Обратная матрица.

- Квадратная матрица порядка n называется невырожденной, если её определитель не равен нулю.

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- В противном случае (detA=0) матрица A называется вырожденной.

- Если А- квадратная матрица, то обратной по отношению к матрице А называется матрица, которая будучи умноженной на А (как справа, так и слева) даёт единичную матрицу.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

- Если обратная матрица существует, то матрица А называется обратимой.

- Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется обращением матрицы.

Теорема.

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной ($\det A \neq 0$).

Нахождение обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{*}\right)^{T}}{\det A}$$

где

$$\left(A^{*}\right)^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

присоединенная матрица

Чтобы найти обратную матрицу:

- ✔ 1. находят *det*A и убеждаются, что *det*A≠0;
- ✔ 2. находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу A*;
- ✔ 3. транспонируют новую матрицу $\left(A_{ij}^{*}\right)^{T}$
- ✔ 4. умножают полученную матрицу на $\dfrac{1}{\det A}$

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к матрице А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) находим определитель матрицы А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

2) находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

записываем новую матрицу: $A^* = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3) транспонируем эту матрицу:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4) умножим полученную матрицу на $\dfrac{1}{\det A}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\left(A^{*}\right)^{T}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$

Решение матричных уравнений.

$$A \cdot X = B$$

$$\underbrace{\left(A^{-1} \cdot A\right)}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot \underbrace{\left(A \cdot A^{-1}\right)}_{E} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Пример 2.

Найти матрицу X: $A \cdot X \cdot C = B$

$$A \cdot X \cdot C = B$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{E} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

Пример 3. Найти матрицу X:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{B}}$$

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$

2) $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$ $\qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

3) $$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

4) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$5)\quad X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Показать, что $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Пусть $ABX = C$

$$(AB)X = C$$

$$\underbrace{(AB)^{-1}\cdot(AB)}_{E}\cdot X = (AB)^{-1}C$$

$$X = (AB)^{-1}C$$

$$X\cdot C^{-1} = (AB)^{-1}\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{E}$$

$$XC^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$A(BX) = C$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot(BX) = A^{-1}\cdot C$$

$$BX = A^{-1}\cdot C$$

$$\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{E}\cdot X = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot C$$

$$X = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot C$$

$$X\cdot C^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{E}$$

$$XC^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Получили, что $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$