Координаты вектора в пространстве.

Скалярное и векторное произведения векторов.

8. Пусть в пространстве Oxyz задан вектор $\vec{a}$

Проекция $a_x = пр_x \vec{a}$, $a_y = пр_y \vec{a}$, $a_z = пр_z \vec{a}$ вектора на оси координат называются координатами вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right]$$

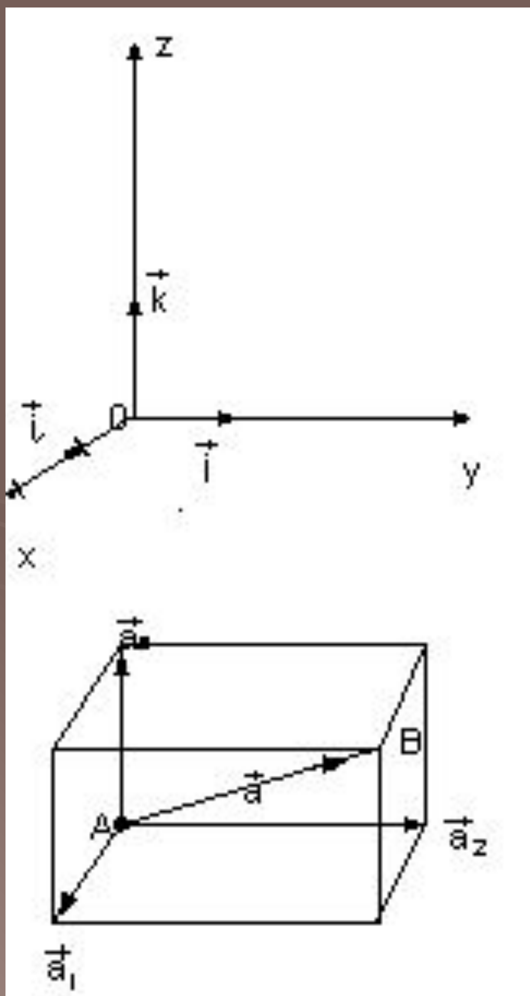
Def: Длина (модуль) вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Def: Расстояние между двумя точками пространства равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

$$\left|\overline{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

9. Введем единичные векторы (орты) i, j, k , направленные по осям координат. Они не равны, так как являются единичными векторами неколлинеарных векторов.



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$\vec{a}_1 = a_x \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a}_2 = a_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}_3 = a_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Это разложение единственно!

Рассмотренные выше линейные операции над векторами можно теперь записать в следующем виде:

1) $$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_{x\cdot \vec{i}} + \lambda a_{y\cdot \vec{j}} + \lambda a_{z\cdot \vec{k}}$$ П- скаляр

При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

2) $$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$$

При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются).

Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны.

10. Скалярное произведение векторов.

Def: Под скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косину угла между ними, т.е

$$a\cdot b=(a,b)=|a||b|\cdot\cos(a,b)$$

Этой формуле можно придать другой вид.Так как

$$|a|\cos\varphi=пр_b\, a\,,\qquad |b|\cos\varphi=пр_a\, b$$

то получаем:

$$ab=|a|\,пр_a\, b=|b|\,пр_b\, a$$

Свойства:

1) $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

2) $$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}\cdot\vec{b}\vec{c}$$

3) $$\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^{2}$$

$$\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\left|\vec{a}\right|$$

4) Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения, т.е

$$\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

5) Скалярное произведение линейной комбинации векторов на произвольный вектор равно такой же линейной комбинации данных векторов на этот вектор, т.е

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},c\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{b},\vec{c}\right)$$

6) $$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Скалярное произведение в координатной форме.

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

Перемножим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как многочлен и учитывая, что

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$$

$$\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$$

будем иметь $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Проекция вектора на заданное направление

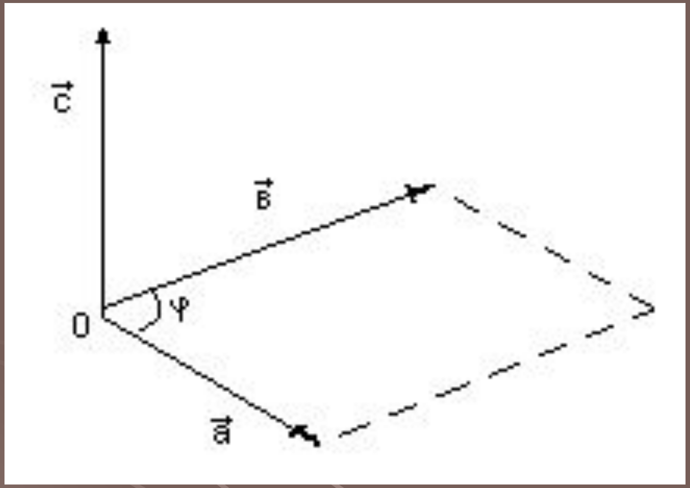
Нахождение проекции вектора $\vec{a}$ на направление, заданное вектором $\vec{b}$,может осуществляться по формуле

$$np_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} \left(np_a b = \frac{a \cdot b}{|a|} \right), m.e. np_b a = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_x^2}}$$

Векторное произведение векторов

Def: Под векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [a, b]$, для которого:

1) Модуль равен площади параллелограмма, построенного на двух векторах, т.е $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\phi$, где $\phi = (\vec{a}, \vec{b}), (0 \le \phi \le \pi)$



2) Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (перпендикулярен плоскости параллелограмма), т.е $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

Свойства векторного произведения

1) При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль, т.е $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

2) Векторный квадрат равен нуль вектору, т.е $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

3) Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е если п- скаляр, то

$$(\lambda\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$$

4) Для трех векторов $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ справедливо равенство

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Векторное произведение в координатной форме

Пусть

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Перемножая векторно эти равенства и используя сумму девяти слагаемых

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[a_x b_x \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \right] +$$

$$+ \left[a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) \right] +$$

$$+ \left[a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \right] = \ldots$$

Для ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0},\ \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0},\ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}$$

Поэтому получаем:

$$\ldots = -a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_z b_y \vec{i} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} =$$

$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ
Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

- Рассмотрим произведение векторов , и , составленное следующим образом: . $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$ Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.
- Выясним геометрический смысл выражения

и вектор

- Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ и вектор $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$

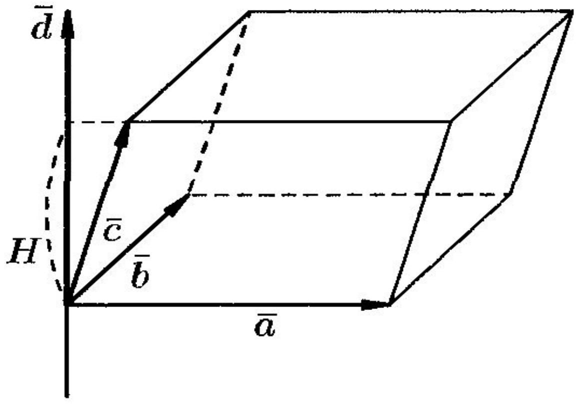


Рис. 22

Имеем:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{d}\cdot\overline{c}=\left|\overline{d}\right|\cdot ПР_{\overline{d}}\,\overline{c},\ \left|\overline{d}\right|=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=S$$

где - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $ПР_{\overline{d}}\,\overline{c}=H$ для правой тройки векторов и для левой, где - высота параллелепипеда. $ПР_{\overline{d}}\,\overline{c}=-H$

Получаем:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=S\cdot\left(\pm H\right)$$

т.е.

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\pm V$$

где - объем параллелепипеда, образованного векторами $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой

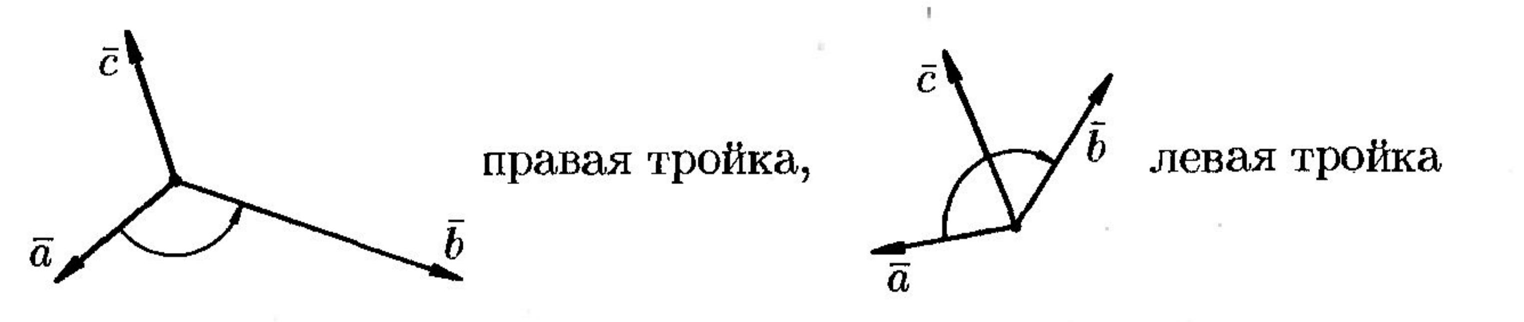


Рис. 16

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е.

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}=\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{b}$$

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т.е.

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$$

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т.е.

$$\overline{abc}=-\overline{acb},\ \overline{abc}=-\overline{bac},\ \overline{abc}=-\overline{cba}$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$ - компланарны

Выражение смешанного произведения через координаты

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ вычисляется как,

$$V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$$

Пример. Вершинами пирамиды служат точки

$A(1;2;3),\ B(0;-1;1),\ C(2;5;2),\quad D(3;0;-2)$

Найти объем пирамиды

Решение: Находим векторы $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$

$$\overline{a}=\overline{AB}=(-1;-3;-2),\ \overline{b}=\overline{AC}=(1;\ 3;\ -1)$$

$$\overline{c}=\overline{AD}=(2;-2,\ -5)$$

Находим $\overline{abc}$

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}-1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & -5\end{vmatrix}=-1\cdot(-17)+3\cdot(-3)-2\cdot(-8)=17-9+16=24$$

Следовательно, $V=\frac{1}{6}\cdot 24=4$