\cdot P(B/A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})=$$

$$=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}=\frac{96}{120}=\frac{4}{5}$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – независимые события.
Событие A – наступило хотя бы одно из A_i, $A = A_1 + \ldots + A_n$.
Если A_i несовместны, то
$P(A) = P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.
Если A_i совместны, то рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ - ни одно из A_i не наступило,

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$$

Тогда

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n)}$$

- **Пример.** Пусть S — множество всех исходов при трехкратном бросании монеты. Обозначим через A событие «в первый раз выпал герб», через B событие «выпало не менее двух гербов». Найдите вероятности событий P(A), P(B) и P(AB), если все исходы бросаний равновероятны. Независимы ли эти события?
- Решение.

Общее число исходов n = 2·2·2 = 8.

Число исходов, благоприятствующих событию A, m = 1·2·2 = 4.

Итак, P(A) = 4/8=0,5.

Исходы, благоприятствующие событию B – (Г,Г,Р); (Г,Р,Г); (Р,Г,Г); (Г,Г,Г), следовательно, m = 4. Таким образом, P(B) = 4/8=0,5.

Исходы, благоприятствующие событию AB – (Г,Г,Р); (Г,Р,Г); (Г,Г,Г), следовательно, m = 3. Таким образом, P(AB) =3/8.

Если события A и B независимы, то выполняется равенство

P(AB) = P(A) · P(B). Имеем P(A) · P(B) = 0,5·0,5=0,25 и это не совпадает с вероятностью события AB, значит, события A и B зависимы.

- **Пример.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, второго - 0,75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?
- Решение.

Обозначим через A_i событие – i-ый стрелок попадет в цель;

противоположное событие $\overline{A_i}$ - i-ый стрелок не попадет в цель, i =1, 2.

Тогда событие - хотя бы один стрелок попадет в цель

$$A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$$

$$P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2) = P(A_1)\,P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\,P(A_2) + P(A_1)\,P(A_2).$$

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}9$; $P(A_2) = 0{,}75$.

Тогда $P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;

$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Таким образом,

$$P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot 0{,}75 + 0{,}9 \cdot 0{,}75 =$$

$$= 0{,}225 + 0{,}075 + 0{,}675 = 0{,}975.$$

Или $P = 1 - P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$.

Задание на самоподготовку

- **Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование,2009, с. 30-51.**