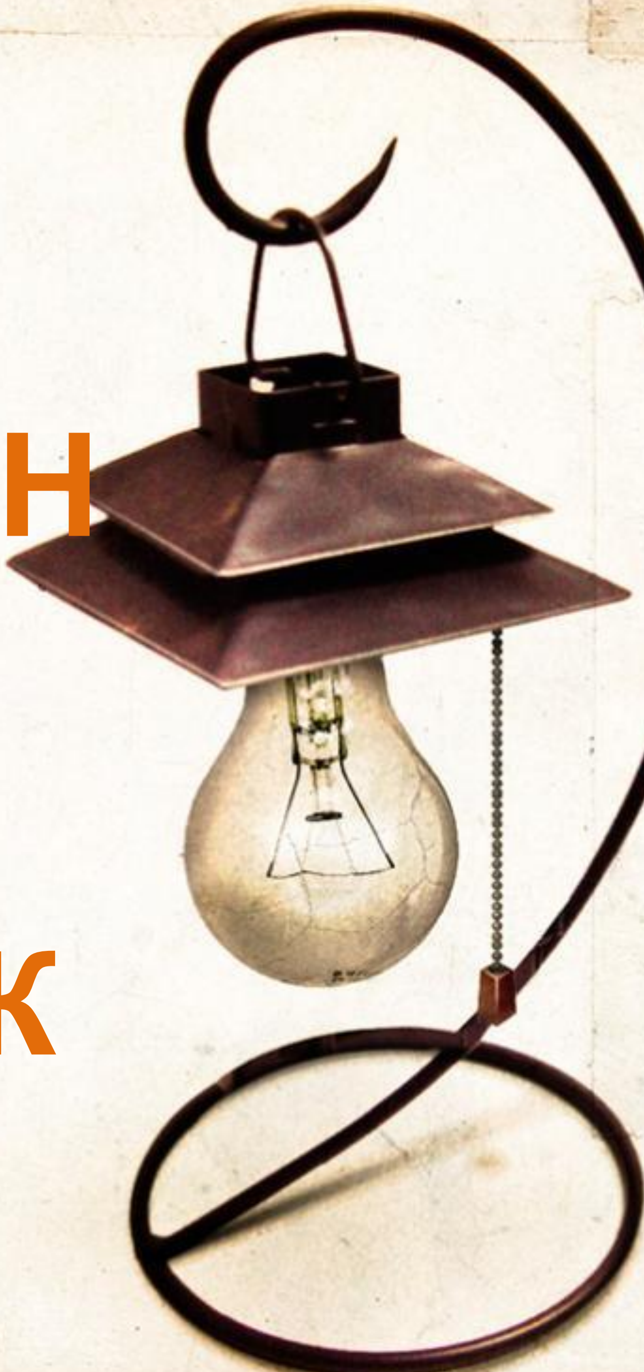
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА



СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Теорема.

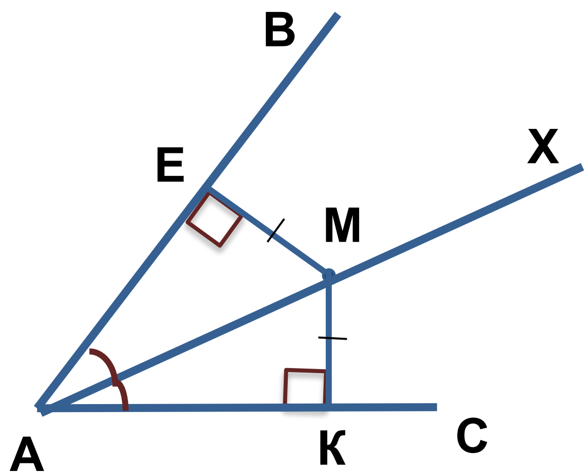
Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

Обратная теорема.

Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

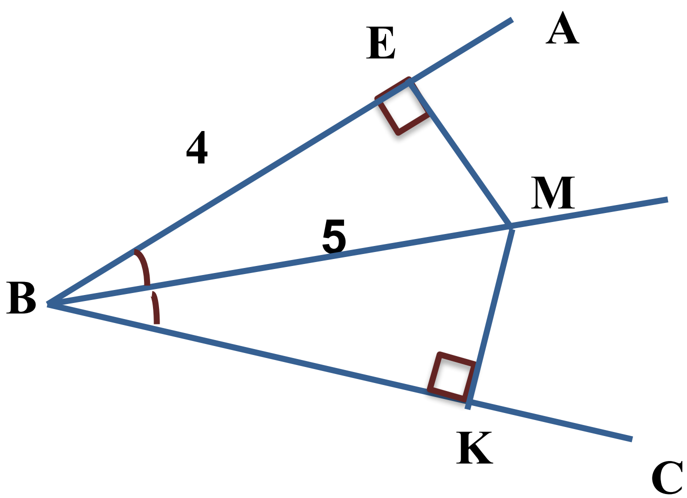
Обобщенная теорема.

Биссектриса неразвёрнутого угла – множество точек плоскости, равноудалённых от сторон этого угла.

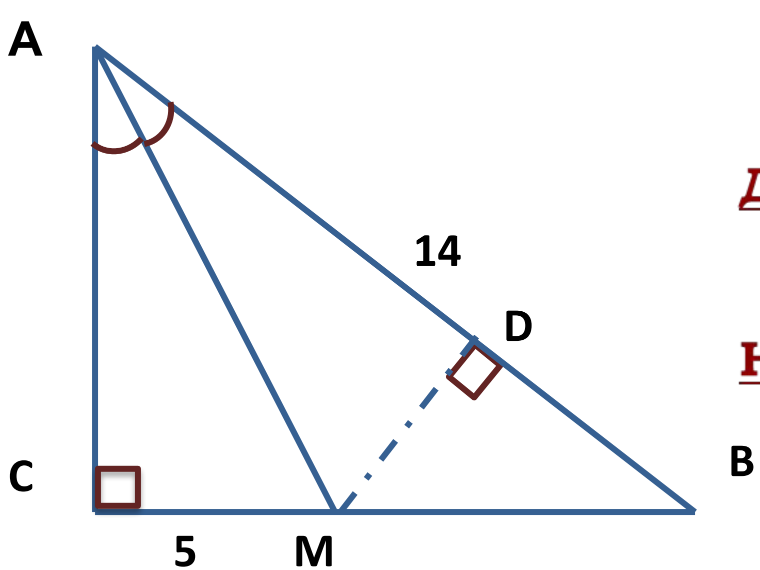


- **Дано:** AX – биссектриса $\angle$ BAC, M $\in$ AX, ME $\perp$ AB, MK $\perp$ AC.
  Доказать: ME = MK. ME $\perp$ AB, MK $\perp$ AC
- **Дано:** ME = MK, ME $\perp$ AB, MK $\perp$ AC.
  Доказать: M $\in$ AX, AX – биссектриса $\angle$ BAC.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ БИССЕКТРИСЫ УГЛА



Дано: $\angle ABC$; BM – биссектриса; $BE = 4$ см, $BM = 5$ см.
Найти: MK.



Дано: $\Delta\ ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90°$; $CM = 5$; $AB = 14$, AM - биссектриса.
Найти: $S_{\Delta\ AMB}$.

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ

Теорема.

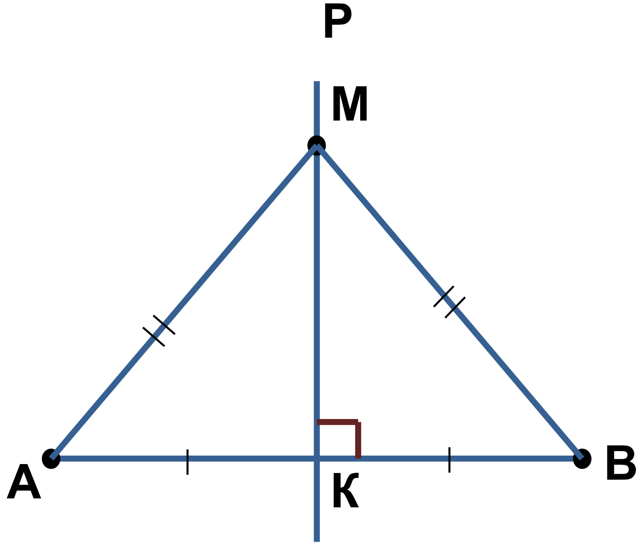
Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Обратная теорема.

Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Обобщенная теорема.

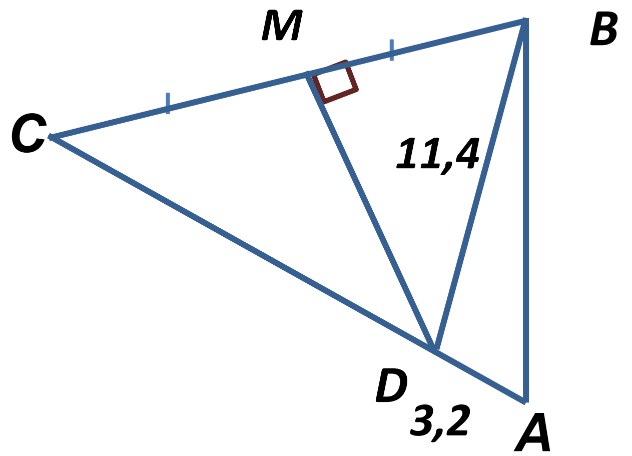
Серединный перпендикуляр к отрезку – множество точек плоскости, равноудалённых от его концов.



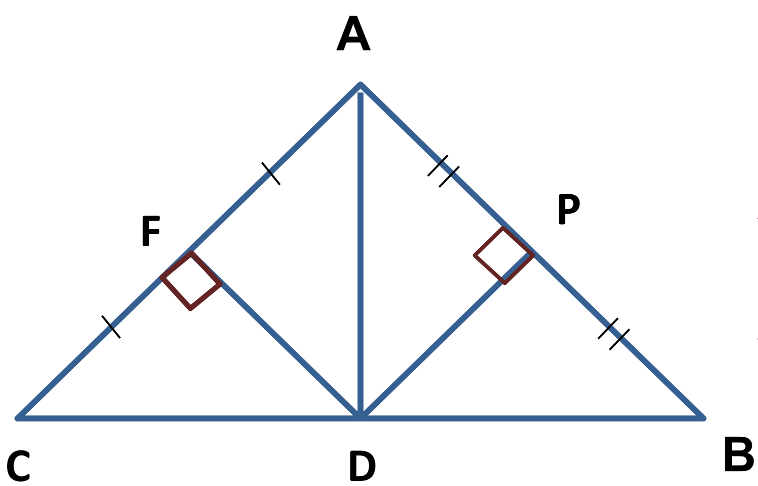
- **Дано:** AB – отрезок, PK – серединный перпендикуляр, M є PK
  Доказать: MA = MB
- **Дано:** AB – отрезок, MA = MB.
  Доказать: M ∈ PK, PK – серединный перпендикуляр к отрезку AB.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА

№679 (б)



Дано: ΔABC, DM - серединный перпендикуляр, BD=11,4, AD=3,2.
Найти: AC.



№ 680 (а)

Дано: ΔABC, FD ⊥ AC, PD ⊥ AB;
CF = FA, AP = PB.
Доказать: D - середина BC.

№ 679 (б)

Решение:

1) AC = AD + DC;
2) Δ CDB: DM - серединный перпендикуляр ⇒
3) DC = BD = 11,4см
4) AC = AD + DC = 11,4 + 3,2 = 14,6см.

Ответ: AC = 14,6см.

№ 680 (а)

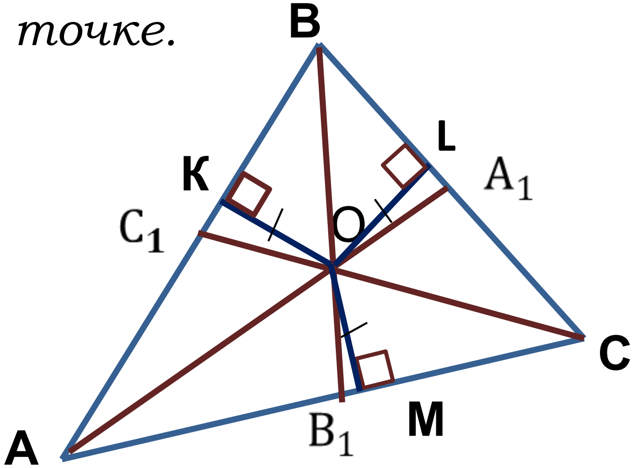
Доказательство:

1) PD ⊥ AB, AP = PB ⇒ BD =AD по свойству серединного перпендикуляра
2) FD ⊥ AC, CF = FA ⇒ CD = DA по свойству серединного перпендикуляра
3) AD = BD, CD = DA ⇒BD = CD, значит B-середина BC.

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИССЕКТРИС ТРЕУГОЛЬНИКА (инцентр)

Теорема

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



Дано: Δ ABC; AA_1, BB_1 - биссектрисы. $AA_1 \cap BB_1 = O$.

Доказать: CC_1 - биссектриса, $O \in CC_1$

Точка O равноудалена от всех сторон Δ ABC и является центром окружности, вписанной в треугольник.

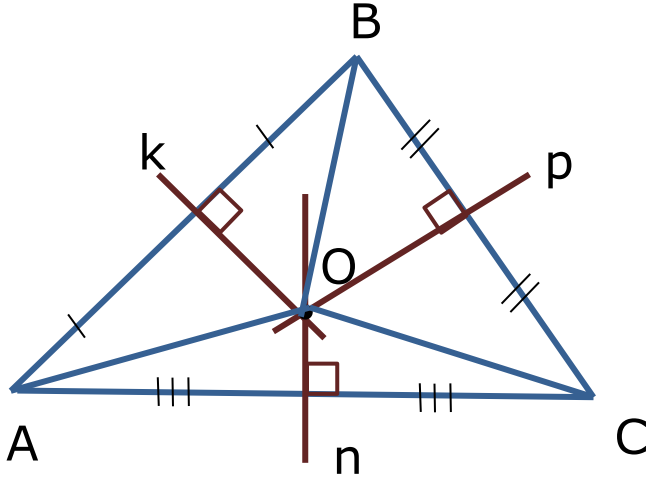
$OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp AC$, $OK = OL = OM$ – радиусы вписанной окружности.

Точка пересечения биссектрис всегда лежит внутри треугольника.

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЕРЕДИННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ К СТОРОНАМ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

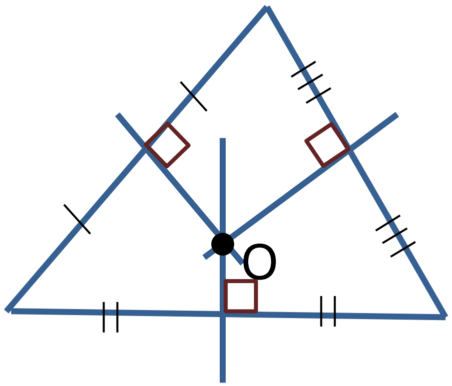


Дано: Δ ABC; k, n – серединные перпендикуляры к сторонам треугольника,
O – точка их пересечения

Доказать: p – серединный перпендикуляр к BC, O є p

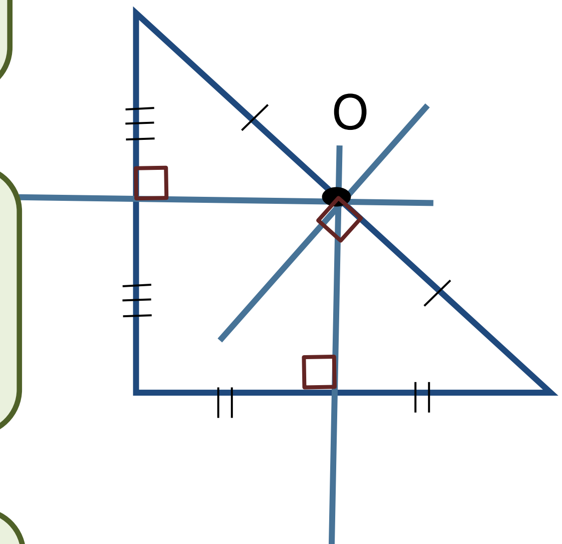
Точка O равноудалена от всех вершин Δ ABC и является центром описанной около Δ ABC окружности. OA = OB = OC – радиусы окружности.

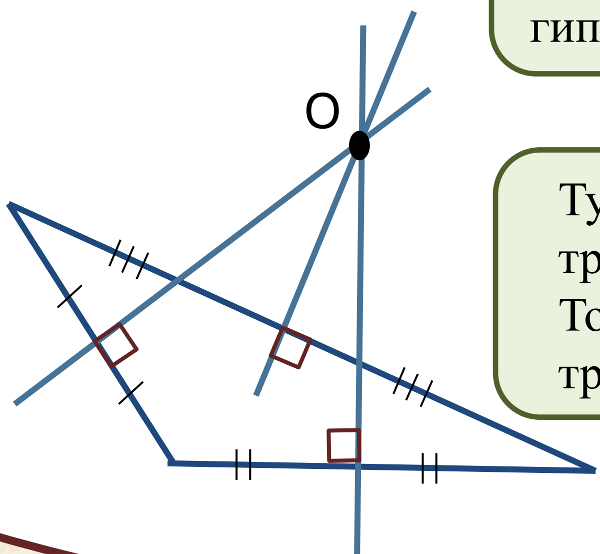
Точка О не всегда расположена внутри треугольника.



Остроугольный треугольник.
Точка О – внутри треугольника.

Прямоугольный треугольник.
Точка О – середина гипотенузы.



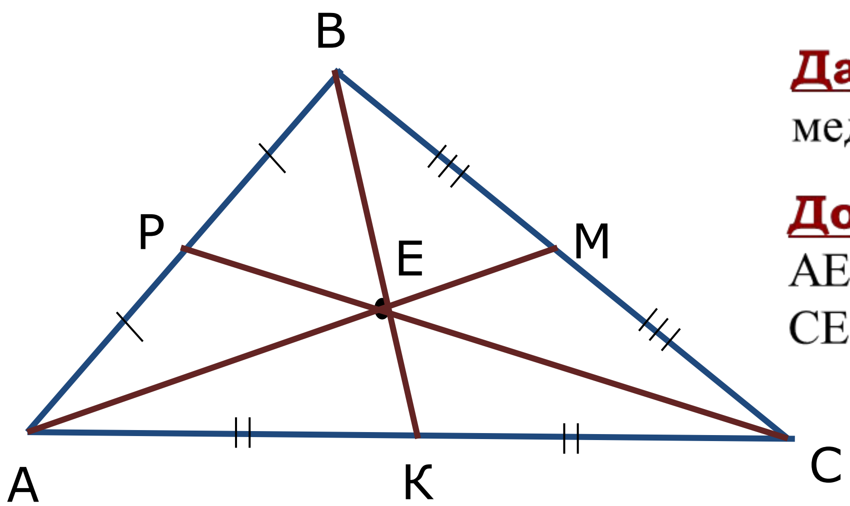


Тупоугольный треугольник.
Точка О – вне треугольника.

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА (центр тяжести)

Теорема

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано: Δ ABC, AM,BK,CP - медианы

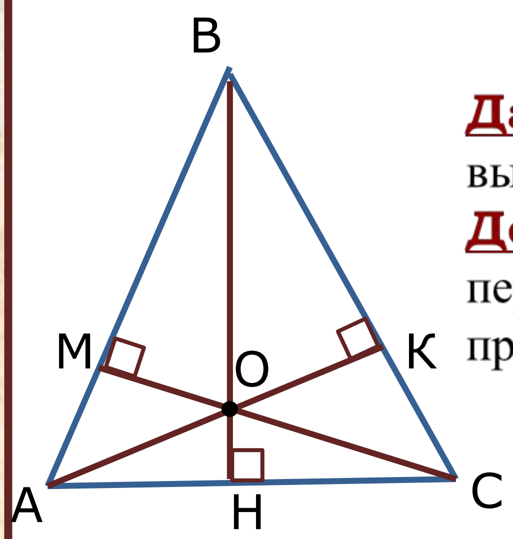
Доказать: AM ∩ BK ∩ CP = E
AE:EM = 2:1, BE:EK = 2:1,
CE:EP = 2:1

Точка Е всегда располагается внутри треугольника.

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА (ортоцентр)

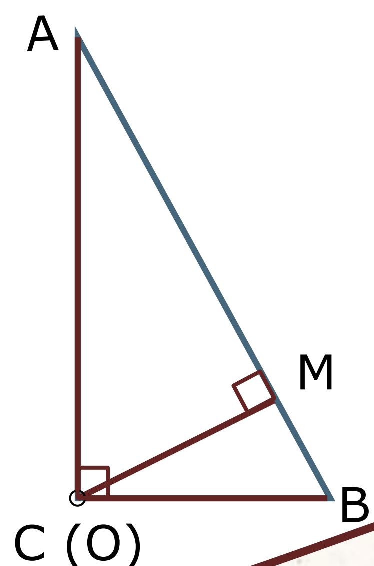
Теорема

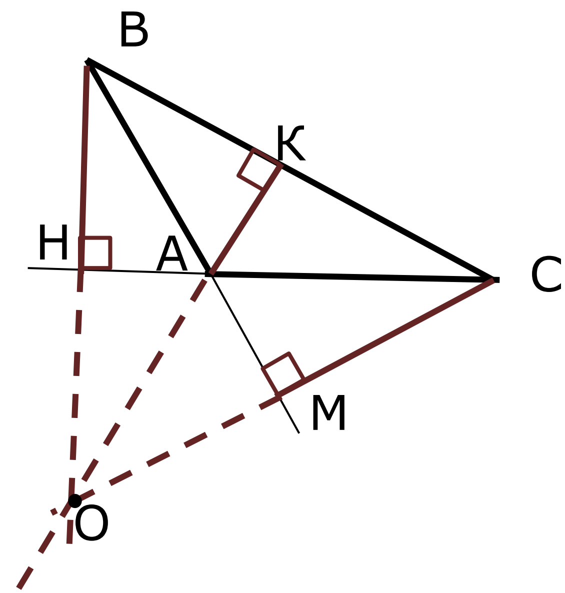
Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.



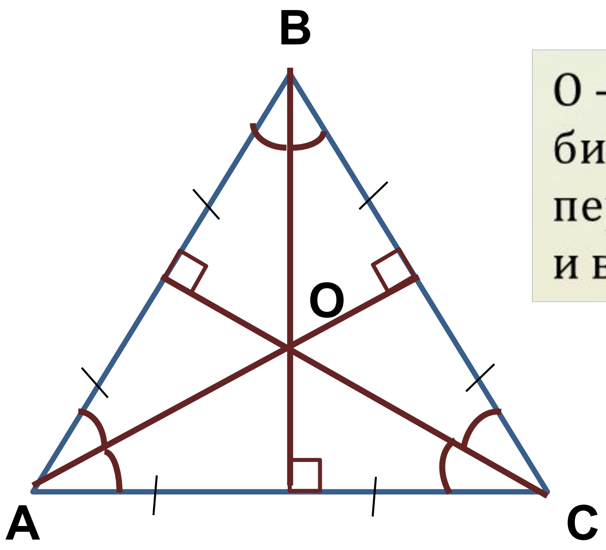
Дано: Δ ABC, AK, BH, CM – высоты

Доказать: O – точка пересечения высот или их продолжений.





В равностороннем треугольнике все четыре замечательных точки совпадают.



О – точка пересечения биссектрис, серединных перпендикуляров, медиан и высот Δ АВС.

ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

Во всяком треугольнике центр тяжести, ортоцентр, центр описанной окружности лежат на одной прямой, причем точка пересечения медиан (центр тяжести) делит эту прямую в отношении 1:2.

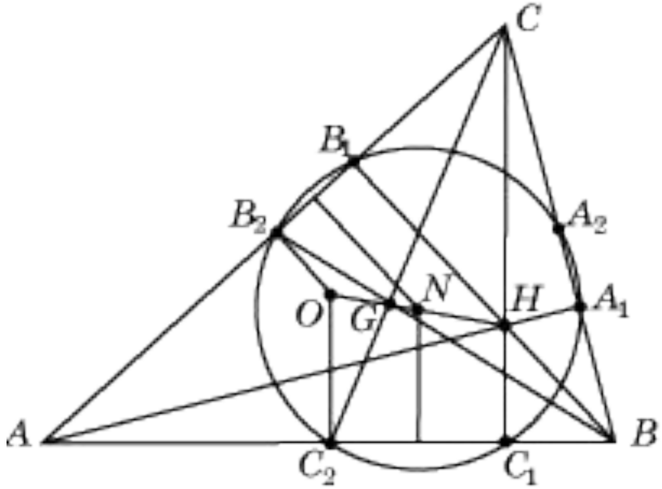


Рис. 9

G – центр тяжести,
H – ортоцентр,
O – центр описанной окружности

OG:GH = 1:2

ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК (окружность Эйлера)

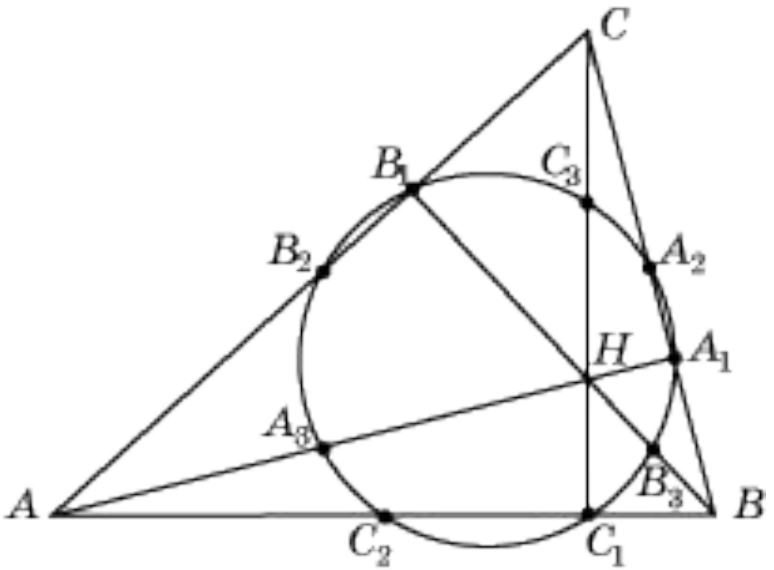


Рис. 8

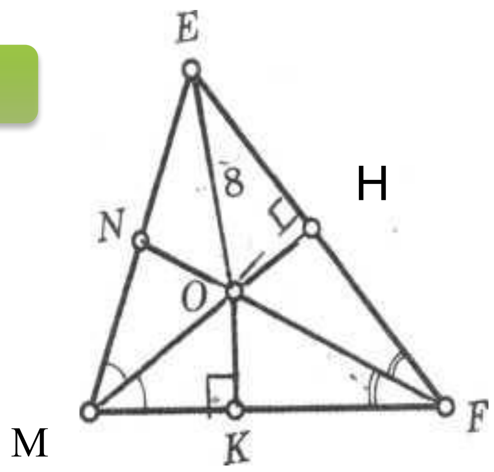
Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков от вершин до ортоцентра лежат на окружности.

Ее радиус равен половине радиуса описанной окружности.

Решение задач по готовым чертежам

- ***О – точка пересечения биссектрис треугольника.***

№ 1



$\angle MEF = 60°, EO = 8$
OK = ?

Решение

O – точка пересечения биссектрис MO и FO. Значит, она равноудалена от сторон Δ MEF и является центром вписанной окружности, OK – радиус вписанной окружности. EO – также биссектриса, так как в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.

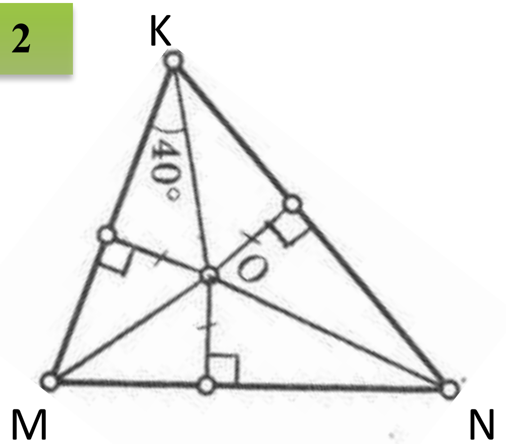
$\angle FEO = 30°$.
Проведем OH ⊥EF.
OH = OK, так как O – центр вписанной окружности,
OH и OK – радиусы этой окружности.
Рассмотрим Δ EOH, прямоугольный,
$\angle EHO = 90°, \angle OEH = 30°$.
По свойству катета, лежащего против угла в 30°,
$OH = \frac{1}{2}EO;\ OH = 4$.
Значит, и OK = 4.

Ответ: OK = 4.

Решение задач по готовым чертежам

 О – точка пересечения биссектрис треугольника.

№ 2



$\angle MON = ?$

Решение

О – радиус вписанной окружности, так как О равноудалена от сторон треугольника. Значит, О – точка пересечения биссектрис Δ KMN.

$\angle MKO = 40°$, значит $\angle MKN = 80°$.

$\angle KMN + \angle KNM = 100°$.

$\angle OMN = \frac{1}{2}\angle KMN, \angle ONM = \frac{1}{2}\angle KNM,$

значит $\angle OMN + \angle ONM = 50°$.

Рассмотрим Δ MON.

$\angle MON = 180° - (\angle OMN + \angle ONM)$

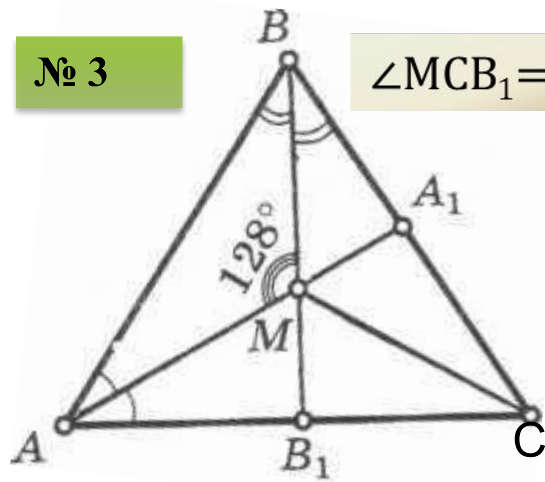
$\angle MON = 180° - 50° = 130°$.

Ответ: 130°.

Решение задач по готовым чертежам

- ***M (O) – точка пересечения биссектрис треугольника.***

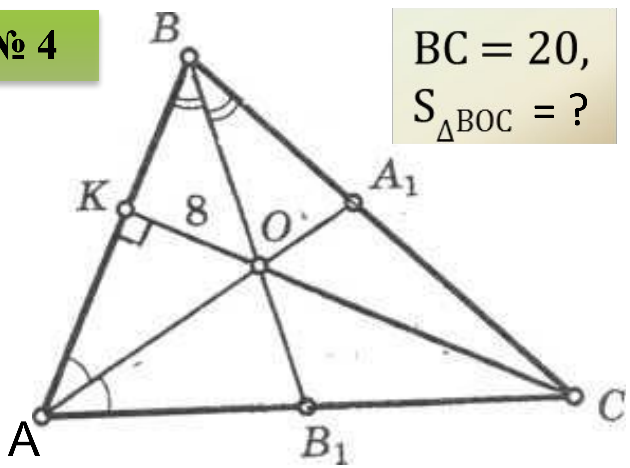
№ 3



$\angle MCB_1 = ?$

Ответ: 38°.

№ 4



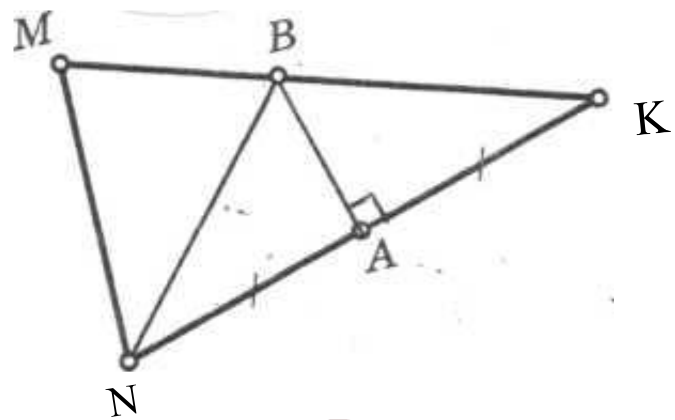
$BC = 20$,
$S_{\Delta BOC} = ?$

Ответ: 80.

Решение задач по готовым чертежам

- ***О – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.***

№ 1



$MK = NK = 20.$
$P_{\Delta MBN} = 35.$

$MN = ?$

Решение

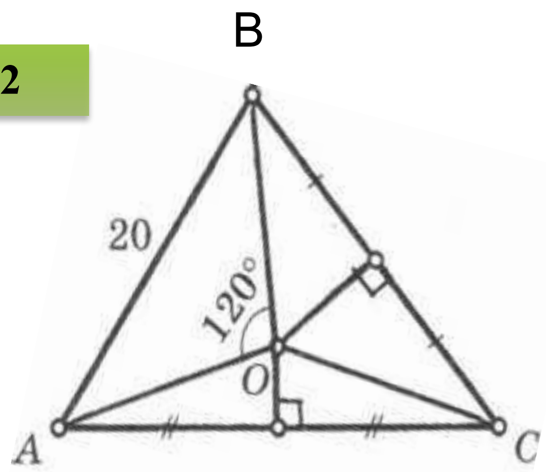
AB – серединный перпендикуляр к NK. Значит, по свойству серединного перпендикуляра к отрезку $BK = BN$.
$P_{\Delta MBN} = MN + MB + NB = 35.$
$MB + NB = MB + BK = 20.$
$MN = P_{\Delta MBN} - (MB + NB)$
$MN = 35 - 20 = 15.$

Ответ: 15.

Решение задач по готовым чертежам

- **_О – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника._**

№ 2



$AB = 20, \angle AOB = 120°.$
$OC = ?$

Решение

О – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам АС и ВС, равноудалена от вершин треугольника и является центром описанной около него окружности.

По следствию из теоремы синусов в Δ AOB:

$\frac{AB}{sin120°} = 2R$; $2R = \frac{20 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}}$; $R = \frac{20}{\sqrt{3}}$,

где R – радиус описанной окружности.

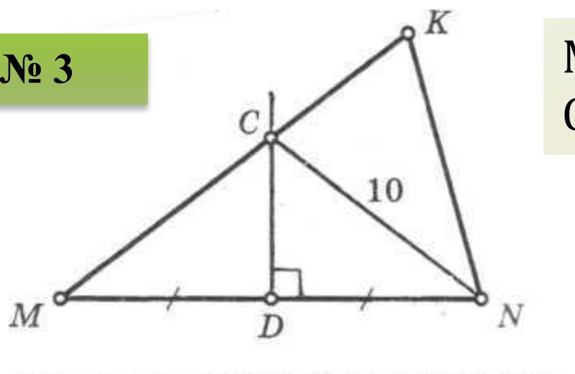
Значит, $OC = R = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{20}{\sqrt{3}}$

Решение задач по готовым чертежам

- ***<u>О – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.</u>***

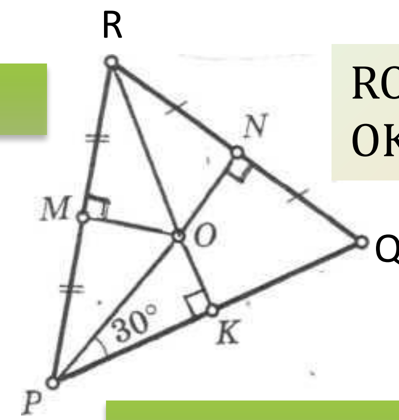
№ 3



MK = 17
CK - ?

Ответ: CK = 7.

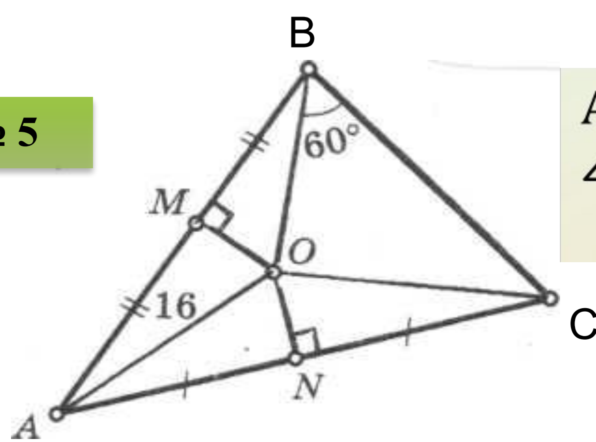
№ 4



RO = 20
OK - ?

Ответ: OK = 10.

№ 5



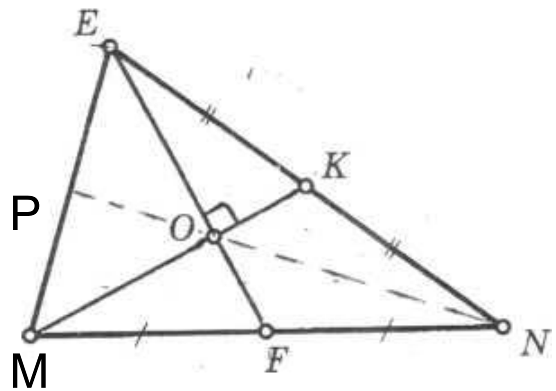
AO = 16
$\angle OBC = 60°$.
$S_{\Delta OBC}$ = ?

Ответ: $S_{\Delta OBC} = 64\sqrt{3}$.

Решение задач по готовым чертежам

- ***О – точка пересечения медиан треугольника.***

№ 1



EF = 18, MK = 15.
NO = ?

Решение:
О - точка пересечения медиан Δ MEN.
По свойству медиан EO : OF = 2:1, значит
EO = 12, OF = 6.

MO : OK = 2:1, значит MO = 10, OK = 5.
Δ MOE – прямоугольный, ∠ EOM = 90°.
По теореме Пифагора

$EM = \sqrt{EO^2 + OM^2}$;

$EM = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}.$

NP медиана Δ MEN и Δ MOE.
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Значит, $PO = \frac{1}{2}ME$, $PO = \sqrt{61}$.

По свойству медиан NO : OP = 2:1.

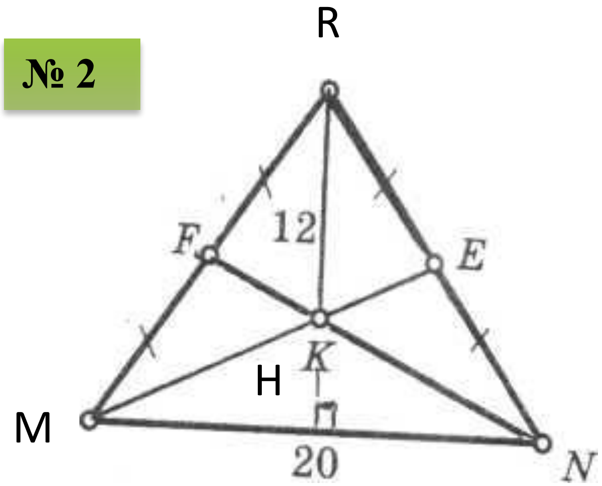
Значит, NO = 2OP, $NO = 2\sqrt{61}$.

Ответ: $NO = 2\sqrt{61}$.

Решение задач по готовым чертежам

- ***К – точка пересечения медиан треугольника.***

№ 2



$RK = 12$, $MN = 20$.
$S_{\Delta MRN} = ?$

Решение

К – точка пересечения медиан треугольника. Значит, RH – медиана, проведенная к основанию равнобедренного Δ MRN (MR = NR).

Следовательно, RH также является высотой и медианой.
По свойству медиан RK : KH = 2:1.
Значит, $RH = (12:2) \cdot 3 = 18$.
$RH \perp MN$.
$S_{\Delta MRN} = \frac{1}{2} MN \cdot RH$.

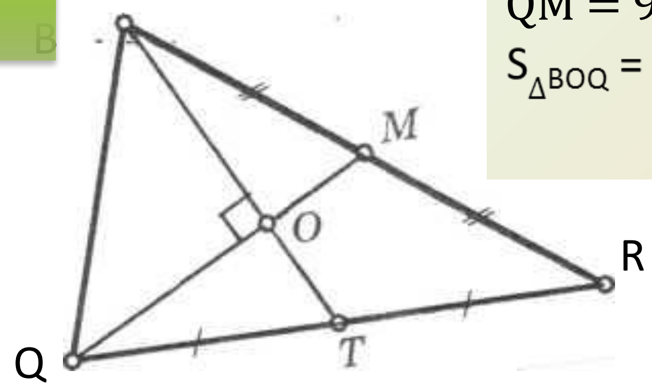
$S_{\Delta MRN} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 = 180$.

Ответ: $S_{\Delta MRN} = 180$.

Решение задач по готовым чертежам

- ***О – точка пересечения медиан треугольника.***

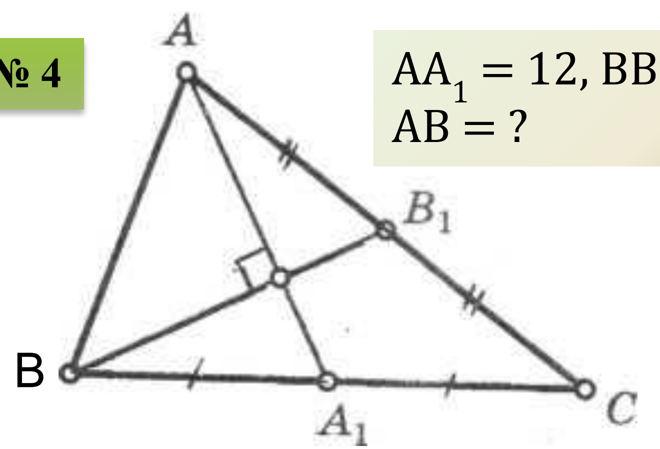
№ 3



$QM = 9$, $BT = 12$.
$S_{\Delta BOQ} = ?$

Ответ: $S_{\Delta BOQ} = 24$.

№ 4



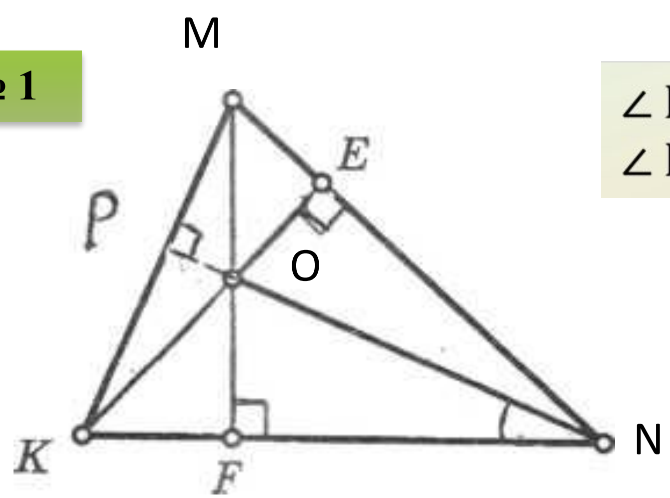
$AA_1 = 12$, $BB_1 = 9$.
$AB = ?$

Ответ: AB = 10.

Решение задач по готовым чертежам

- ***О – точка пересечения высот треугольника.***

№ 1



$\angle$ MKN = 66°.
$\angle$ FNO = ?

Решение

$\angle$ KMF = 24° из прямоугольного Δ MKF
O - точка пересечения высот KE и MF.
Продолжим NO за точку O до пересечения со стороной MK в точке P.

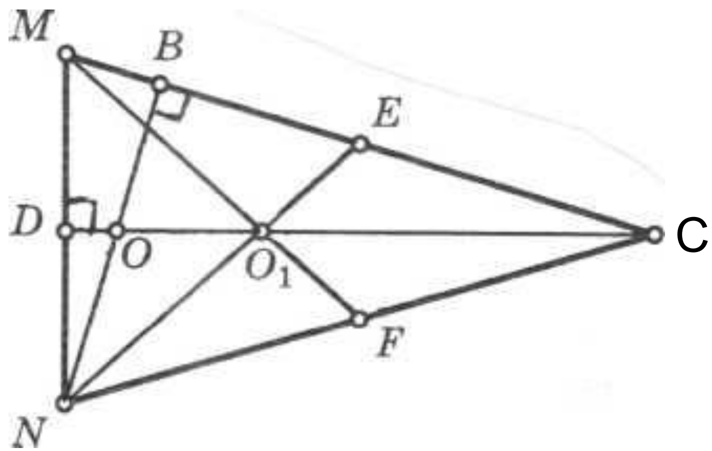
Отрезок NP – также высота Δ MKF.
Δ PMO~Δ FNO по двум углам:
$\angle$ MPO = $\angle$ NFO = 90°
и $\angle$ POM = $\angle$ FON как вертикальные.
Значит, $\angle$ FNO = $\angle$ PMO = 24°.

Ответ: $\angle$ FNO = 24°.

Решение задач по готовым чертежам

O – точка пересечения высот треугольника.

№ 2



O - точка пересечения высот.
O_1 - точка пересечения медиан.
MC = NC = 26.
MN = 20.
OO_1 = ?

Решение:

Три медианы пересекаются в одной точке O_1. CD – медиана.
MD = DN = 10.
Δ MDC – прямоугольный, так как CD – медиана, проведенная к основанию MN равнобедренного Δ MCN.

$DC = \sqrt{MC^2 - MD^2}$; $DC = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.

По свойству медиан $CO_1 : O_1D = 2:1$.

Значит, $CO_1 = 16$; $O_1D = 8$.

Рассмотрим Δ DMO_1.

$MO_1 = \sqrt{DM^2 + DO_1{}^2}$;

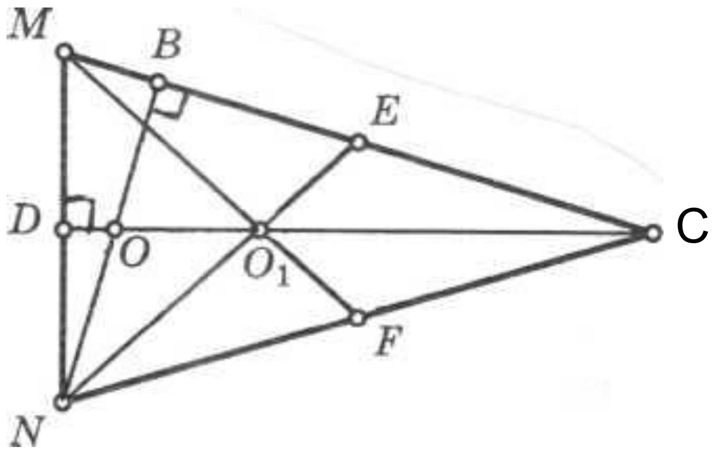
$MO_1 = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$.

$NO_1 = MO_1 = 2\sqrt{41}$.

Решение задач по готовым чертежам

- ***О – точка пересечения высот треугольника.***

№ 2



Δ MNB ~ Δ MCD, так как они прямоугольные и $\angle$M – общий.

$$\frac{MN}{NC} = \frac{MB}{MD};\ \frac{20}{26} = \frac{MB}{10};\ MB = \frac{100}{13}.$$

Δ NBC – прямоугольный.

$$BC = MC - MB;\ BC = 26 - \frac{100}{13} = \frac{238}{13}$$

$$NB = \sqrt{NC^2 - BC^2};\ NB = \sqrt{26^2 - \left(\frac{238}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{100\cdot576}{13^2}} = \frac{240}{13}$$

Δ NBM ~ Δ NDO, так как они прямоугольные и угол N – общий.

$$\frac{NB}{ND} = \frac{MB}{DO};\ \frac{240}{13\cdot10} = \frac{100}{13\cdot DO};\ DO = \frac{1000\cdot13}{13\cdot240} = \frac{25}{6}.$$

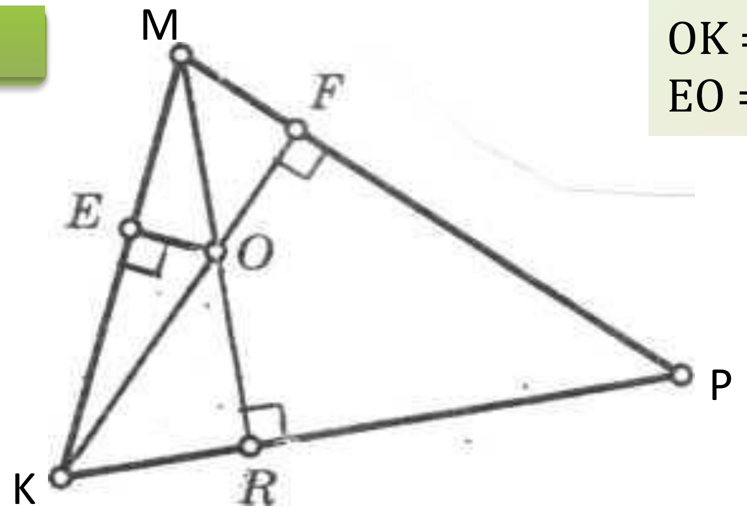
$$OO_1 = DO_1 - DO;$$

$$OO_1 = 8 - \frac{25}{6} = \frac{23}{6}.$$

Ответ: $\frac{23}{6}$.

Решение задач по готовым чертежам

№ 3



OK = 8, OF = 6, FP = 8.
EO = ?

Ответ: EO = 4,8.

Подготовка к ГИА 2013 по геометрии

Задания части 1, модуль «Геометрия». Задания на множественный выбор (№ 14).

При выполнении задания выберите те ответы, которые считаете правильными, и обведите их номера. Обведенные цифры запишите без знаков препинания, например: 123.

Треугольники.

1 **Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.**

1) Медиана всегда делит пополам один из углов треугольника.
2)Медиана проходит через середину стороны треугольника.
3) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.
4) Точка пересечения медиан произвольного треугольника - центр окружности, описанной около этого треугольника.
5) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2 к 1, считая от вершины.

Подготовка к ГИА 2013 по геометрии

Задания части 1, модуль «Геометрия». Задания на множественный выбор.

2 Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Высота всегда образует с прямой, содержащей одну из сторон треугольника, равные углы.
2) В прямоугольном треугольнике высота может совпадать с одной из его сторон.
3) Точка пересечения высот произвольного треугольника - центр окружности, описанной около этого треугольника.
4) Высота всегда делит треугольник на два треугольника равной площади.
5) Высота может лежать и вне треугольника.

3 Укажите, какие из перечисленных утверждений верны.

1) Биссектриса всегда проходит через середину стороны треугольника.
2) Биссектриса всегда делит пополам один из углов треугольника.
3) Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
4) Точка пересечения биссектрис произвольного треугольника - центр окружности, вписанной в этот треугольник.
5) Точка пересечения биссектрис произвольного треугольника - центр окружности, описанной около этого треугольника.

Подготовка к ГИА 2013 по геометрии

Задания части 1, модуль «Геометрия».
Задания на множественный выбор.

4 **Укажите, какие из перечисленных утверждений верны.**

1) Биссектриса всегда делит пополам один из углов треугольника.
2) Биссектрисы произвольного треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 к 1, считая от вершины.
3) Точка пересечения биссектрис всегда лежит внутри треугольника.
4) Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
5) Биссектриса всегда делит треугольник на два треугольника равной площади.

ОТВЕТЫ:

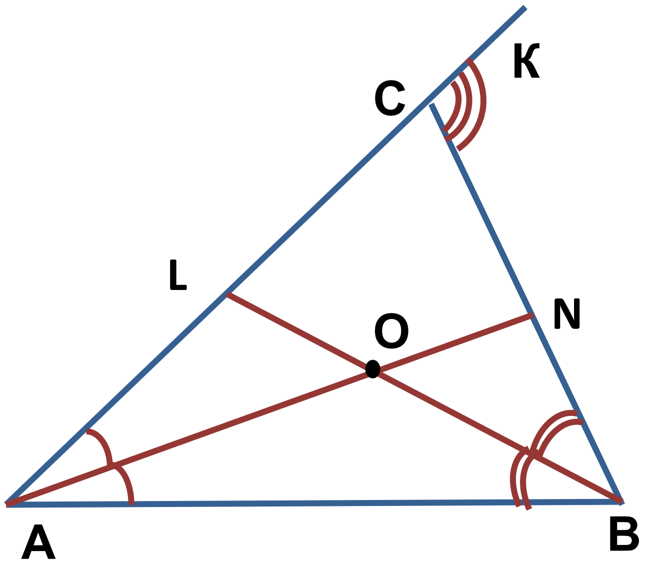
Номер задания	1	2	3	4
Номер верного ответа	235	125	234	134

Подготовка к ГИА 2013 по геометрии

Задания части 1, модуль «Геометрия» (№ 10).

№1(2.3.8.)

- **Дано:** ME = MK, ME ⊥ AB, MK ⊥ AC.
  Доказать: M ∈ AX, AX – биссектриса ∠ BAC.



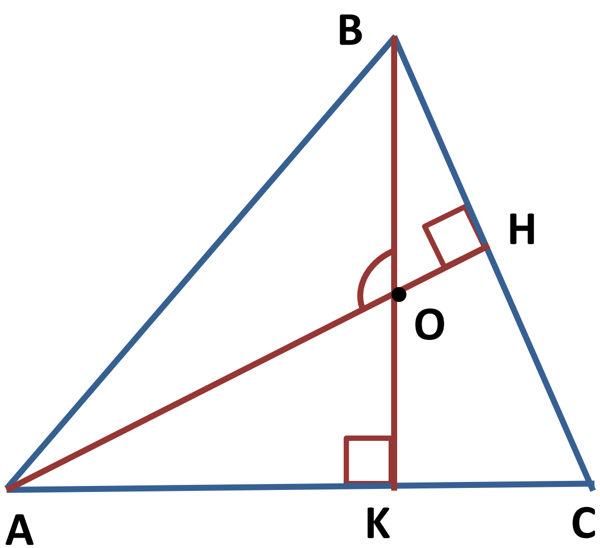
Решение.
В Δ AOB ∠ABO + ∠ BAO = 180° – 98°= 82°.
∠ BAC = 2 ∠ BAO; ∠ ABC = 2 ∠ABO ;
∠ BAC + ∠ ABC = 2(∠ABO + ∠ BAO) = 164°.
По свойству внешнего угла треугольника ∠ BCK = ∠ BAC + ∠ ABC =164°.

Ответ: 164°.

Задания части 1, модуль «Геометрия».

№1(2.3.9.)

Дано: Δ ABC — прямоугольный;
$\angle C = 90°$; CM = 5; AB = 14,
AM - биссектриса.
Найти: $S_{\Delta AMB}$.



Решение.

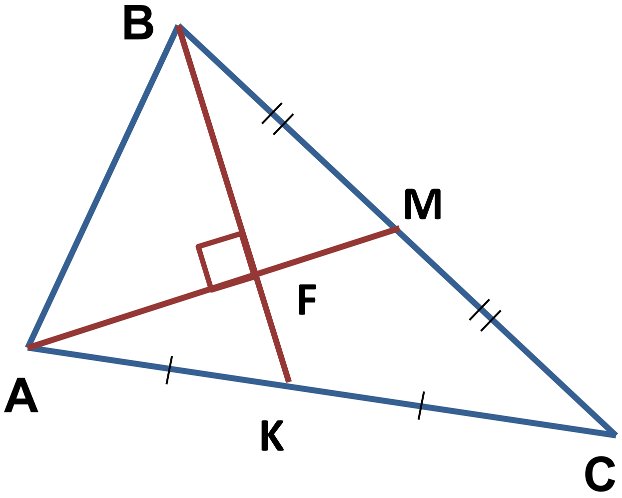
$\angle BOH = 180° - 104° = 76°$.
В треугольнике BOH $\angle BHO = 90°$,
$\angle OBH = 90° - 76° = 14°$.
Треугольник BKC прямоугольный ,
$\angle BKC = 90°$;
$\angle C = 90° - \angle KBC$;
$\angle C = 90° - 14° = 76°$.

Дано: $\angle$ ABC; BM — биссектриса;
BE = 4 см, BM = 5 см.
Найти: MK.

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

№1(4.2.3.)

В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BK. Найдите площадь треугольника ABC, если AM = 10, BK = 6.



Решение.

F – точка пересечения медиан AM и BK треугольника ABC .

По свойству медиан BF : FK = 2: 1 ; AF: FM = 2: 1.

Значит, BF = 4, FK = 2. AF = (10:3) ·2 = $\frac{20}{3}$, FM = $\frac{10}{3}$.

Δ ABK; $S_{\Delta\ ABK} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AF$;

$S_{\Delta\ ABK} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{20}{3}$ = 20.

Дано: Δ ABC; AA_1, BB_1 - биссектрисы. $AA_1 \cap BB_1 = O$.

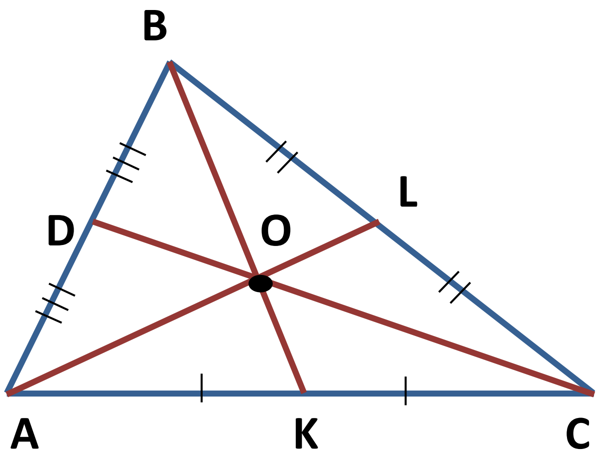
Доказать: CC_1 - биссектриса, $O \in CC_1$

Ответ: 40.

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

№2(4.2.3.7.)

Сторона треугольника равна 20, а медианы, проведенные к другим сторонам, равны 18 и 24. Найдите площадь треугольника.



Решение:

Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Значит, CD – медиана, O ∈DC.

По свойству медианы, BO : OK = 2:1, BO = 16, OK = 8.

AO : OL = 2:1, AO = 12, OL = 6.

Найдем площадь треугольника AOB по формуле Герона.

$p = \frac{AO+OB+AB}{2}$; p = 24.

$S_{\Delta\ AOB} = \sqrt{24 \cdot (24-20) \cdot (24-16) \cdot (24-12)}$

$S_{\Delta\ AOB} = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12} = \sqrt{96^2} = 96.$

В треугольнике AOB OD – медиана, делит его на два равновеликих треугольника.

$S_{\Delta\ AOD} = S_{\Delta\ DOB} = 48.$

Три медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.

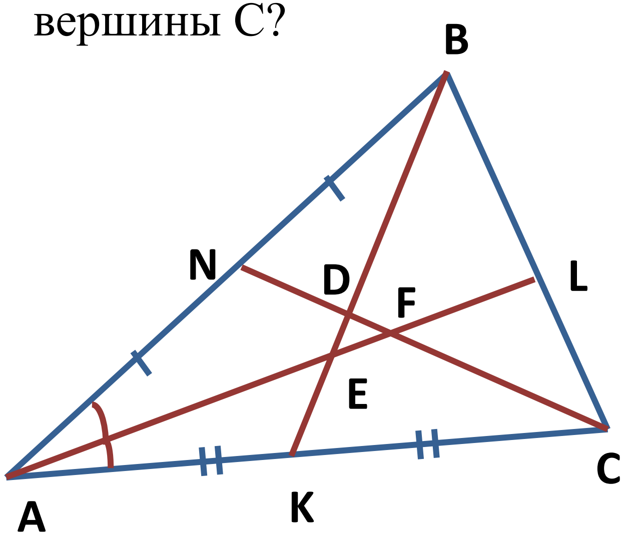
$S_{\Delta\ ABC} = 6 \cdot S_{\Delta\ AOD} = 6 \cdot 48 = 288.$

Ответ: 288.

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

№3(4.2.3.9.)

Биссектриса угла A треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины B в отношении 5:4, считая от вершины B. В каком отношении, считая от вершины C эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины C?



Решение:

По условию задачи

AL – биссектриса, BK и CN – медианы,

D – точка пересечения медиан,

E – точка пересечения биссектрисы AL и медианы BK.

BE : EK = 5:4

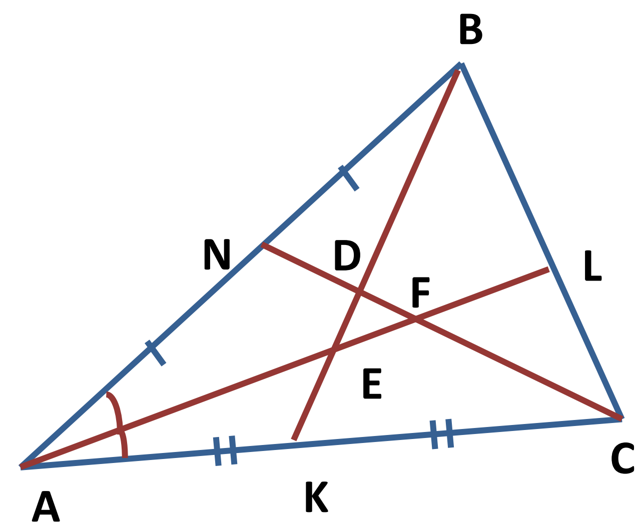
Так как BE : EK = 5:4, то BK = 5x + 4x = 9x.

По свойству медиан точка D делит BK в отношении 2:1, считая от вершины B, то есть BD : DK = 2:1.

Тогда BD = 6x, DK = 3x.

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

Точка O равноудалена от всех вершин Δ ABC и является центром описанной около Δ ABC окружности. OA = OB = OC – радиусы окружности.

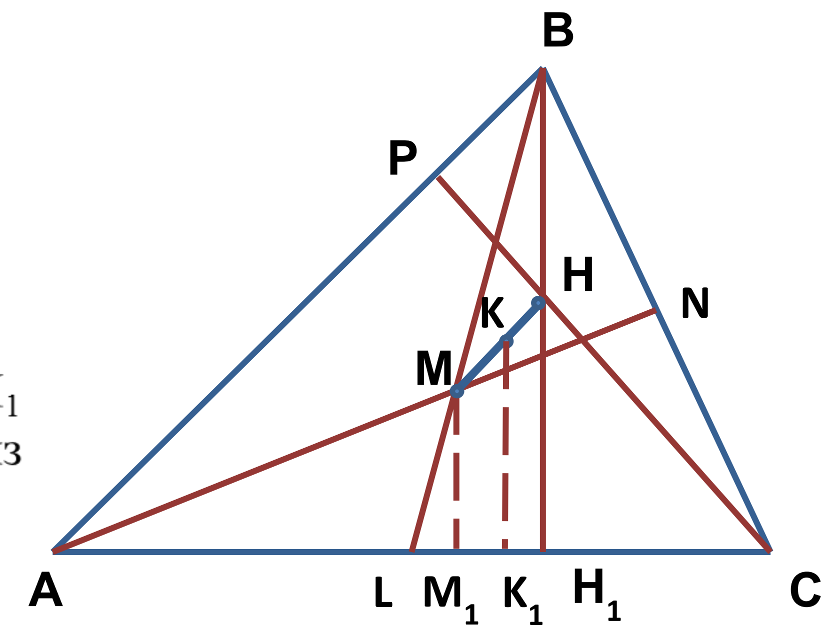


Дано: Δ ABC; k, n – серединные перпендикуляры к сторонам треугольника,
O – точка их пересечения

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

№4(задача № 56)

Дано: Δ ABC, AM,BK,CP - медианы



Решение

По условию, высоты BH_1 и CP треугольника ABC пересекаются в точке H, следовательно, она расположена внутри этого треугольника. BL и AN – медианы треугольника ABC, пересекаются в точке M. Обозначим H_1, K_1, M_1 – основания перпендикуляров, проведенных из точек H, K и M к прямой AC.

Δ APC – прямоугольный, $\angle PAC = 45°$, значит $\angle PCA = 45°$.

Δ HH_1C – прямоугольный, $\angle HCH_1 = 45°$, катеты равны: $CH_1 = HH_1$, $HH_1 = CH \cdot \sin 45° = 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$, $CH_1 = 12$.

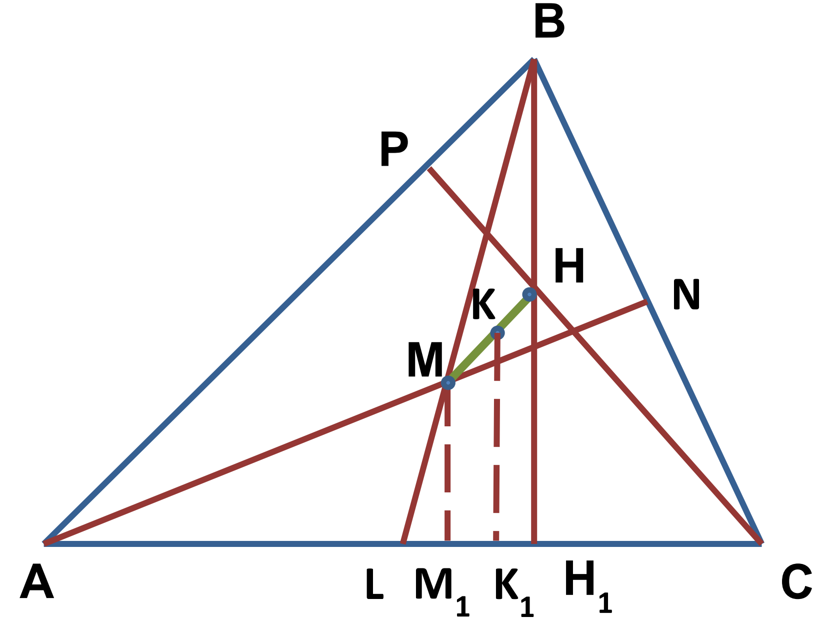
Δ BH_1A – прямоугольный, равнобедренный, катеты равны: $AH_1 = BH_1$, $BH_1 =$
$AB \cdot \sin 45°$.

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

Продолжение решения

$BH_1 = 18$, $AH_1 = 18$.
$\Delta\, BH_1L \sim \Delta\, MM_1L$ по двум углам, и $\frac{BH_1}{MM_1} = \frac{BL}{ML} = \frac{3}{1}$ по свойству медиан треугольника.

Отсюда $MM_1 = \frac{1}{3}BH_1$, $MM_1 = 6$.
По теореме Фалеса отрезок KK_1 - средняя линия трапеции $HH_1\,M_1\,N$. По свойству средней линии $KK_1 = \frac{HH_1+MM_1}{2}$, $KK_1 = 9$.
Так как $AC = AH_1 + H_1C$, $AC = 30$.
Отсюда $S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}AC \cdot KK_1$, $S_{\Delta AKC} = 135$.



Ответ: 135.

Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

№5(задача № 52)

О – точка пересечения биссектрис, серединных перпендикуляров, медиан и высот Δ ABC.

Решение

1) ∠C – тупой. Значит, точка O (пересечение высот BM и AN) лежит вне ΔABC. $KN = \frac{1}{2}AB$, так как ΔANB - прямоугольный, К – середина гипотенузы.

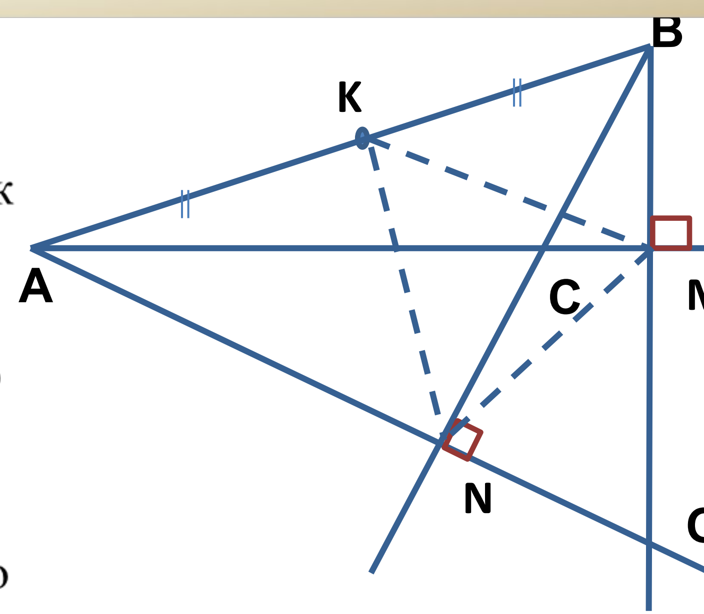
NK – медиана, проведенная из вершины прямого угла.

2) $MK = \frac{1}{2}AB$, так как ΔAMB – прямоугольный.

MK – медиана, проведенная из вершины прямого угла.

3) Из 1) и 2) следует, что NK = MK.

4) ∠CBM = 15° (из ΔBCM), ∠NAC = 15° (из ΔCAN), ∠BAC + ∠ABC = 75° (из ΔABC).



Задания части 2 . Модуль «Геометрия».

Продолжение решения

Пусть $\angle BAC = x°$, $\angle ABC = (75 - x)°$.

5) а) ΔAKN – равнобедренный, $\angle KAN = \angle KNA = (15 + x)°$.

$\angle AKN = 180° - 2 \cdot (15 + x)° = (150 - 2x)°$.

б) ΔBMK – равнобедренный, основание BM.

$\angle KBM = 15° + (75 - x)° = (90 - x)° = \angle BMK$.

$\angle BKM = 180° - 2 \cdot (90 - x)° = 2x°$.

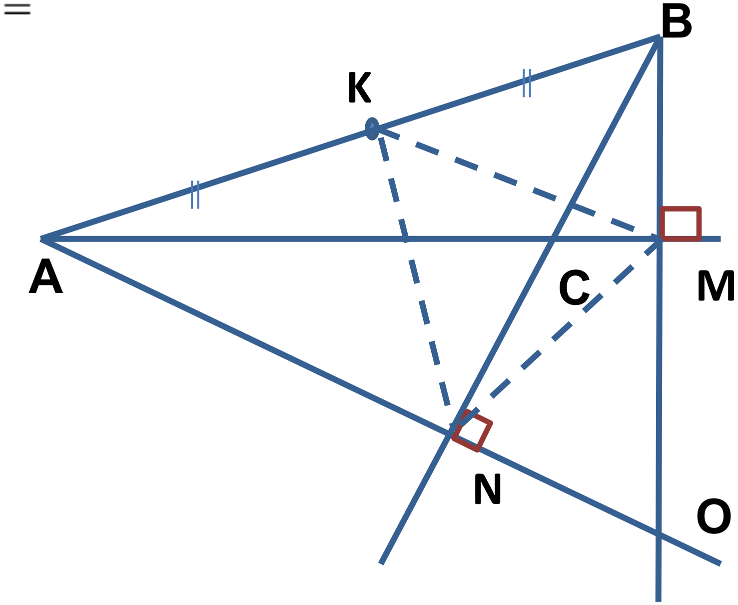
в) $\angle MNK = 180° - (\angle AKN + \angle BKM) = 180° - (150° - 2x° + 2x°) = 30°$.

6) $S\Delta MNK = \frac{1}{2} NK2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{4} \cdot NK2$.

$\frac{1}{4} \cdot NK2 = 16$ (по условию).

$NK2 = 64$, $NK2 = 8$.

$\frac{1}{2} AB = 8$, $AB = 16$.



Ответ: 16.

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

№1 **(Нахождение расстояния от точки пересечения биссектрис до сторон треугольника).**

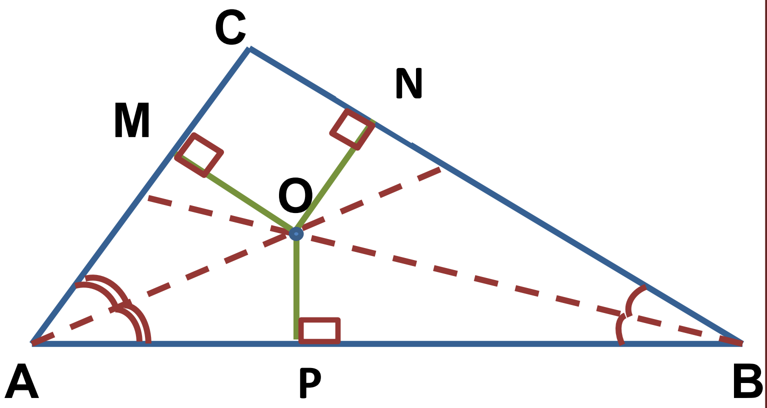
Найти расстояние до сторон треугольника от точки пересечения его биссектрис, если периметр треугольника равен 36 см, а площадь равна 18 см^2.

Решение

1) O – точка пересечения биссектрис. Значит, она равноудалена от сторон треугольника. OM = ON = OP.

2) OM, ON и OP – радиусы окружности, вписанной в треугольник ABC.

$S = pr, \quad r = \frac{S}{p}, r = \frac{18}{18} = 1.$

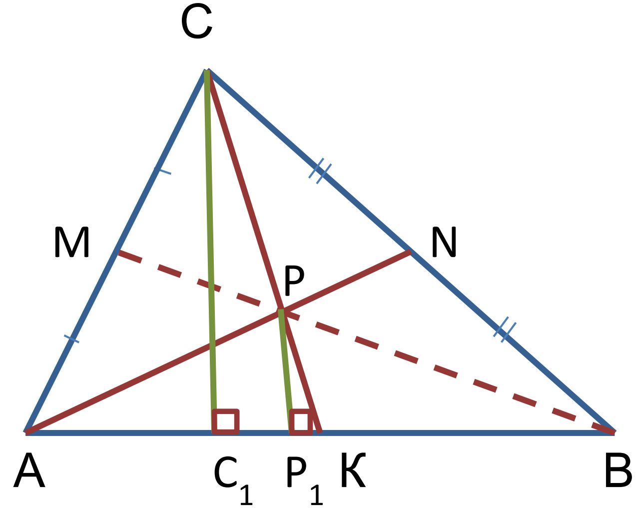


Ответ: 1

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

№2 (Свойства медиан).

В произвольном треугольнике Р – точка пересечения медиан. Найти площадь треугольника АВС, если площадь треугольника АРВ равна 47.



Решение

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CC_1.$

У ΔACB и ΔAPB общее основание АВ, значит их площадь зависит от их высот.

$\Delta KPP_1 \sim \Delta KCC_1$ (прямоугольные, $\angle K$ – общий).

PP_1 - высота ΔAPB, CC_1 – высота ΔACB ($PP_1 \parallel CC_1$)

$k = \frac{KP}{KC} = \frac{1}{3}$, так как CP : PK = 2:1 по свойству медиан.

Значит, $\frac{PP_1}{CC_1} = \frac{1}{3}$, т.е. $CC_1 = 3\ PP_1$. Тогда $S_{\Delta APB} = \frac{1}{2}AB \cdot PP_1$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CC_1 = \frac{1}{2}AB \cdot 3\ PP_1 = 3 \cdot S_{\Delta APB} = 3 \cdot 47 = 141.$

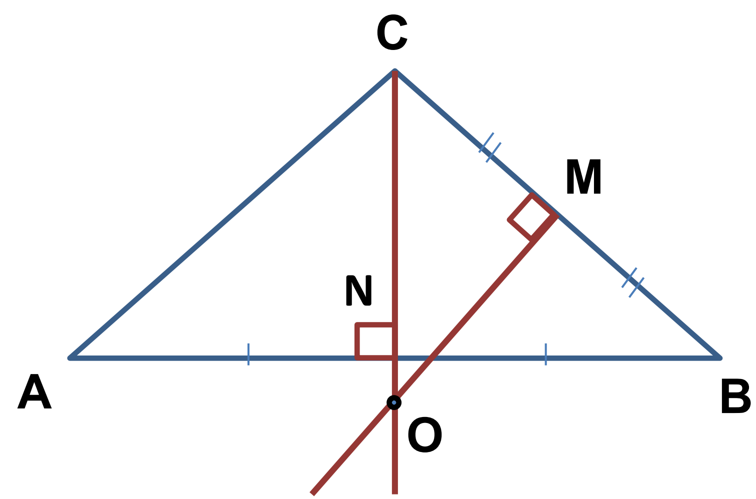
Ответ: 141

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

№3

(Точка пересечения серединных перпендикуляров).

В равнобедренном ΔACB с основанием AB, равным 12 см и боковой стороной, равной 10 см, найдите расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров до его вершин.



Решение

CN – серединный перпендикуляр (по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию)

N – середина AB и $NB = \frac{1}{2}AB$. Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равноудалена от всех его вершин. CO – искомое расстояние.

$\Delta COM \sim \Delta CBN$. Значит, $\frac{CO}{CB} = \frac{CM}{CN}$. Отсюда

$CO = \frac{CM \cdot CB}{CN}$. Найдем CN из прямоугольного ΔCBM по теореме Пифагора:

$$CN = \sqrt{CB^2 - NB^2} = \sqrt{CB^2 - (\frac{1}{2}AB)^2} =$$

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

Продолжение решения

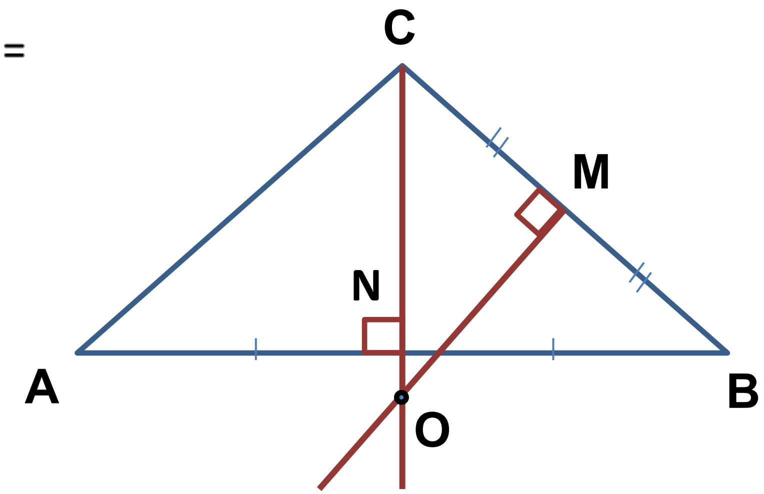
по теореме Пифагора

$CN = \sqrt{CB^2 - NB^2} = \sqrt{CB^2 - (\frac{1}{2}AB)^2} =$

$= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ см

Так как MO – серединный перпендикуляр к стороне CB, то $CN = \frac{1}{2}CB$.

Тогда $CO = \frac{CM \cdot CM}{2CN} = \frac{CM^2}{2CN} = \frac{10^2}{2 \cdot 8} = \frac{25}{4}$см

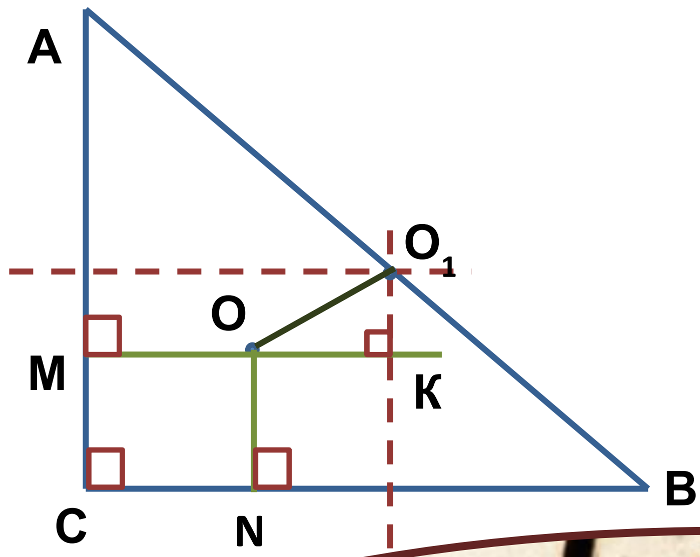


Ответ: 6,25 см

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

№4 (Расстояние от точки пересечения биссектрис до точки пересечения серединных перпендикуляров).

В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) найти расстояние между точкой пересечения биссектрис и точкой пересечения серединных перпендикуляров, если расстояние от точки пересечения биссектрис до сторон треугольника равно 3 см, AC = 24 см, BC = 7 см.



Решение

1) Пусть O – точка пересечения биссектрис, O_1 – точка пересечения серединных перпендикуляров. MO = ON – расстояния от точки O до сторон треугольника. OO_1– искомое расстояние.

2) ΔABC - прямоугольный. Тогда точка O_1лежит на середине гипотенузы AB, т.е. $AO_1 = O_1B$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} =$
$= 25$ см.

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

Продолжение решения

$AO_1 = O_1B = 12{,}5$ см.

3) CMON – квадрат, так как OM = ON и $\angle C = \angle M = \angle N = 90°$.

CM = CN = OM = ON = 3 см по условию.

4) Проведем продолжение MO за точку O.

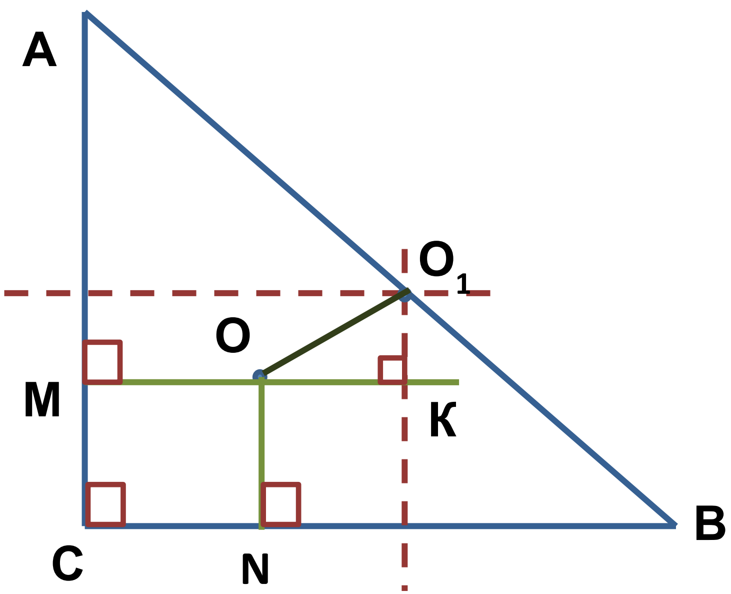
$\Delta\, OO_1K$ – прямоугольный, $\angle K = 90°$. OO_1 – гипотенуза.

$O_1K = \frac{1}{2}AC - MC = 12 - 3 = 9$ см.

$OK = \frac{1}{2}CB - CN = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$ см.

$$OO_1 = \sqrt{OK^2 + O1K^2} = \sqrt{0{,}25 + 81} = \sqrt{\frac{325}{4}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

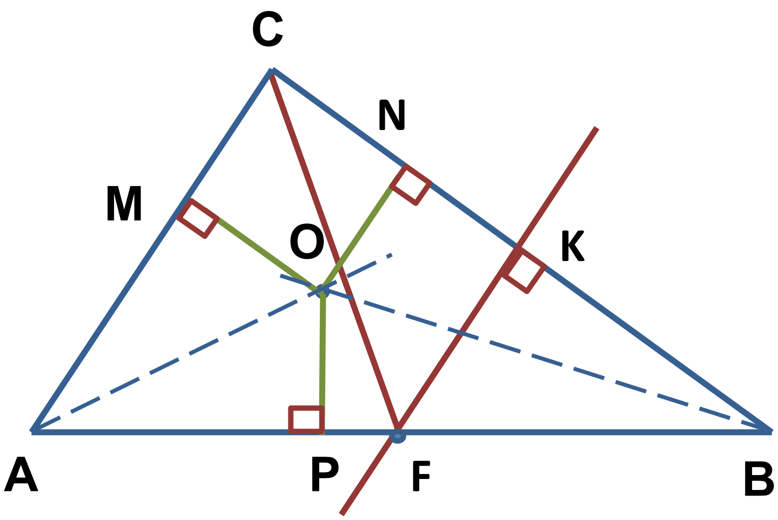


Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **см**

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

№4

Расстояние от точки пересечения биссектрис прямоугольного треугольника до его сторон равно 4 см, а расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров до вершин треугольника равно 13 см. Найти периметр треугольника.



Решение

1) Точка, равноудаленная от всех сторон ΔABC – это точка пересечения биссектрис – точка O.

Рассмотрим ΔAMO и ΔAPO:

AO – общая гипотенуза; MO = PO (как расстояния от точки пересечения биссектрис до сторон треугольника).

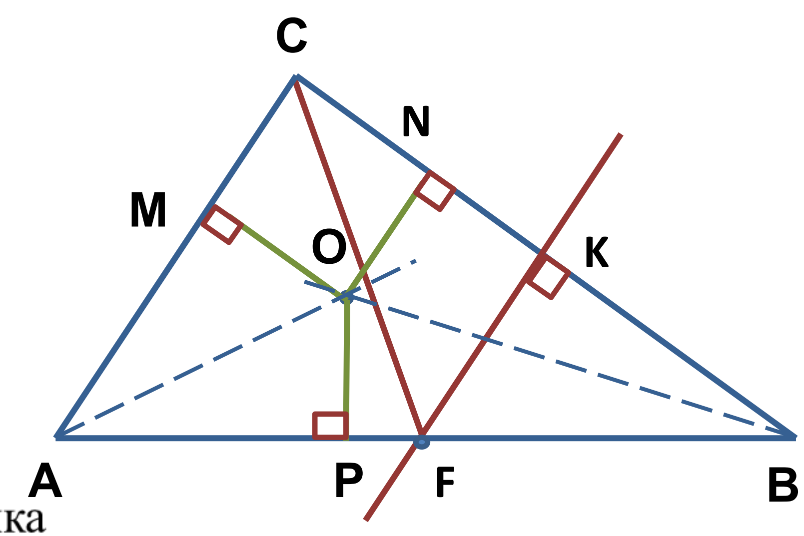
Значит, ΔAMO = ΔAPO по гипотенузе и катету.

Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон: MA = AP.

Задачи по теме «Четыре замечательные точки треугольника» (Интернет-ресурс)

Продолжение решения

2) Аналогично, $\Delta POB = \Delta NOB$ и $BN = BP$.
3) Тогда $AB = AP + BP = AM + BN$.
4) Рассмотрим четырехугольник CMON.
Так как $MO = ON$, то CMON – квадрат;
$\angle M = \angle N = \angle C = 90°$ и $\angle O = 90°$.
Тогда $OM = ON = MC = NC = 4$ см.
5) KF – серединный перпендикуляр к стороне BC, так как ΔABC – прямоугольный, то точка пересечения серединных перпендикуляров лежит на середине гипотенузы, следовательно, точка F принадлежит AB и $AF = FB = 13$ см (по условию), значит $AB = 26$.
6) $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = AB + (AM + MC) + (CN + NB) = AB + (AM + NB) + + (MC + CN) = = AB + AB + 2MC = 2AB + 2MC.$
$P_{\Delta ABC} = 2 \cdot 26 + 2 \cdot 4 = 60$ (см).



Ответ: 60 см

Приложение
Список задач ГИА по геометрии по теме: «Замечательные точки треугольника»

1 часть. Модуль «Геометрия»

№1

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и BL, которые пересекаются в точке O. Угол AOB равен 100°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.

№2

В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Найдите величину угла, образованного этими биссектрисами, если угол A равен 44°, угол B равен 24°.

№3

В треугольнике ABC угол C равен 88°, AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB.

Приложение
Список задач ГИА по геометрии по теме: «Замечательные точки треугольника»

№4

В треугольнике ABC угол A равен 80°, угол B равен 60°, а их биссектрисы пересекаются в точке H. Найдите угол ACH.

№5

Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M, угол AMB равен 123°. Найдите угол ACM.

№6

В треугольнике ABC проведены высоты BX и CY, которые пересекаются в точке O. Угол BOC равен 119°. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

№7

В треугольнике ABC высоты, проведены из вершин A и B. Найдите величину угла между высотами, если угол A равен 52°,
угол B равен 34°.

Приложение
Список задач ГИА по геометрии по теме: «Замечательные точки треугольника»

2 часть. Модуль «Геометрия»

№1

В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найдите площадь треугольника ABC, если AM равна 2 см, BN равна 3 см.

№2

Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины C в отношении 7:2, считая от вершины C. В каком отношении, считая от вершины A, эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины A?

№3

Высоты треугольника пересекаются в точке H, а медианы – в точке M. Точка K – середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 12$, $CH = 6$, угол BAC равен 45°.

Приложение
Список задач ГИА по геометрии по теме: «Замечательные точки треугольника»

№4

№5

№6

№7

$$\angle MON = ?$$

Приложение
Список задач ГИА по геометрии по теме: «Замечательные точки треугольника»

№8

Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы – в точке M. Точка K – середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 6\sqrt{2}, CH = 3\sqrt{2}, \angle BAC = 45°$.

№9

В равнобедренном треугольнике серединный перпендикуляр к боковой стороне AB пересекает другую боковую сторону в точке E. Найдите основание треугольника ABC , если периметр треугольника AEC равен 15, а боковая сторона равна 14.

№10

Найдите площадь равнобедренного треугольника ABC, если основания перпендикуляра, проведенного из точки O пересечения медиан к боковой стороне треугольника делит ее на отрезки 3 и 2 см, причем расстояние от точки пересечения медиан до нижнего основания составляет 1 см.

№11

Найдите периметр прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 и расстоянием от точки пересечения биссектрис до сторон треугольника, равным 4.

Использованные ресурсы

1. Семенов А.В. Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Математика 2013. Учебное пособие. – М.: Интеллект-центр, 2012.
2. Кузнецова Л.В., Суворова С.В., Бунимович Е.А. Математика: сборник заданий для подготовки к ГИА в 9 классе. –
3. М.: Просвещение, 2012.
4. Семенов А.В., Ященко И.В. ГИА-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов. –
5. М.: Национальное образование, 2012.
6. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. Геометрия 7 – 9: учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2009.
7. Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 7 – 9 классы. – Ростов н/Д.: Феникс, 2012 (Большая перемена).
8. **ФГОС**. Глазков Ю.А., Камаев П.М. Рабочая тетрадь по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Мадомцева и др. «Геометрия. 7 – 9». – М.: Издательство «Экзамен», 2012.
9. Безрукова Г.К., Мельникова Н.Б. Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Геометрия. 2009. – М.: Интеллект центр, 2009.