Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \to \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \to B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M\cdot X\cdot\overline{H} + \overline{M}\cdot X\cdot\overline{H} = (M+\overline{M})\cdot X\cdot\overline{H} = X\cdot\overline{H}$$

$$X = (B \to A)\cdot\overline{(A+B)}\cdot(A \to C)$$

раскрыли →

$$= (\overline{B}+A)\cdot\overline{(A+B)}\cdot(\overline{A}+C)$$

формула де Моргана

$$= (\overline{B}+A)\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{A}+C)$$

распределительный

$$= (\overline{B}\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{A})\cdot\overline{B}\cdot(\overline{A}+C)$$

исключения третьего

$$= \overline{B}\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{A}+C)$$

повторения

$$= \overline{B}\cdot\overline{A}\cdot(\overline{A}+C)$$

поглощения

$$= \overline{B}\cdot\overline{A}$$

Логические уравнения

$$\overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C = 1$$

A=1, B=0, C=1

$$\overline{A}\cdot B = 1$$ **или** $$A\cdot\overline{B}\cdot C = 1$$

A=0, B=1, C – **любое**
2 решения: (0, 1, 0), (0, 1, 1)

Всего 3 решения!

$$K\cdot L + M\cdot L\cdot N + K\cdot L\cdot\overline{M} = 1$$

K=1, L=1,
M и N – **любые**
4 решения

M=1, L=1, N=1,
K – **любое**
2 решения

K=1, L=1, M=0,
N – **любое**
2 решения

$$L\cdot(K + M\cdot N) = 1$$

Всего 5 решений!

Как построить логическую формулу

Синтез логических выражений

Совершенная Дизъюнктивная Нормальная форма (СДНФ)

- ✔ Формулу называют элементарной конъюнкцией, если она является конъюнкцией переменных или их отрицаний без повторения
- ✔ Формула называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций.
- ✔ Формула называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ), если:
  1) она является ДНФ
  2) В каждую элементарную конъюнкцию входят все переменные (или их отрицания), от которых зависит функция

$$A = x_1 \,\&\, \overline{x}_2 \vee x_1 \,\&\, x_2;$$

Алгоритм построения **СДНФ** по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции F равно 1.
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Синтез логических выражений (СДНФ)

A	B	X	
0	0	1 •	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	1	1 •	$\overline{A}\cdot B$
1	0	0	
1	1	1 •	$A\cdot B$

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 1**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат.

распределительный

$$X=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B=\overline{A}\cdot(\overline{B}+B)+A\cdot B$$

$$=\overline{A}+A\cdot B=(\overline{A}+A)\cdot(\overline{A}+B)=\overline{A}+B$$

исключения третьего

распределительный

исключения третьего

Синтез логических выражений (СДНФ)

A	B	C	X	
0	0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

$$X=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot C$$
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{C}+C)$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot(\overline{C}+C)$$
$$+A\cdot C\cdot(\overline{B}+B)$$
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$
$$=\overline{A}\cdot(\overline{B}+B)+A\cdot C$$
$$=\overline{A}+A\cdot C$$
$$=(\overline{A}+A)\cdot(\overline{A}+C)=\boxed{\overline{A}+C}$$

Совершенная Конъюнктивная Нормальная форма (СКНФ)

- ✔ Формулу называют элементарной дизъюнкцией, если она является дизъюнкцией переменных или их отрицаний без повторения
- ✔ Формула называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ), если она является конъюнкцией неповторяющихся элементарных дизъюнкций.
- ✔ Формула называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ), если:
  1) она является КНФ
  2) В каждую элементарную дизъюнкцию входят все переменные (или их отрицания), от которых зависит функция

$$A = (x_1 \vee \overline{x_2})\ \&\ (x_1 \vee x_2)$$

Алгоритм построения **СКНФ** по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции ***F*** *равно 0.*
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Синтез логических выражений (СКНФ)

A	B	X	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$A \cdot \overline{B}$
1	1	1	

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 0**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат, который равен $\overline{X}$.

Шаг 4. Сделать инверсию.

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \quad \Rightarrow \quad X = \overline{A \cdot \overline{B}} = \overline{A} + B$$

Синтез логических выражений (СКНФ)

A	B	C	X	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	1	

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$= A \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B)$$

$$= A \cdot \overline{C}$$

$$X = \overline{A \cdot \overline{C}} = \boxed{\overline{A} + C}$$

Задание №1.

Найти логическую функцию F, зависящую от логических переменных A, B, C, по заданной таблице истинности.

Упрощенный вид функции должен содержать не более трех логических операций. В упрощенном виде функции допустимо использовать только операции ИНВЕРСИЯ, КОНЪЮНКЦИЯ и ДИЗЪЮНКЦИЯ.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Способ 1а. Решение через **СДНФ**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

СДНФ по строкам, где $F(a,b,c) = 1$:

$$\bar a \bar b c \vee \bar a b c \vee a \bar b \bar c \vee a \bar b c \vee a b c =$$

$$= \bar a \bar b c \vee bc(\underbrace{\bar a \vee a}_{1}) \vee a\bar b(\underbrace{\bar c \vee c}_{1}) =$$

$$= \bar a \bar b c \vee bc \vee a\bar b =$$

$$= c(\bar a \bar b \vee b) \vee a\bar b =$$

$$= c(\bar a \vee b) \vee a\bar b =$$

$$\boxed{= c\bar a \vee cb \vee a\bar b =}$$ ← домножим, н-р, cb на $1 = (a \vee \bar a)$

$$= c\bar a \vee cb(\bar a \vee a) \vee a\bar b =$$

$$= c\bar a \vee cb\bar a \vee abc \vee a\bar b =$$

$$= c\bar a(1 \vee b) \vee a(bc \vee \bar b) =$$

$$= c\bar a \vee a(c \vee \bar b) =$$

$$= c\bar a \vee ac \vee a\bar b =$$

$$= c(\underbrace{\bar a \vee a}_{1}) \vee a\bar b = a\bar b \vee c$$

Способ 1б. Решение через **СДНФ**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

СДНФ по строкам, где $F(a,b,c)=1$:

$$= \bar a\bar b c \lor \bar a b c \lor a\bar b\bar c \lor a\bar b c \lor abc =$$

$$= \bar a\bar b c \lor bc(\underbrace{\bar a \lor a}_{1}) \lor a\bar b(\underbrace{\bar c \lor c}_{1}) =$$

$$= \bar a\bar b c \lor bc \lor a\bar b \boxed{\lor\ \bar a\bar b c} \leftarrow \text{добавим}$$

$$= c(\bar a\bar b \lor b) \lor a\bar b \lor \bar a\bar b c =$$

$$= c(\bar a \lor b) \lor \bar b(\underbrace{a \lor \bar a c}_{a \lor c}) =$$

$$= c\bar a \lor bc \lor \bar b(a \lor c) =$$

$$= c\bar a \lor bc \lor \bar b a \lor \bar b c =$$

$$= \bar b a \lor c(\bar a \lor \underbrace{b \lor \bar b}_{1}) = c \lor a\bar b$$

Способ 2. Решение через **СКНФ**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

СКНФ по строкам где $F(a,b,c)=0$:

$$(a \vee b \vee c)\cdot(a \vee \bar{b} \vee c)\cdot(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) =$$

$$= (a \vee c)\cdot(\underbrace{b \vee \bar{b}}_{1})\cdot(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) =$$

$$= (a \vee c)\cdot(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) =$$

$$= \underbrace{a\bar{a}}_{0} \vee a\bar{b} \vee ac \vee \bar{a}c \vee \bar{b}c \vee \underbrace{cc}_{c} =$$

$$= a\bar{b} \vee ac \vee \bar{a}c \vee \bar{b}c \vee c =$$

$$= a\bar{b} \vee c$$

Задание №2.

Дан фрагмент таблицы истинности логической функции трех переменных, содержащий только те строки, которые содержит ложные значения функции. Все остальные строки таблицы истинности дают в результате истинное значение функции.

Запишите логическую функцию и упростите ее.
Результат упрощения может содержать только операции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции.

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Решения

Решение

Из олимпиады:

$\boxed{\text{СКНФ (по нулям)}}$

$$F=(a\vee b\vee \bar c)(a\vee \bar b\vee \bar c)(\bar a\vee b\vee \bar c)(\bar a\vee \bar b\vee \bar c)=$$

$$=(a\vee \bar c)(\underbrace{b\vee \bar b}_{1})\cdot(\bar a\vee \bar c)(\underbrace{b\vee \bar b}_{1})=$$

$$=(a\vee \bar c)\cdot(\bar a\vee \bar c)=\underbrace{a\bar a}_{0}\vee a\bar c\vee \bar a\bar c\vee \bar c\bar c=$$

$$=a\bar c\vee \bar a\bar c\vee \bar c=\bar c(\underbrace{a\vee \bar a\vee 1}_{1})=\bar c$$

A	B	C	F
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

$F(a,b,c)=1$ на

a	b	c
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{СДНФ (по ед-цам)}}$

$$\bar a\bar b\bar c\vee \bar a b\bar c\vee a\bar b\bar c\vee ab\bar c=\bar a\bar c(\underbrace{\bar b\vee b}_{1})\vee a\bar c(\underbrace{\bar b\vee b}_{1})=$$

$$=\bar a\bar c\vee a\bar c=\bar c(\underbrace{\bar a\vee a}_{1})=\bar c$$

Задание для самостоятельного решения

Постройте и упростите логические выражения, соответствующие приведённым таблицам истинности. В каждом случае выбирайте наиболее простой способ синтеза. В вашем решении опишите все шаги алгоритма.

1)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

2)

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3)

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1