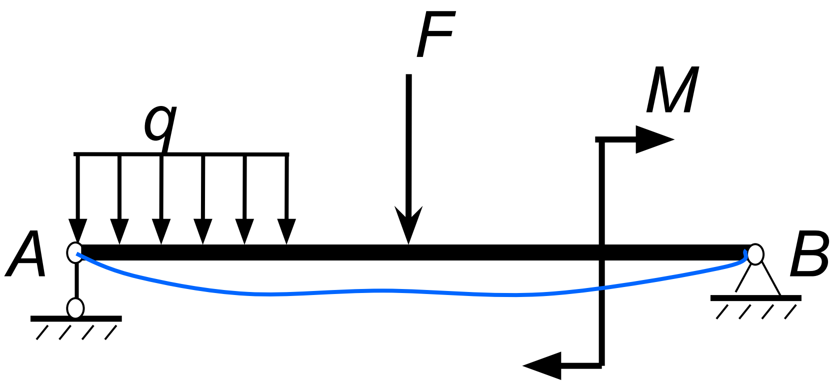
Изгиб

ИЗГИБ

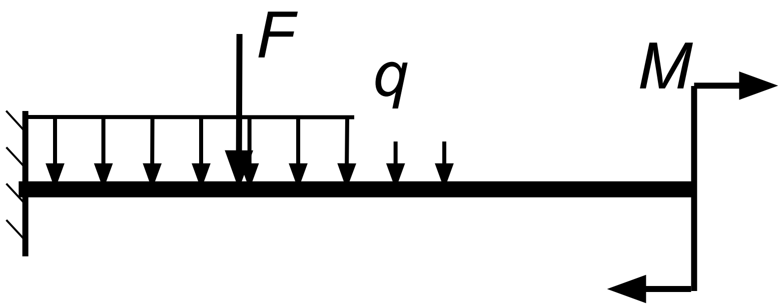
Основные понятия и допущения

Изгиб - вид деформации, который связан с изменением кривизны бруса под действием поперечных сил и внешних пар.



Брусья, работающие на изгиб, называются *балками*.

Балка с одним заделанным концом – это консольная балка или *консоль.*

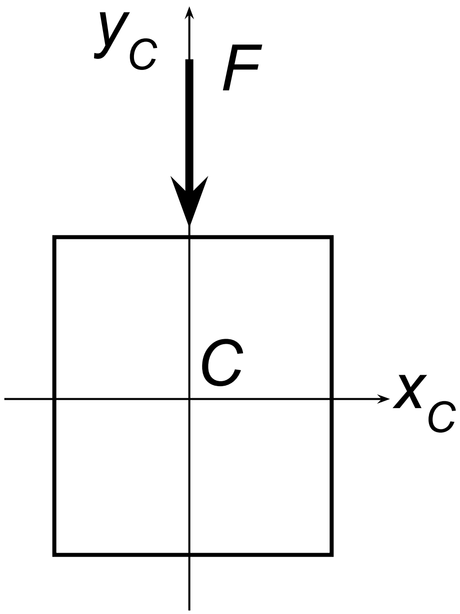


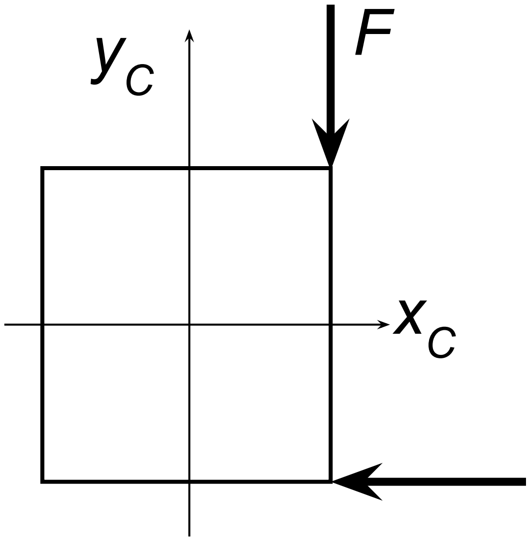
Изгиб от поперечных нагрузок называют *поперечным.*

Основные понятия и допущения

Поперечный изгиб может быть *плоским прямым* или *косым* изгибом.

Плоский изгиб происходит в случае, когда **силовая плоскость** (плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из *главных осей инерции*





Если в поперечном сечении действует только **изгибающий момент**, деформация называется *чистый изгиб*.

Определение реакций

При изгибе для закрепления балки, в основном, ис-пользуются

1. шарнирно-неподвижная опора(цилиндрический шарнир),

2. шарнирно-подвижная опора (стержень с шарнирами на концах)

3. жесткая заделка.

Прежде чем приступить к расчету необходимо составить расчетную схему, определить опорные реакции.

Определение реакций

Для плоской системы сил достаточно 3-х уравнений статики.

Так как все силы действуют перпендикулярно продольной оси балки, горизонтальная составляющая реакции равна нулю.

Поэтому из условий равновесия для определения реакций применяют два следующих уравнения статики :

$$\Sigma M_{(A)} = 0;$$

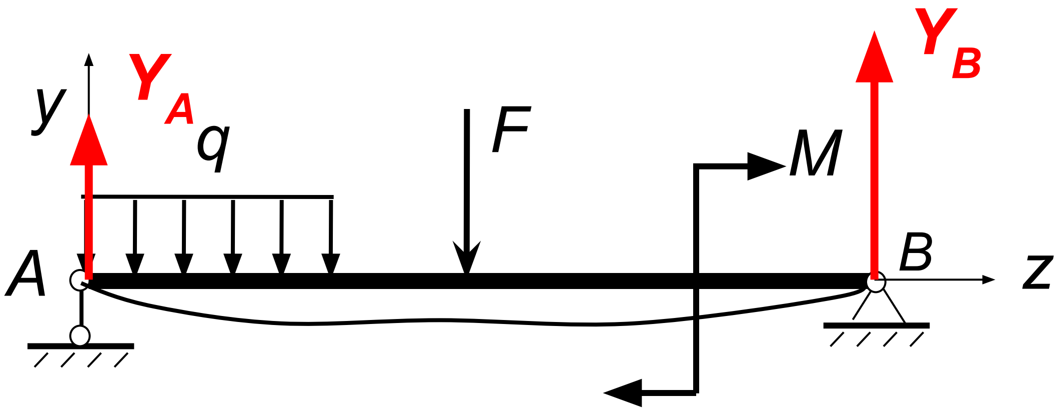
$$\Sigma M_{(B)} = 0$$

Третье уравнение используют для проверки правильности определения реакций:

$$\Sigma F_{ky} = 0$$

Чаще записывается проще $\Sigma Y = 0$

Определение реакций



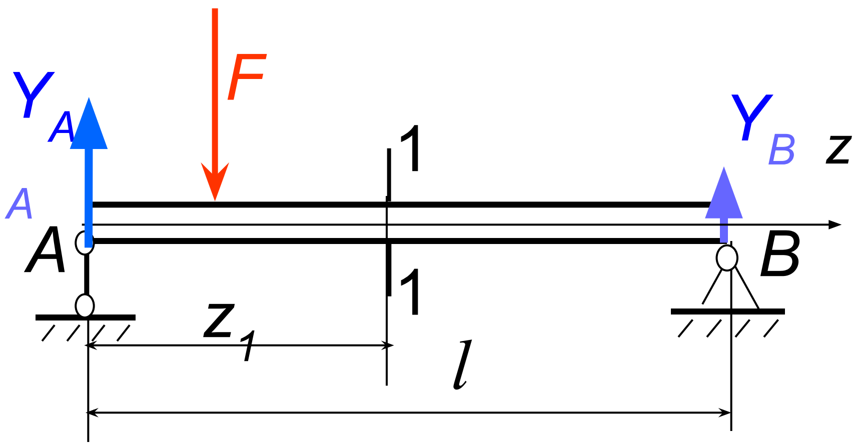
$$\Sigma M_{(A)} = 0;$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

Внутренние усилия при изгибе

При действии внешних силовых факторов в каждом поперечном сечении балки возникают **внутренние усилия**: **поперечные силы и изгибающие моменты.**



Для их нахождения используется метод сечений.

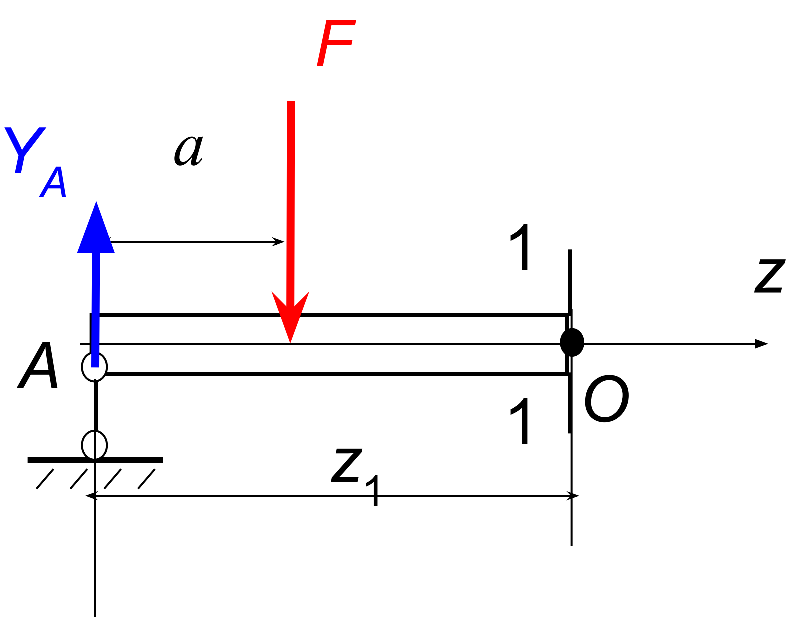
Рассмотрим равновесие левой части балки.

Внутренние усилия при изгибе

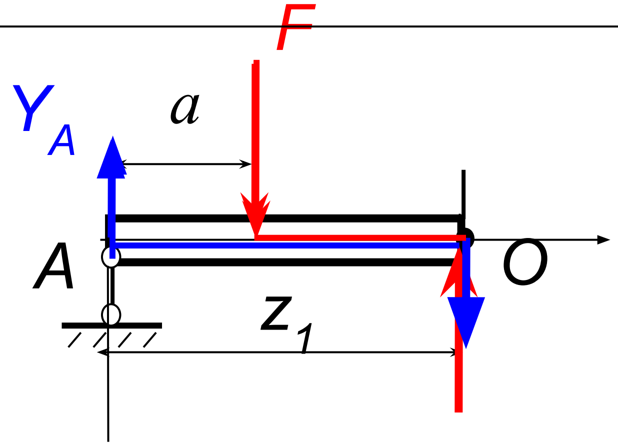
Выполним приведение системы сил к центру сечения О.

В соответствие с леммой Пуансо, *силу, действующую на тело, можно переносить параллельно самой себе, добавляя при этом пару, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения*

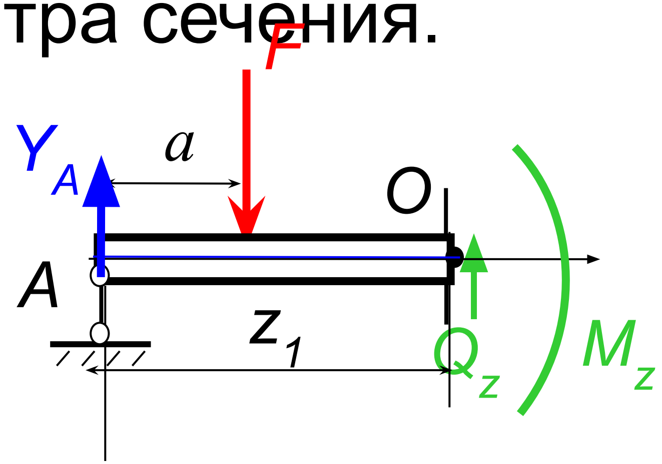
Выполним это для каждой силы



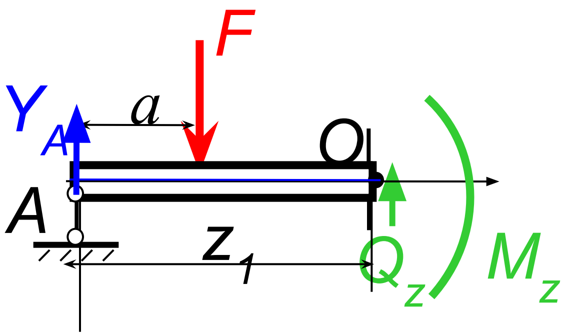
Внутренние усилия при изгибе



Приведенную к центру систему в соответствие с теоремой Пуансо можно выразить через **главный вектор**, равный сумме внешних сил и **главный момент**, равный сумме моментов внешних сил относительно центра сечения.



Внутренние усилия при изгибе



Запишем условие равновесия:

1) $\Sigma M_o = 0;$ $\quad -M_z - Y_A \cdot z + F \cdot (z - a) = 0;$

$$\boxed{M_z = -Y_A \cdot z + F \cdot (z - a)}$$

$\Sigma F_{ky} = 0;$ $\quad Q_z + Y_A - F = 0$

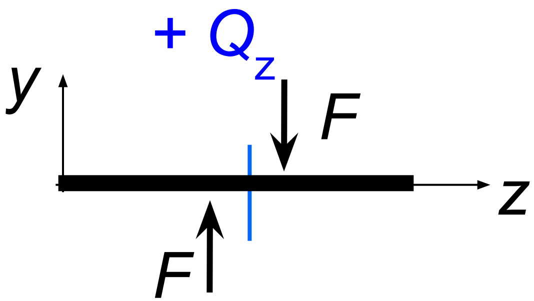
$$\boxed{Q_z = F - Y_A}$$

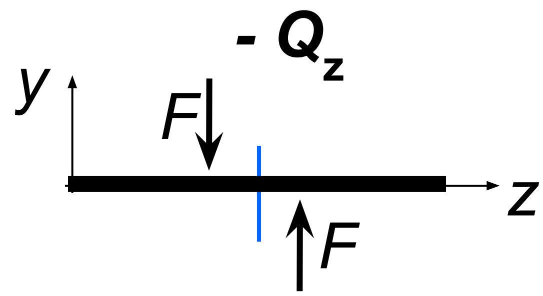
Внутренние усилия при изгибе

Изгибающий момент M_z в любом сечении равен ***алгебраической сумме моментов*** всех сил, действующих по одну сторону от сечения балки **относительно центра тяжести сечения**.

Поперечная сила Q_z в любом сечении равна ***алгебраической сумме проекций*** всех внешних сил, приложенных с одной стороны от сечения, на ось в плоскости сечения, перпендикулярную к продольной оси балки.

Правило знаков

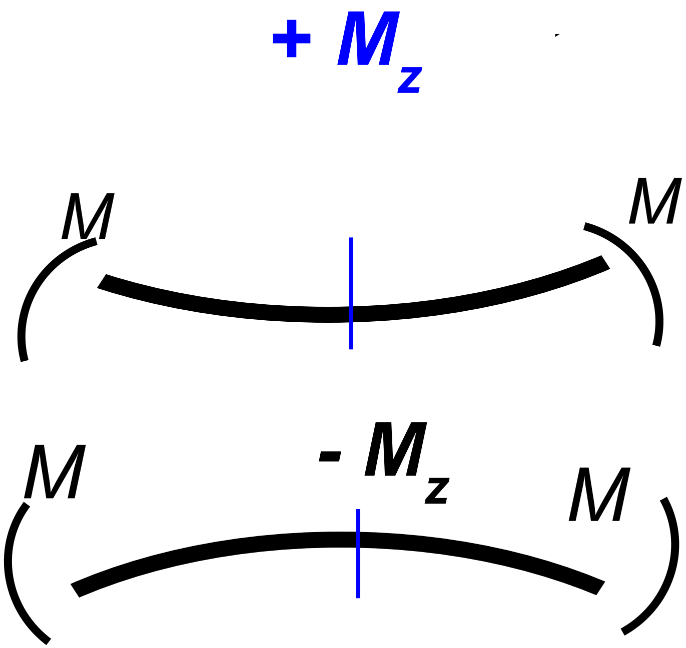




Поперечная сила считается **положительной**, если она сдвигает левую часть балки от сечения вверх, а правую - вниз

В противном случае поперечная сила **отрицатель-на**.

Правило знаков



Изгибающий момент в сечении считается **положительным**, если он изгибает балку выпуклостью вниз

При изгибе балки выпуклостью вверх изгибающий момент считается **отрицательным.**

Порядок построения эпюр

1. Балка вычерчивается в выбранном масштабе с указанием размеров и нагрузок;

2. Определяются реакции с обязательной последующей проверкой;

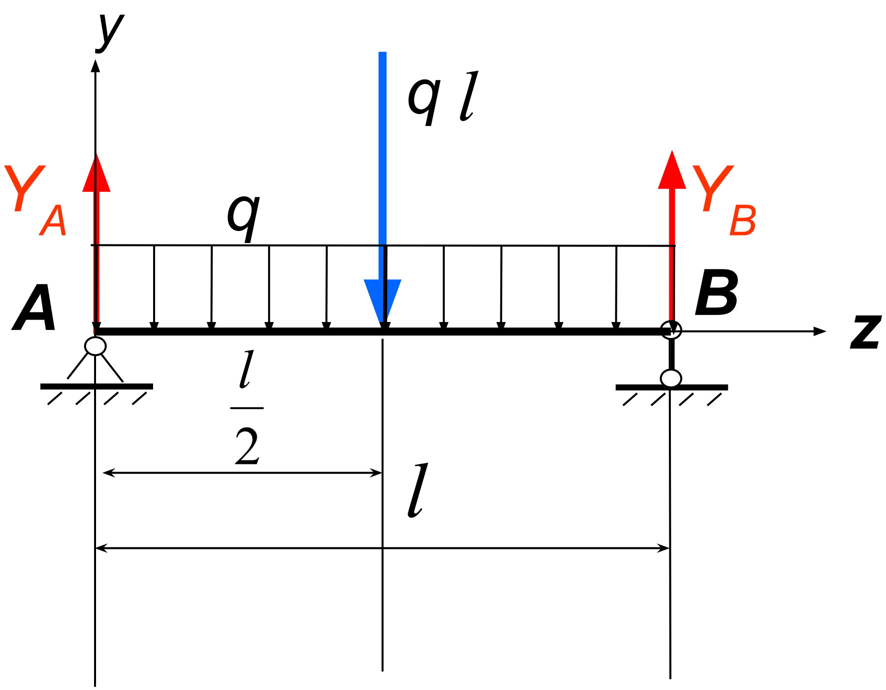
3. Балка разбивается на отдельные участки со своим законом изменения нагрузки;

4. Для каждого участка записываются уравнения для определения Q_z и M_z;

5. Вычисляют ординаты Q_z и M_z по составленным для участков уравнениям;

6. Строят в принятом масштабе эпюры Q_z и M_z, откладывая вверх от оси балки положительные значения, вниз - отрицательные.

ИЗГИБ



$\Sigma M_{(A)}=0;\ Y_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$ (1)

$\Sigma M_{(B)}=0;\ -Y_A l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$ (2)

$\Sigma Y = 0;$ (3)

(1) $Y_B = \frac{ql}{2}$

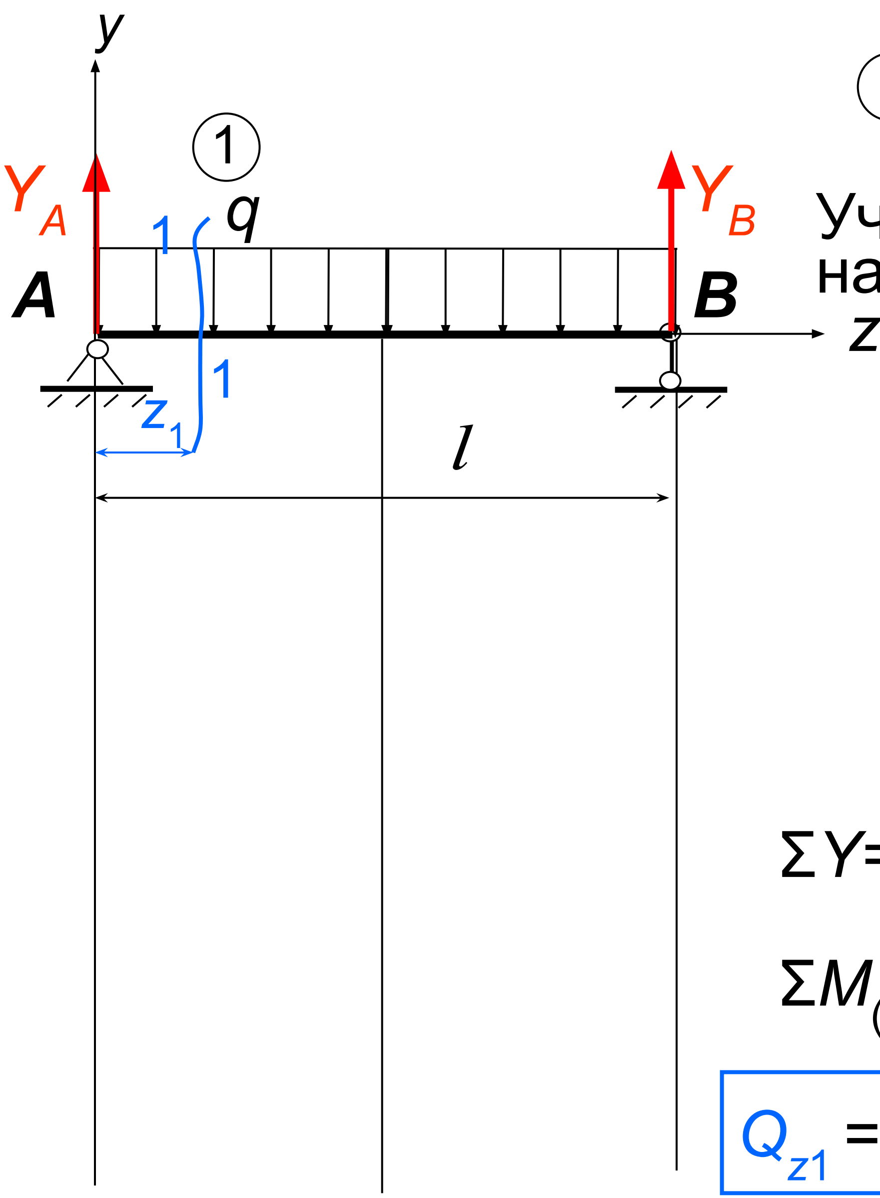
(2) $Y_A = \frac{ql}{2}$

Проверка

(3) $Y_A + Y_B - q \cdot l = 0$

$0 = 0$

ИЗГИБ

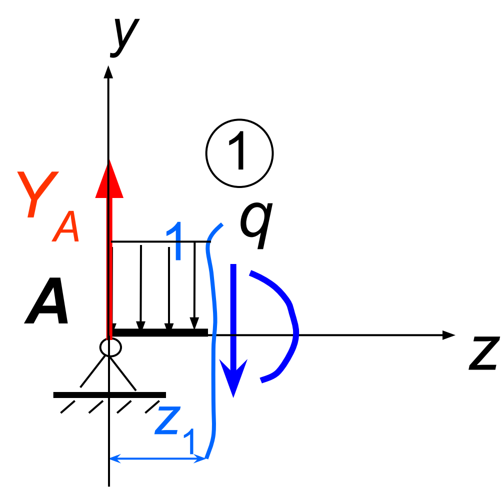


Разбиваем балку на участки

1

$z_1=0; \quad z_1=l$

Участок один, так как характер нагрузки не меняется

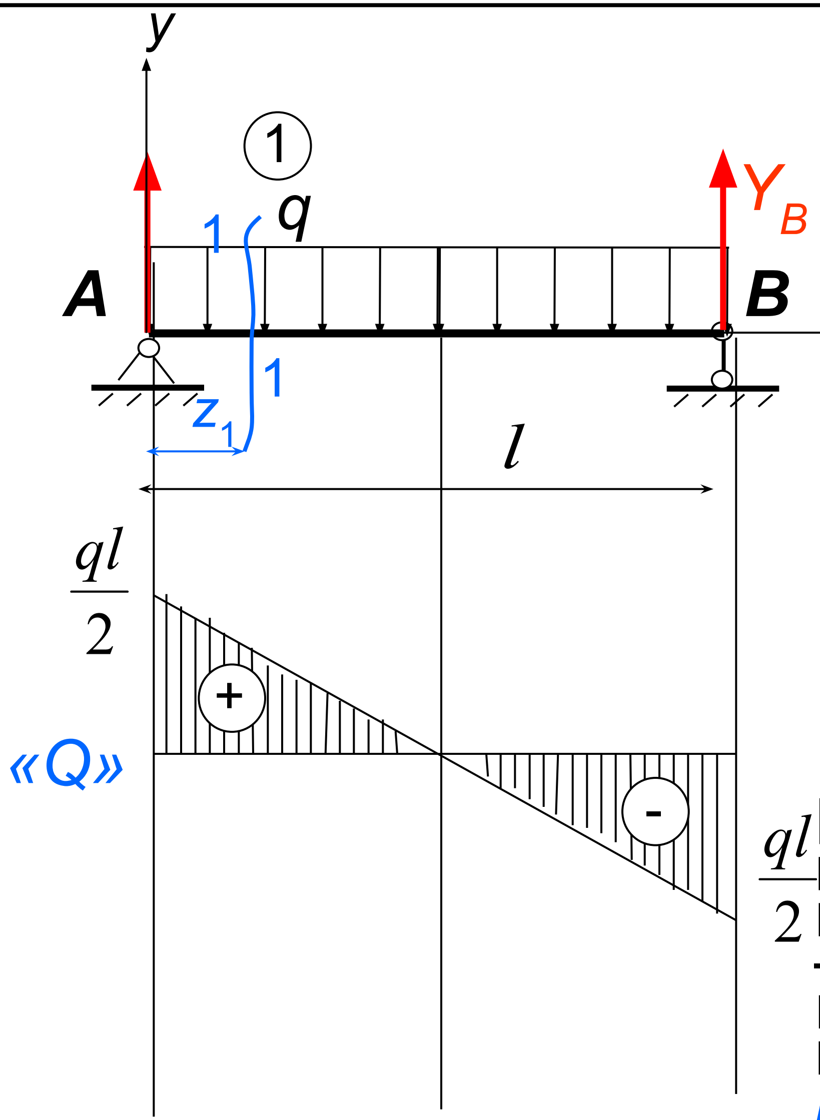


$$\Sigma Y=0; \quad -Q_{z1} - qz_1 + Y_A = 0$$

$$\Sigma M_{(o)}=0; \ -Y_A \cdot z_1 + q \cdot \frac{z_1^2}{2} + M_{z1} = 0;$$

$$\boxed{Q_{z1} = Y_A - qz_1} \qquad \boxed{M_{z1} = Y_A \cdot z_1 - q\frac{z_1^2}{2}}$$

ИЗГИБ



1

$$\boxed{Q_{z1} = Y_A - qz_1}$$

Подставим значения координат и рассчитаем величину поперечной силы на концах участков

$$Q_{z1=0} = Y_A = \frac{ql}{2};$$

$$Q_{z1=l} = Y_A - ql = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2};$$

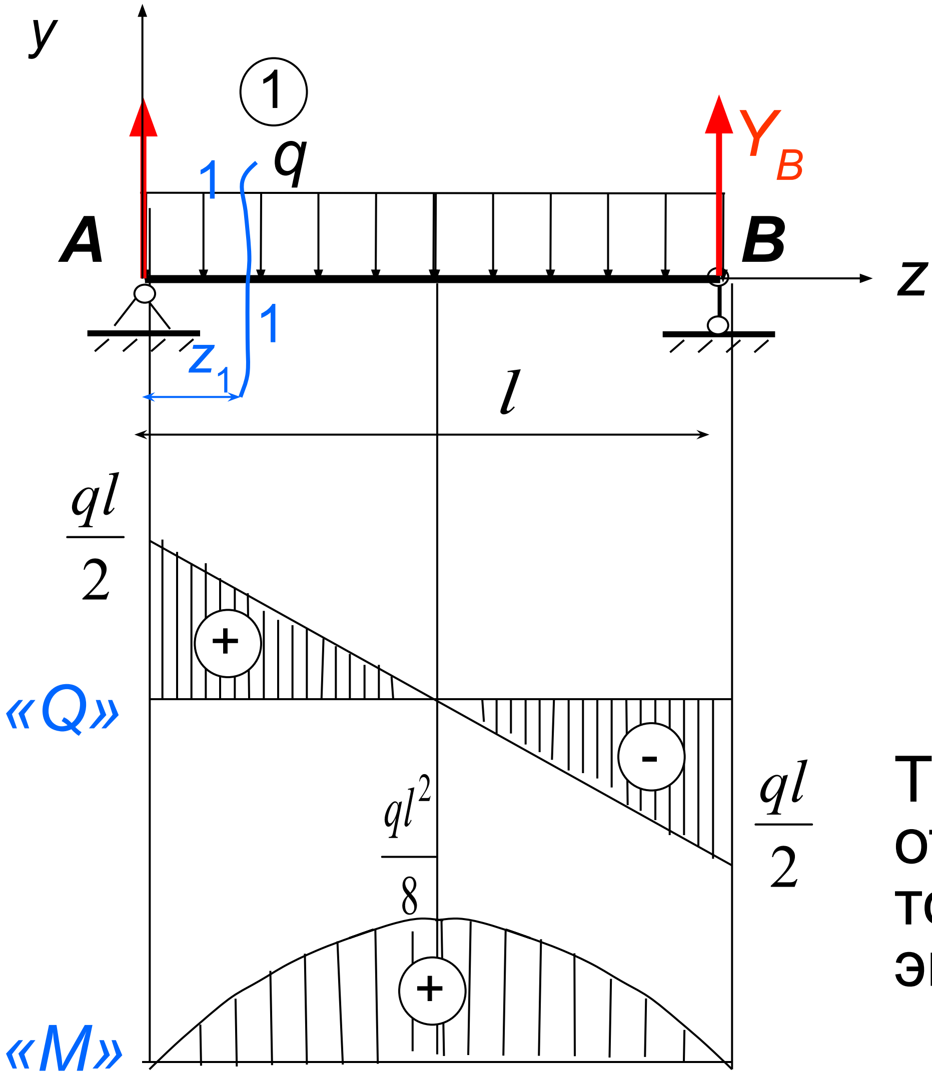
Поперечная сила по длине участка принимает значение равное нулю, а так как поперечная сила – первая производная изгибающего момента, то момент будет иметь в этой точке ***экстремальное значение***

Найдем координату, при которой $Q=0$.

$$Y_A - qz_1 = 0$$

$$z_1 = Y_A/q = \frac{ql}{2q} = \frac{l}{2}$$

ИЗГИБ



$$M_{z1} = Y_A \cdot z_1 - q\,\frac{z_1^2}{2}$$

$$M_{z1=0} = 0$$

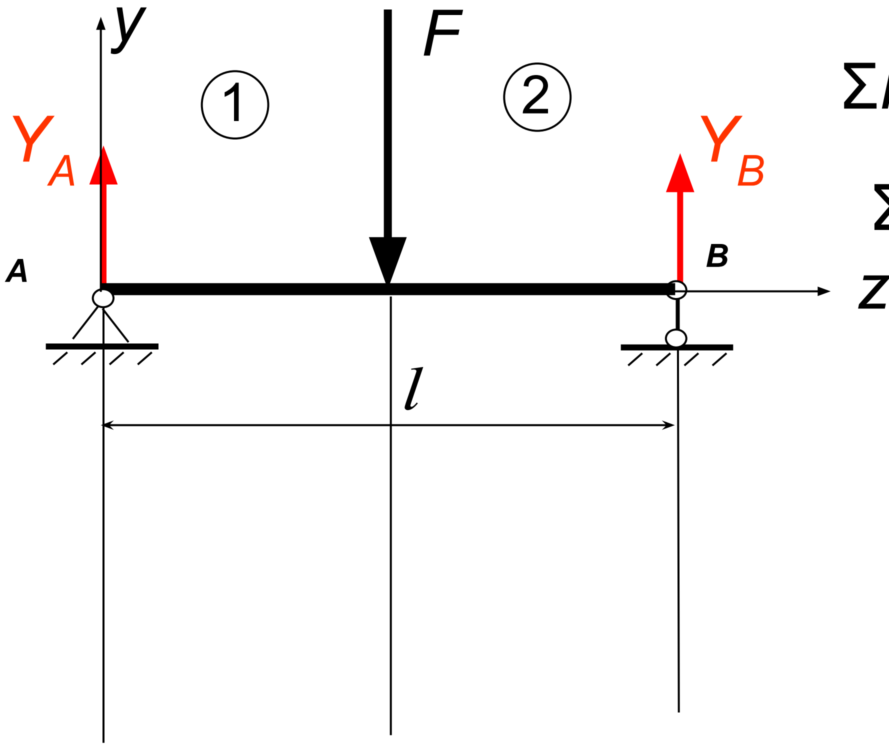
$$M_{z1=l} = \frac{ql}{2}\cdot l - q\,\frac{l^2}{2} = 0$$

$$M_{z\,1=\frac{l}{2}} = \frac{ql}{2}\,\frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

Так как зависимость момента от координаты квадратичная, то линия, ограничивающая эпюру моментов - парабола

Эпюра построена на сжатом волокне

ИЗГИБ



$$\Sigma M_{(A)}=0;\ Y_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{(B)}=0;\ -Y_A \cdot l + F\frac{l}{2} = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma Y = 0; \qquad (3)$$

(1) $Y_B = \dfrac{F}{2}$

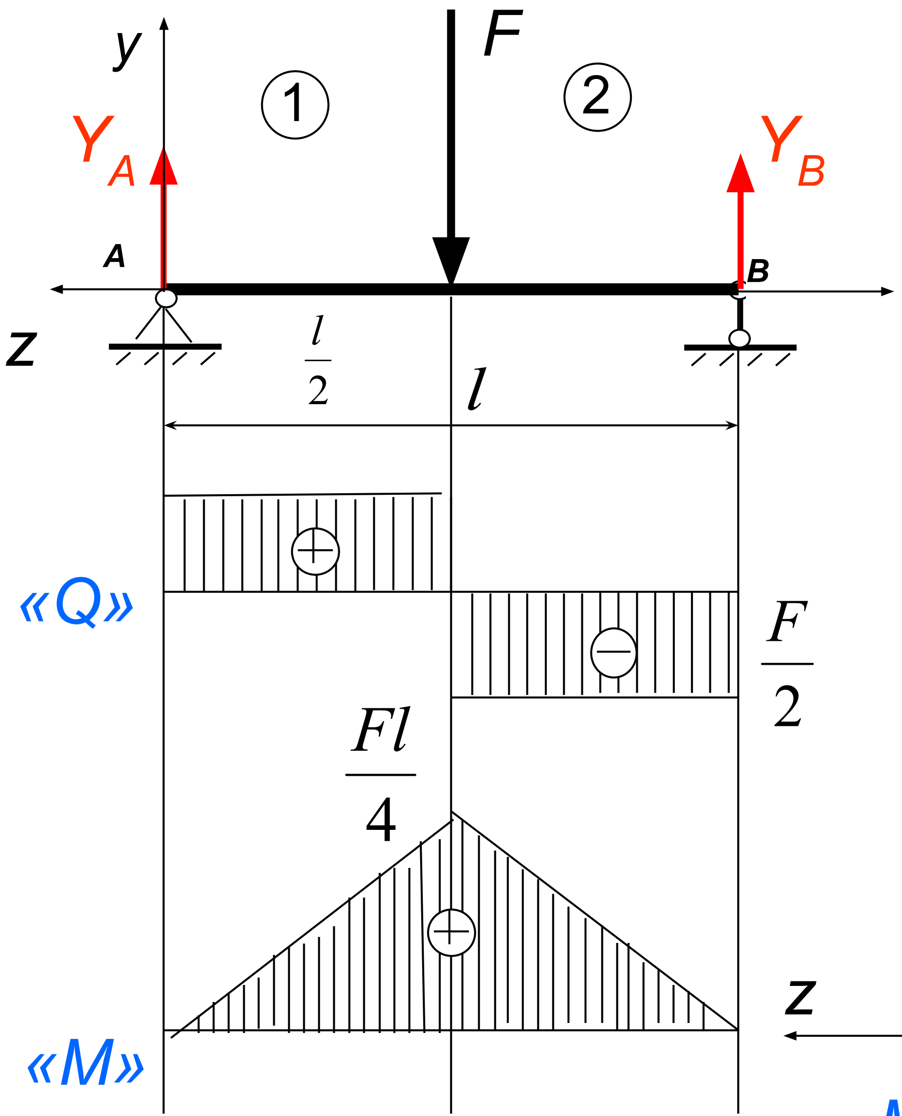
(2) $Y_A = \dfrac{F}{2}$

Проверка

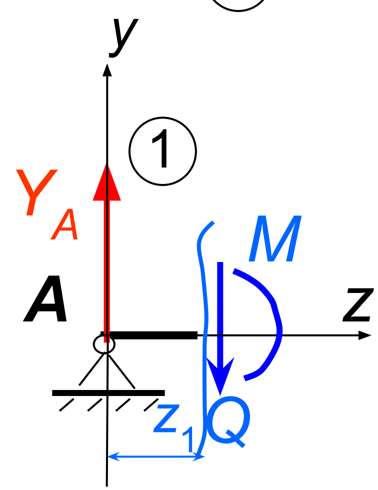
(3) $Y_A + Y_B - F = 0$

$0 = 0$

ИЗГИБ



Участок 1 $\quad z_1=0;\quad z_1=\frac{l}{2}$



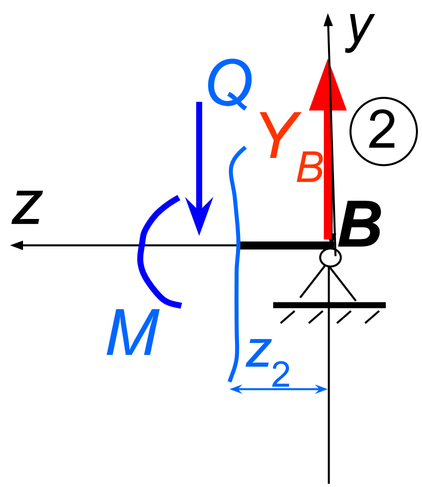
$$Q_{z1} = Y_A = \frac{F}{2};$$

$$M_{z1} = Y_A \cdot z_1$$

$$M_{z1=\frac{l}{2}} = \frac{F}{2}\frac{l}{2} = \frac{Fl}{4};$$

Участок 2 $\quad z_2=0;\quad z_2=\frac{l}{2}$

Начало координат в т. *B*

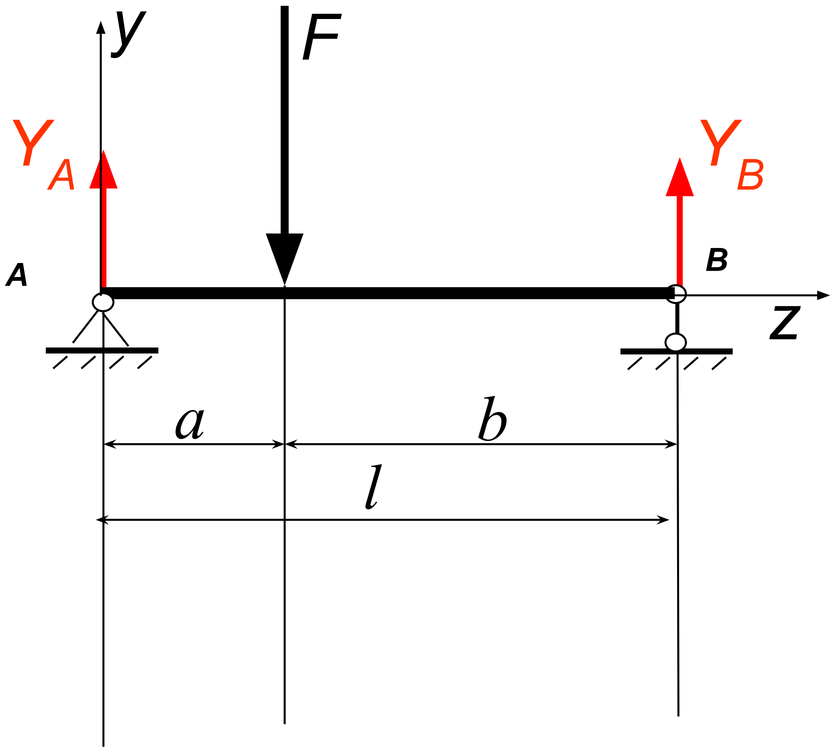


$$Q_{z2} = -Y_B = -\frac{F}{2}$$

$$M_{z2} = Y_B \cdot z_2$$

$$M_{z2=\frac{l}{2}} = \frac{F}{2}\frac{l}{2} = \frac{Fl}{4};$$

ИЗГИБ



Определение реакций

$$\Sigma M_{(A)}=0;\ Y_B \cdot l - F \cdot a = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma M_{(B)}=0;\ -Y_A \cdot l + F \cdot b = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad (3)$$

(1) $\boxed{Y_B = \frac{Fa}{l}}$

(2) $\boxed{Y_A = \frac{Fb}{l}}$

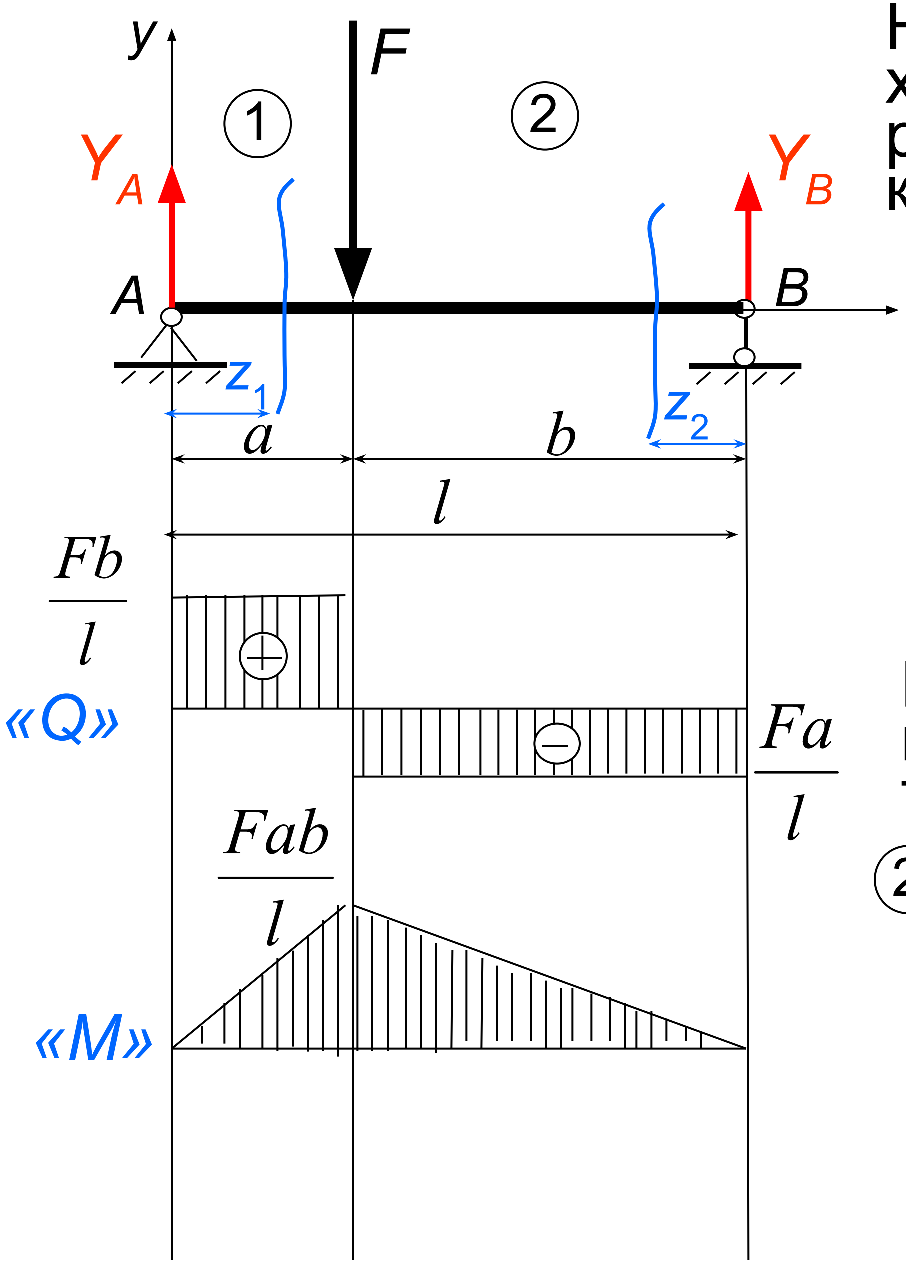
Проверка

(3) $Y_A + Y_B - F = 0$

$$\frac{Fb}{l} + \frac{Fa}{l} - F = 0$$

$$0 = 0$$

ИЗГИБ



На балке 2 участка с разным характером нагружения: 1-й рассматривается при начале координат в точке *A*.

1 $z_1 = 0; \quad z_1 = a$

$$Q_{z1} = Y_A = \frac{Fb}{l};$$

$$M_{z1} = Y_A \cdot z_1$$

$$M_{z1=0} = 0; \qquad M_{z1=a} = \frac{Fab}{l}$$

При рассмотрении 2-го участка начало координат переносится в точку *B*

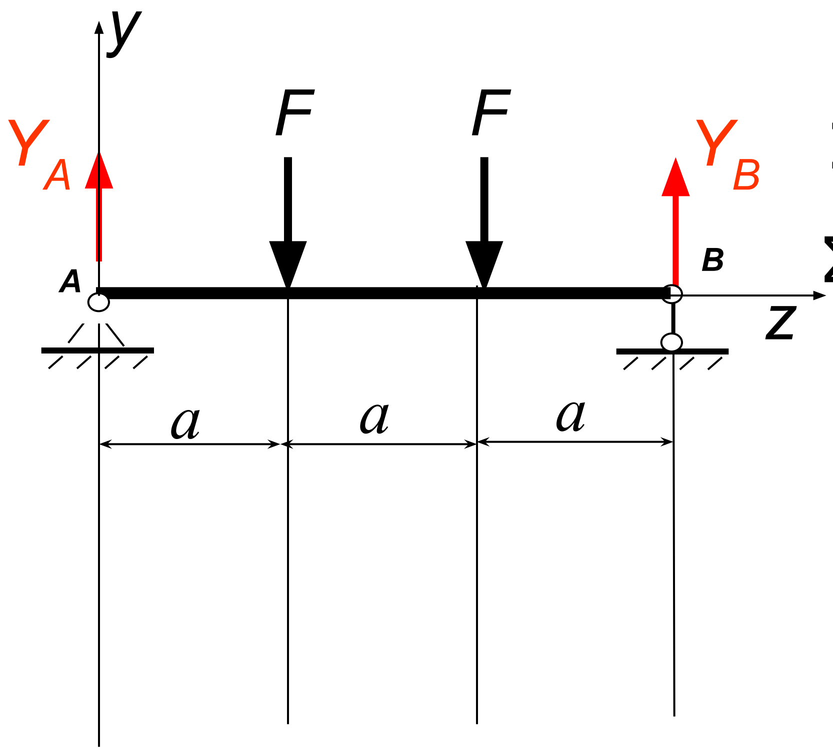
2 $z_2 = 0; \quad z_2 = b.$

$$Q_{z2} = -Y_B = -\frac{Fa}{l};$$

$$M_{z2} = Y_B \cdot z_2$$

$$M_{z2=0} = 0; \qquad M_{z2=b} = \frac{Fab}{l}$$

ИЗГИБ



Определение реакций

$$\Sigma M_{(A)}=0;\ Y_B\cdot 3a - F\cdot a - F\cdot 2a = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma M_{(B)}=0;\ -Y_A\cdot 3a + F\cdot a + F\cdot 2a = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad (3)$$

(1) $\boxed{Y_B=F}$

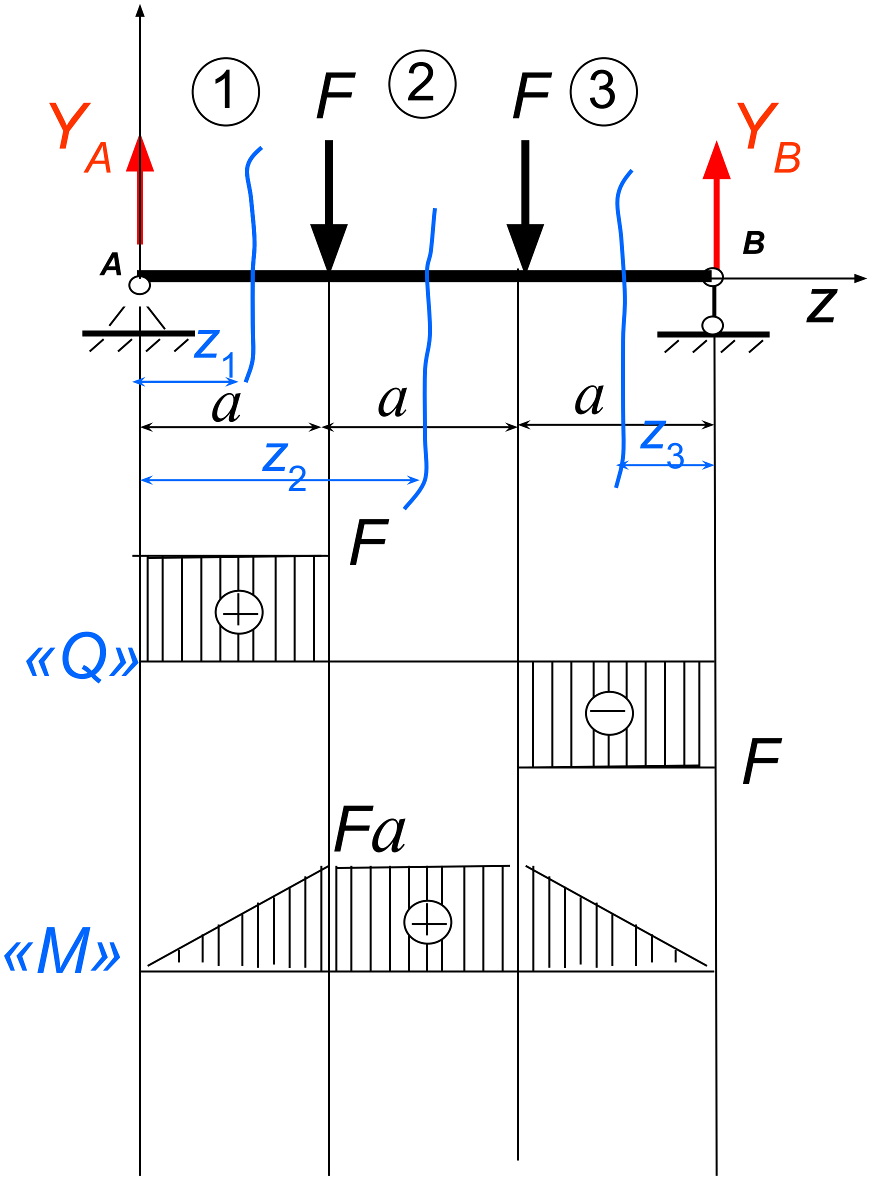
(2) $\boxed{Y_A=F}$

Проверка

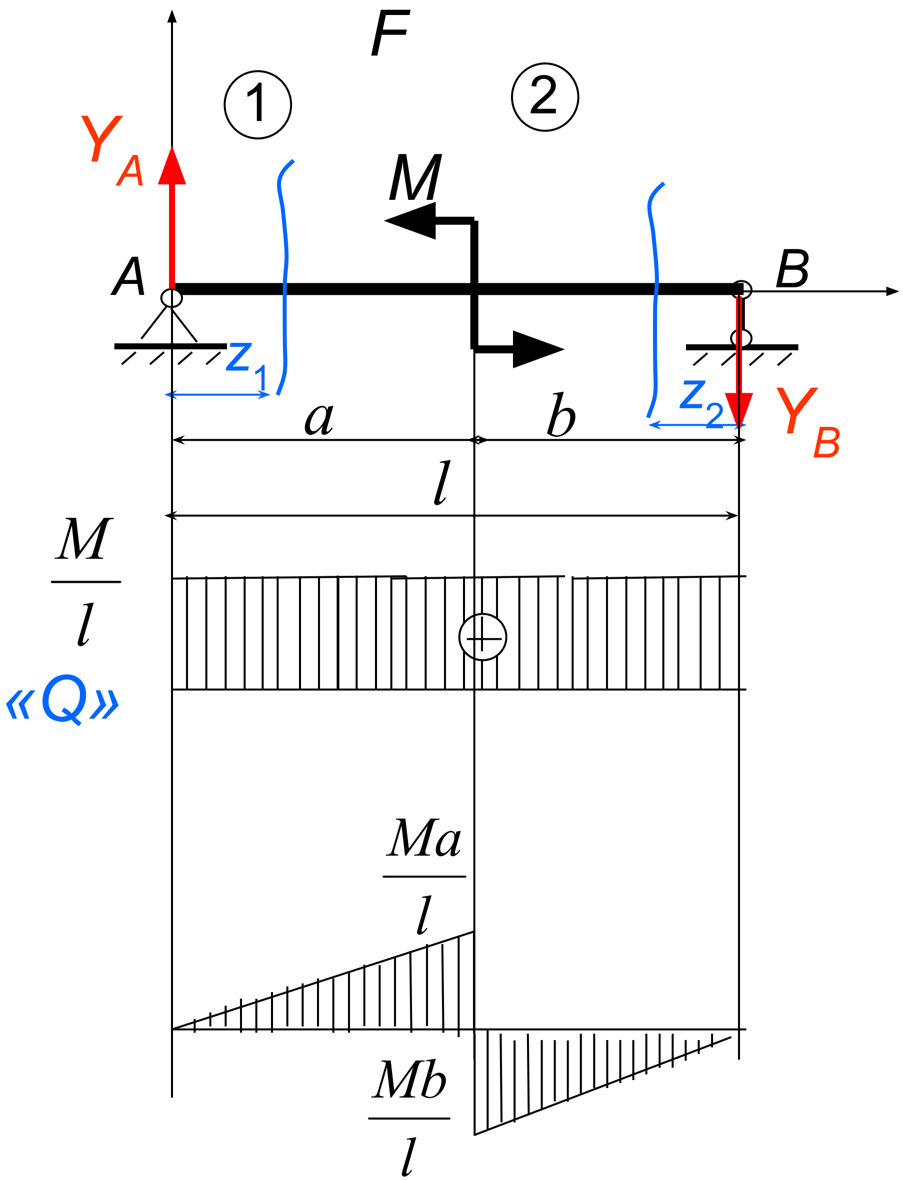
(3) $Y_A+Y_B - 2F = 0$

$F + F - 2F = 0$

$0 = 0$



1
F
2
F
3
Y_A
Y_B
A
B
Z
z_1
a
a
a
z_2
z_3
F
«Q»
F
Fa
«M»


F
1
2
Y_A
M
A
B
z_1
z_2
Y_B
a
b
l
$\frac{M}{l}$
«Q»
$\frac{Ma}{l}$
$\frac{Mb}{l}$

Контрольные правила для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

1. На концевых **шарнирных опорах** Q_z равны реакциям, а M_z равны нулю, если на опорах не приложены пары с моментами M.

2. На участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка, поперечная сила **постоянна**, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

3. На участках, где приложена **равномерно распределенная нагрузка**, эпюра Q_z изменяется по закону **прямой наклонной линии**, а эпюра M_z - по закону **квадратичной параболы**.

4.В том сечении, где **эпюра** Q_z пересекается с осевой линией, на эпюре M_z наблюдается **экстремальное значение момента** (вершина параболы)

5. В тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы (включая реакции), на эпюре Q_z наблюдаются **скачки** (перепады) на величину этих сил, а на эпюре M_z - переломы смежных линий.

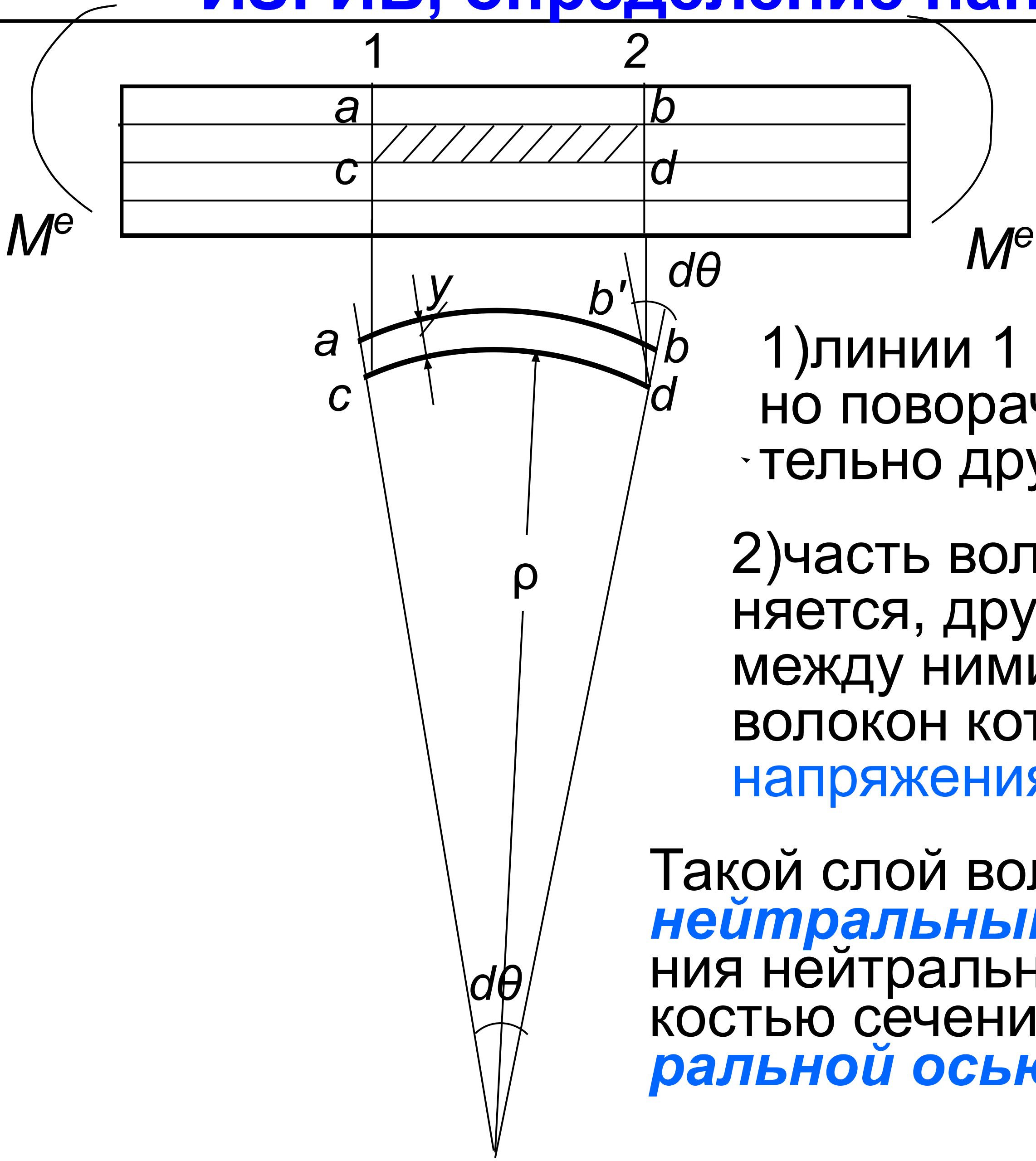
Контрольные правила для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

6. В тех сечениях, где приложены пары с моментами M, на эпюре M_z наблюдаются скачки на величину этих моментов.

7. На свободном конце консольной балки поперечная сила Q_z равна нулю, если в этом месте не приложена сосредоточенная сила; и изгибающий момент M_z равен нулю, если в этом месте не приложена внешняя пара с моментом M

8. В жесткой заделке консольной балки $\boldsymbol{Q_z}$ равна **реакции**, а изгибающий момент $\boldsymbol{M_z}$ равен реактивному моменту заделки.

ИЗГИБ, определение напряжений



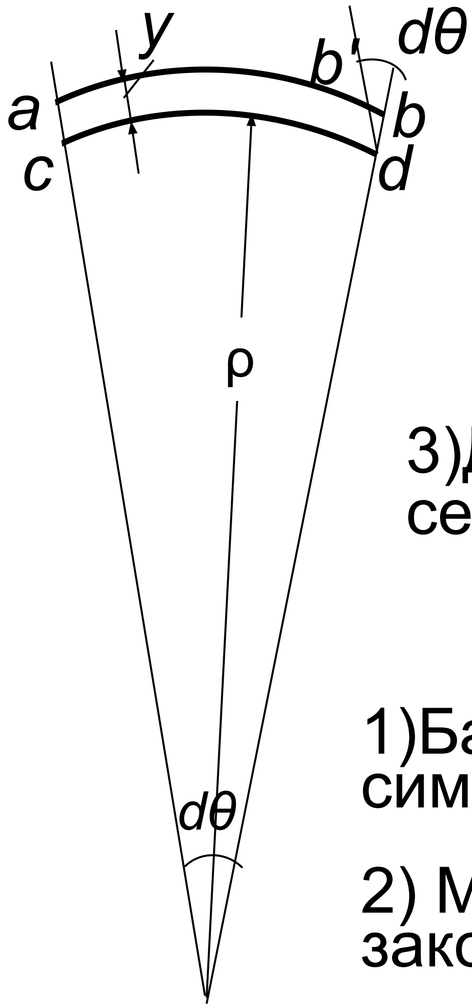
Экспериментально доказано, что при чистом изгибе:

1)линии 1 и 2 остаются прямыми, но поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол

2)часть волокон при изгибе удлиняется, другая – укорачивается, между ними есть слой, длина волокон которого не меняется, напряжения в них отсутствуют

Такой слой волокон называется ***нейтральным,*** а линия пересечения нейтральных волокон с плоскостью сечения называется ***нейтральной осью***

ИЗГИБ, определение напряжений



Допущения

1)Плоское поперечное сечение остается плоским

2)Продольные волокна друг на друга не давят, т. е находятся в линейном напряженном состоянии

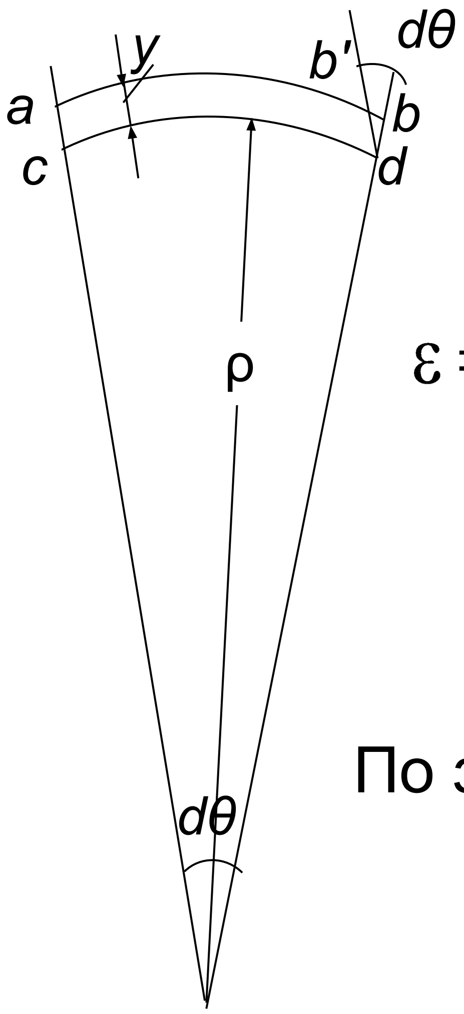
3)Деформации волокон по ширине сечения одинаковы

Ограничения

1)Балка должна иметь хотя бы одну ось симметрии

2) Материал балки должен подчиняться закону Гука

ИЗГИБ, определение напряжений



Определение нормальных напряжений

Геометрическая сторона

$bb' = y d\theta$ - удлинение волокна *ab*

$$\varepsilon = \frac{bb'}{cd} = \frac{y d\theta}{\rho d\theta}$$ -относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

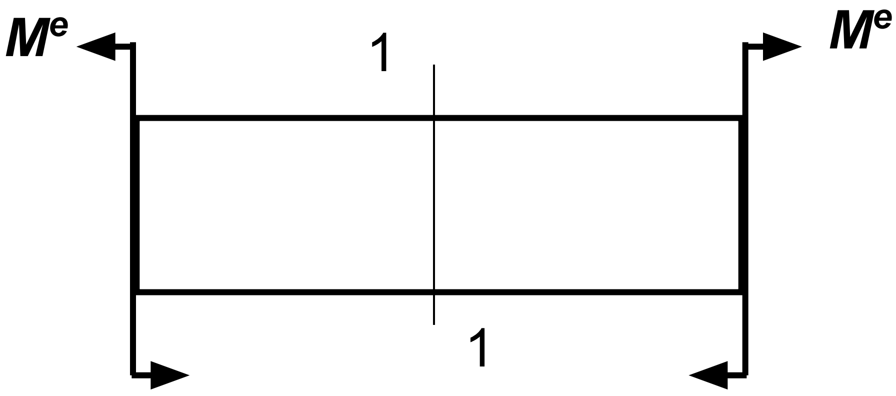
Физическая сторона

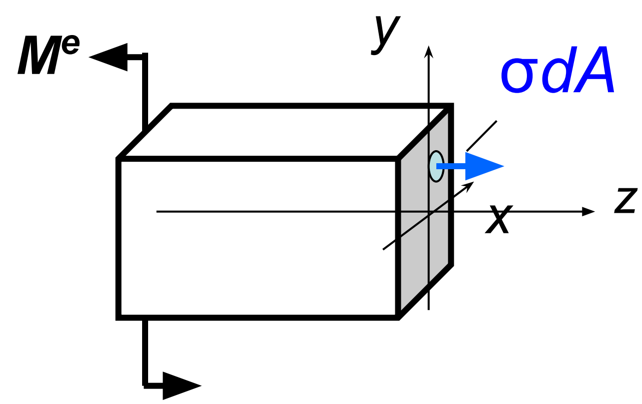
По закону Гука $$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho} \qquad \boxed{\sigma = \frac{yE}{\rho}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{\rho}}$$

ИЗГИБ, определение напряжений

Статическая сторона задачи





σdA – элементарная продольная сила

Уравнения равновесия:

$\Sigma F_{kx}=0$ (1)
$\Sigma F_{ky}=0$ (2)
$\Sigma F_{kz}=0$ (3)

$\Sigma M_x=M^e-\int\sigma dAy=0$ (4)
$\Sigma M_y=-\int\sigma dAx=0$ (5)
$\Sigma M_z=0$ (6)

ИЗГИБ, определение напряжений

Из (3) $\int \sigma dA=0$, подставляя значение $\sigma = \frac{yE}{\rho}$, получаем

$$\frac{E}{\rho}\int_A y dA = 0$$

$$\frac{E}{\rho} \neq 0; \qquad \int_A y dA = 0$$

$$S_x = \int_A y dA = 0$$

Вывод: Статический момент относительно оси *x* равен нулю, значит оси сечения являются централь-ными

Из (5), подставляя значение σ, получаем

$$\frac{E}{\rho}\int_A ydAx = 0$$

$$\frac{E}{\rho} \neq 0; \qquad \int_A xydA = 0$$

$$I_{xy} = \int_A xydA = 0$$

Вывод: Центробежный момент инерции равен 0, значит оси - главные

ИЗГИБ, определение напряжений

Из (4), подставляя значение σ, получаем

$$\frac{\sigma}{y} I_x = M^e$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M^e y}{I_x}}$$

Определение напряжений при изгибе

После преобразований получены следующие выводы

1)Нейтральная ось проходит через центр сечения

2)Нейтральная ось является главной осью инерции и перпендикулярна силовой плоскости

3)Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}$$

4)Касательные напряжения определяются по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{I_x b}$$

I_x-осевой момент инерции;
W_x-момент сопротивления;
$S_x^{\text{отс}}$-статический момент отсеченной части;
b-ширина сечения

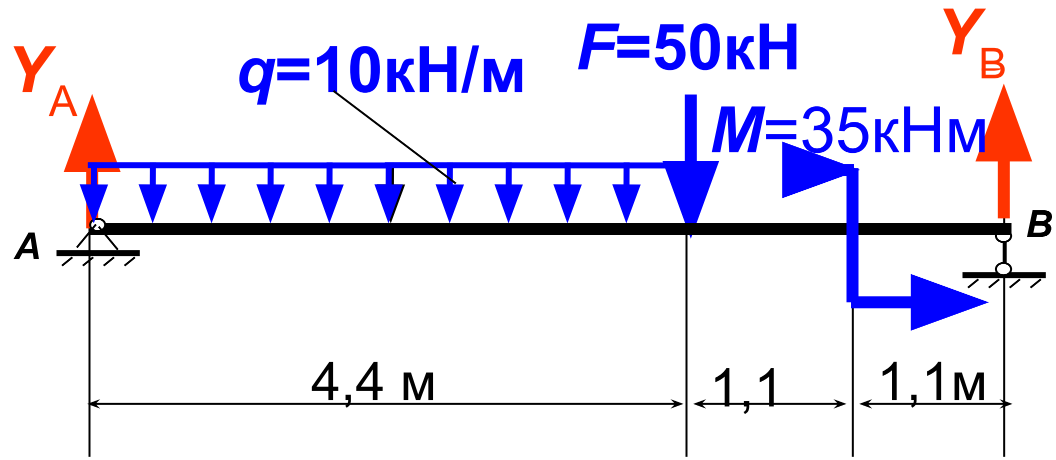
ИЗГИБ Пример выполнения задания

Расчет балки на прочность

Для расчетной схемы балки необходимо:
1. Построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
2. Подобрать поперечное сечение балки двутаврового профиля, материал Сталь 3 σ_{adm} = 160 МПа, τ_{adm} = 96 МПа.

ИЗГИБ Пример выполнения задания

1. Вычерчиваем балку в масштабе с указанием размеров и нагрузок



2.Определяем реакции опор из уравнений равновесия

$\Sigma \boldsymbol{M}_{(A)}=0; \quad \boldsymbol{M} - \boldsymbol{q}\cdot 4{,}4\cdot 2{,}2 - \boldsymbol{F}\cdot 4{,}4 + \boldsymbol{Y}_B\cdot 6{,}6 = 0;$

$\boldsymbol{Y}_B = (-\boldsymbol{M} + \boldsymbol{q}\cdot 4{,}4\cdot 2{,}2 + \boldsymbol{F}\cdot 4{,}4)/6{,}6 = 42{,}7$ кН.

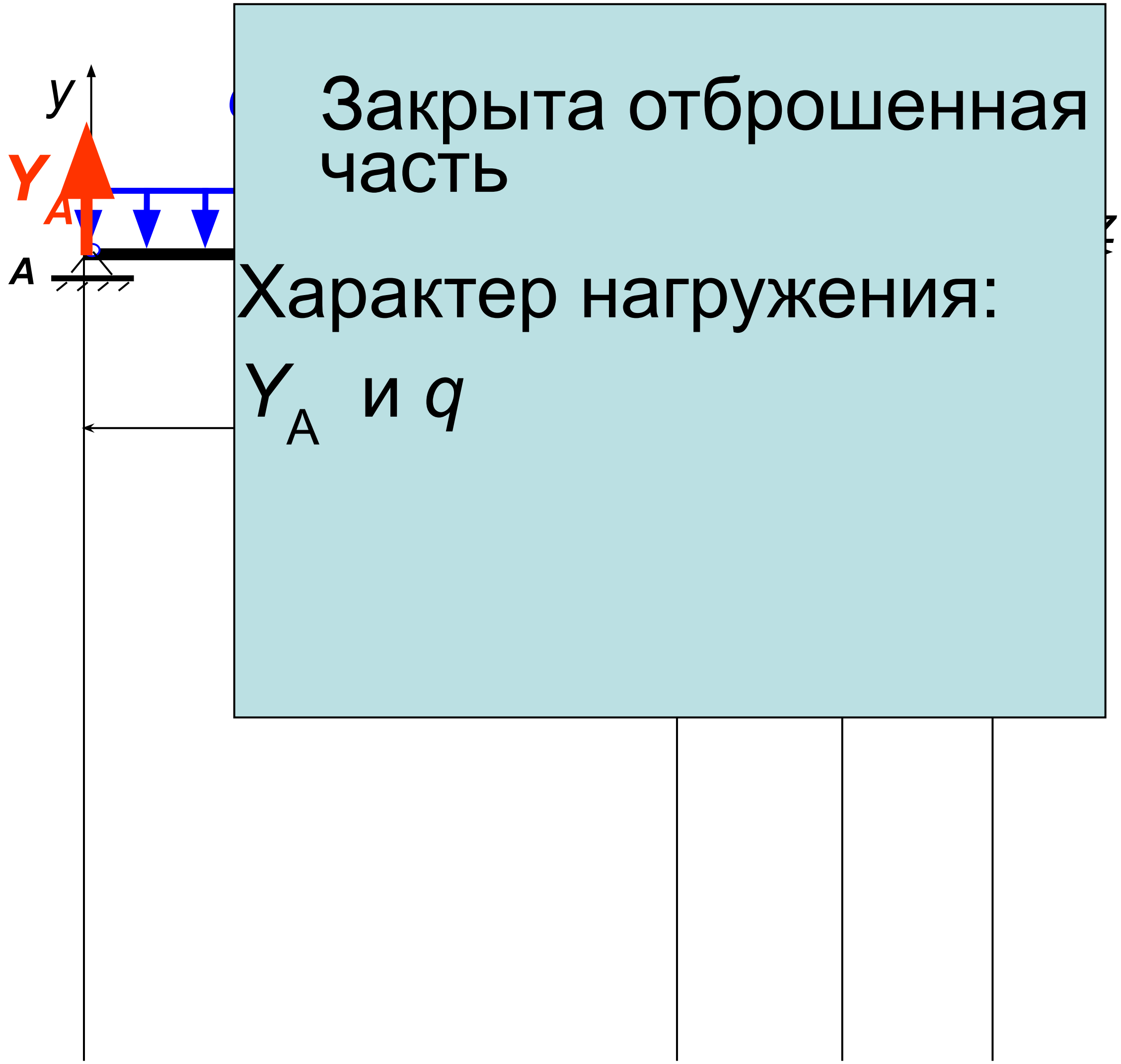
$\Sigma \boldsymbol{M}_{(B)}=0; \quad \boldsymbol{M} + \boldsymbol{q}\cdot 4{,}4\cdot 4{,}4 + \boldsymbol{F}\cdot 2{,}2 - \boldsymbol{Y}_A\cdot 6{,}6 = 0;$

$\boldsymbol{Y}_A = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{q}\cdot 4{,}4\cdot 4{,}4 + \boldsymbol{F}\cdot 2{,}2)/6{,}6 = 51{,}3$ кН.

<u>Проверка</u> $\quad \Sigma \boldsymbol{Y}=0; \quad \boldsymbol{Y}_A + \boldsymbol{Y}_B - \boldsymbol{q}\cdot 4{,}4 - \boldsymbol{F} = 0;$

$51{,}3 + 42{,}7 - 44 - 50 = 0 \qquad 0=0.$

ИЗГИБ Пример выполнения задания

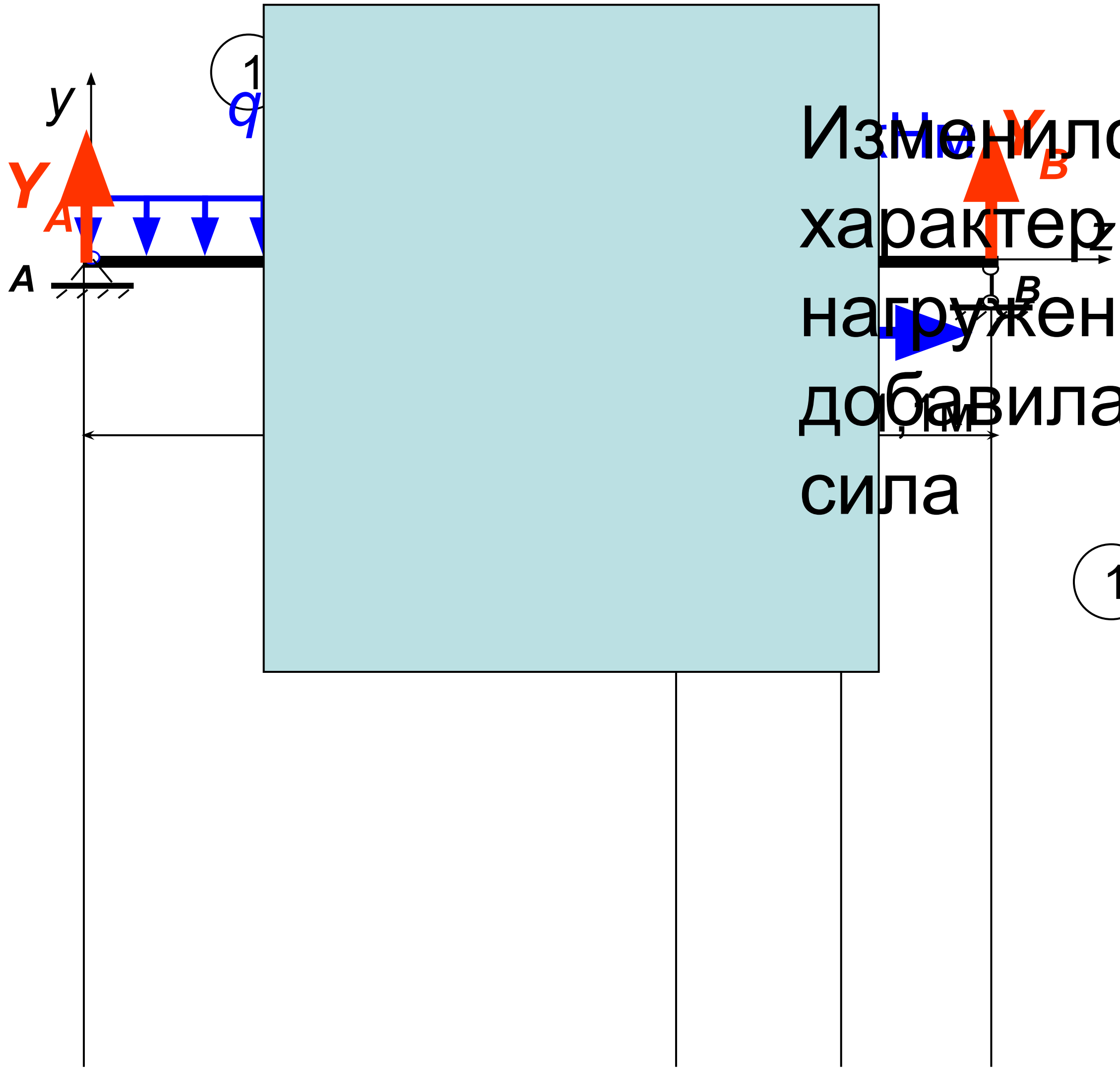


Закрыта отброшенная часть

Характер нагружения:

Y_A и q

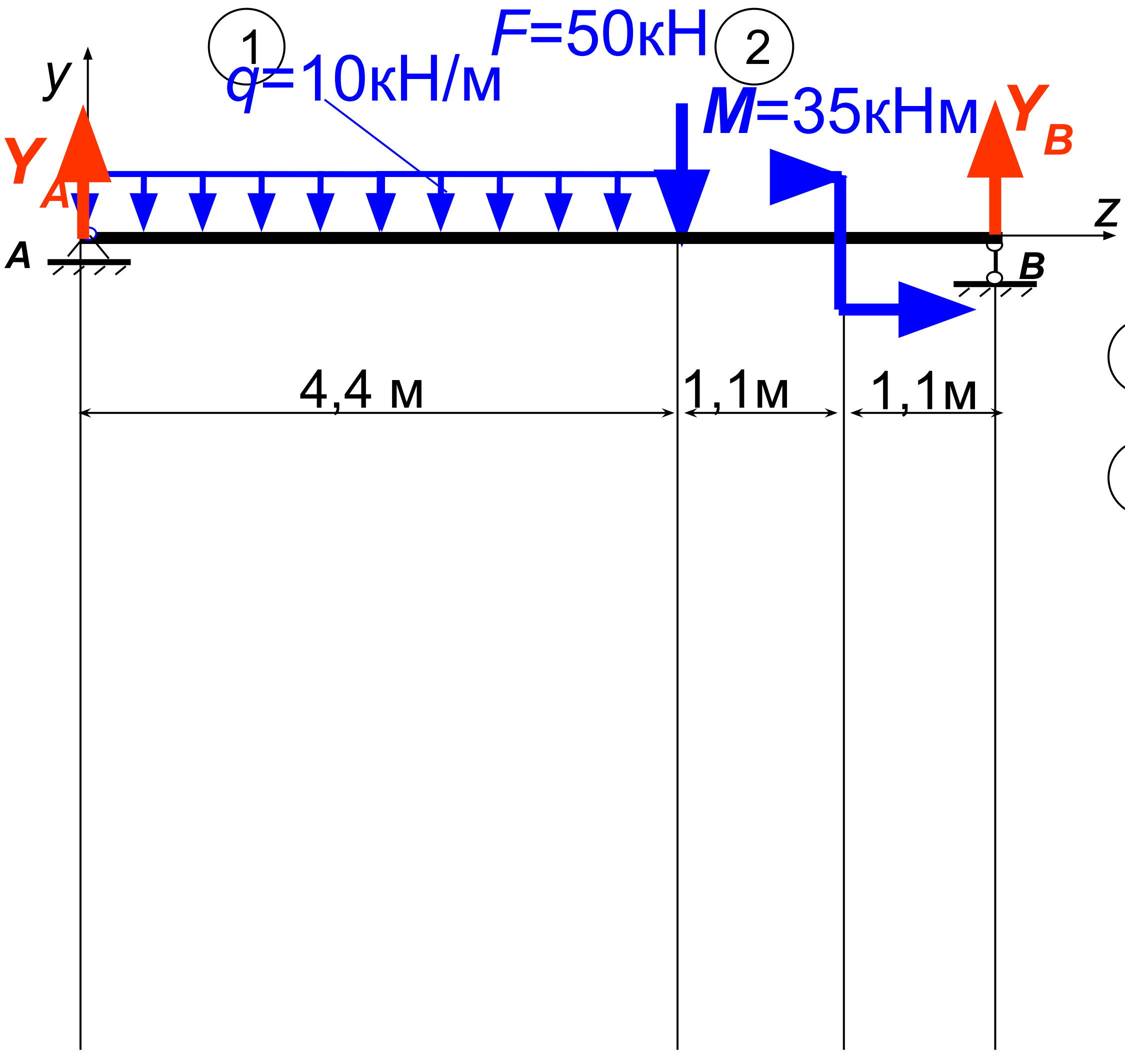
3.Определяем количество участков и их границы.



Изменился характер нагружения, добавилась сила

1 $z_1=0$; $z_1=4{,}4$ м;

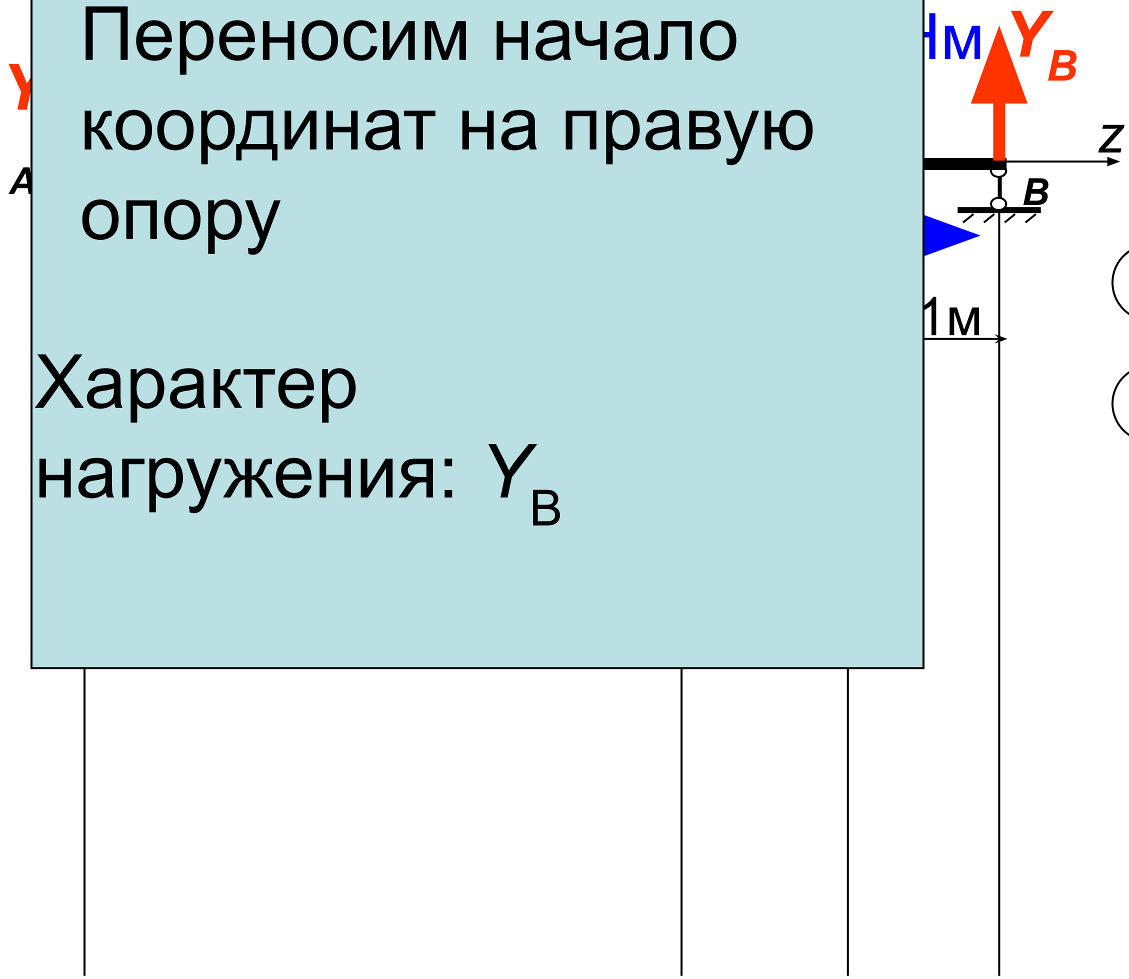
ИЗГИБ Пример выполнения задания



1 $z_1=0;\ z_1=4{,}4$ м;

2 $z_2=4{,}4$м; $z_2=5{,}5$м;

ИЗГИБ Пример выполнения задания

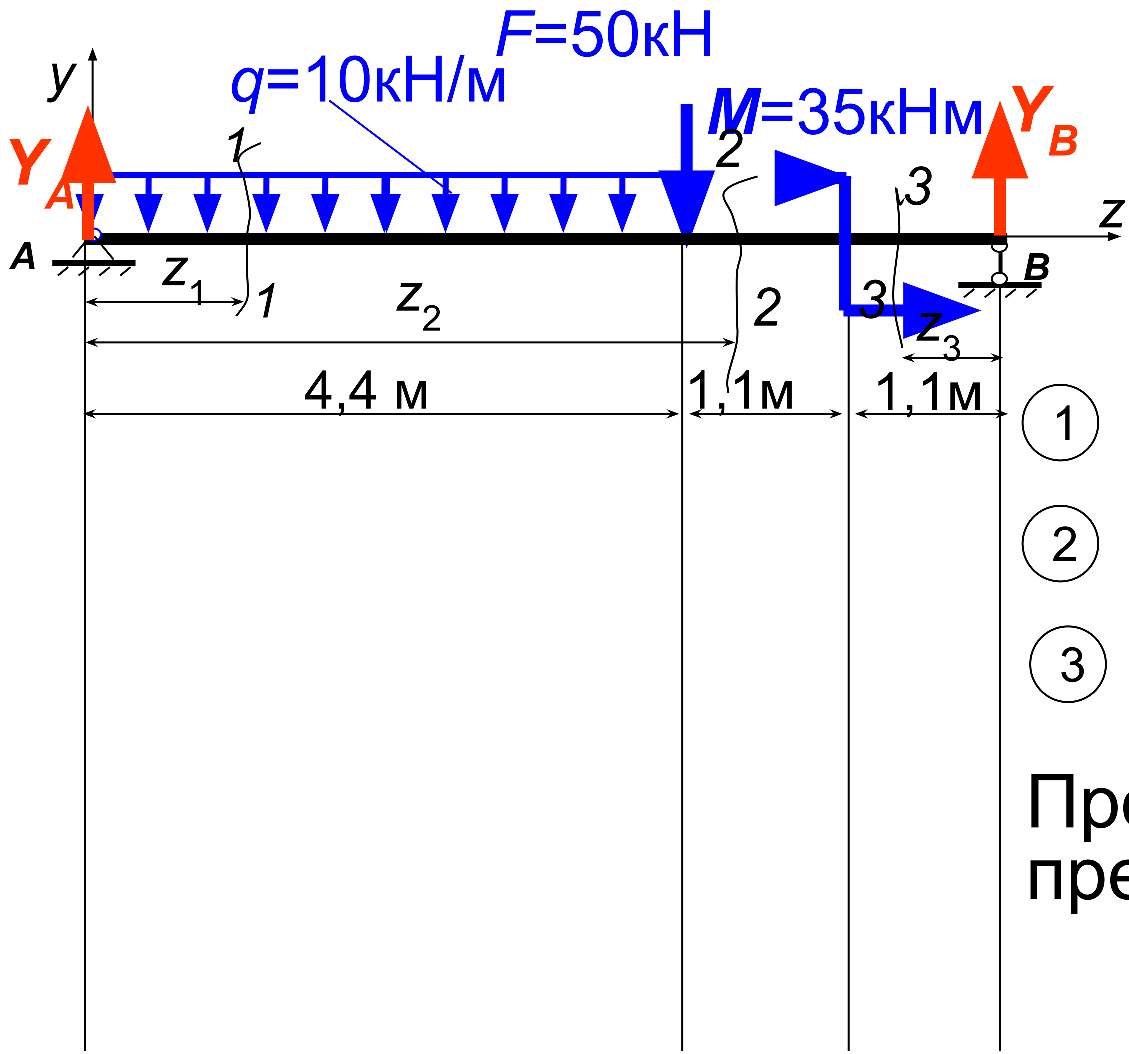


Переносим начало координат на правую опору

Характер нагружения: Y_B

① $z_1=0$; $z_1=4{,}4$ м;

② $z_2=4{,}4$м; $z_2=5{,}5$м;



① $z_1=0;\ z_1=4{,}4$ м;

② $z_2=4{,}4$м; $z_2=5{,}5$м;

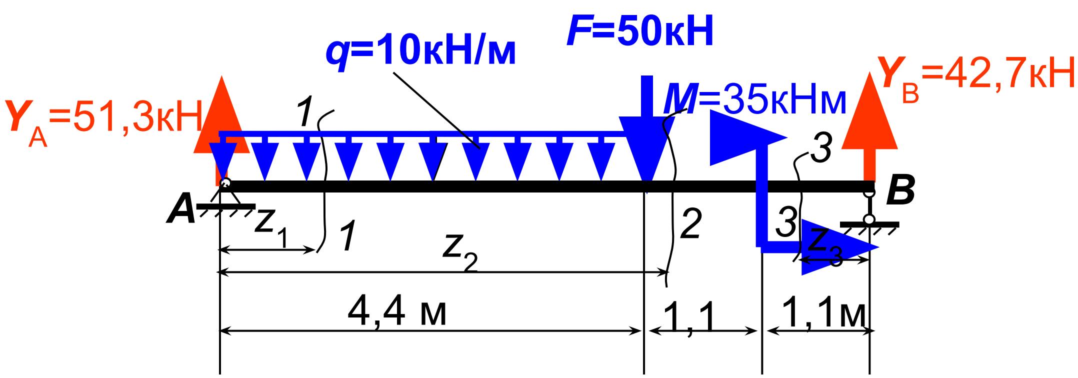
③ $z_3=0;\ z_3=1{,}1$м;

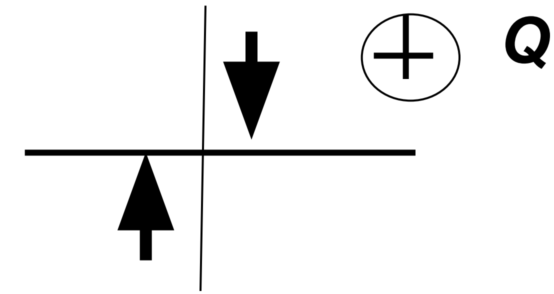
Проводим сечения в пределах участков

ИЗГИБ Пример выполнения задания

Начало координат на левой стороне балки для сечений 1-1 и 2-2, для сечения 3-3 - на правой стороне.

Запишем аналитические выражения для ***Q*** в каждом сечении и рассчитаем значения на концах сечений:



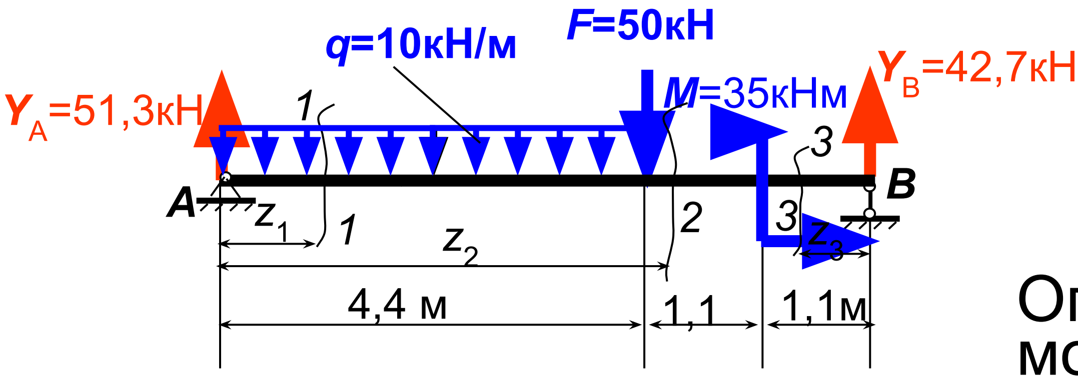


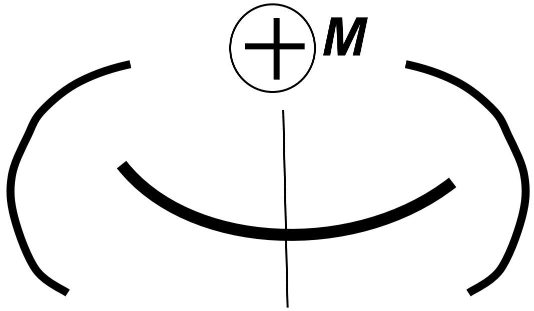
$Q_{z1} = Y_A - q \cdot z_1$; $Q_{z1=0} = 51{,}3$ кН; $Q_{z1=4,4} = 7{,}3$ кН.

$Q_{z2} = Y_A - q \cdot 4{,}4 - F$; $Q_{z2=4,4} = -42{,}7$ кН. $Q_{z2=5,5} = -42{,}7$ кН.

$Q_{z3} = -Y_B$; $Q_{z3=0} = -42{,}7$ кН; $Q_{z3=1,1} = -42{,}7$ кН.

ИЗГИБ Пример выполнения задания





Определяем изгибающие моменты:

$$\underline{M_{z1} = Y_A \cdot z_1 - q \cdot z_1^2/2;}$$

$M_{z1=0}$=0; $\qquad$ $M_{z1=4,4}$=128,92 кНм.

$$\underline{M_{z2} = Y_A \cdot z_2 - q \cdot 4,4 \cdot (z_2 - 2,2) - F(z_2 - 4,4);}$$

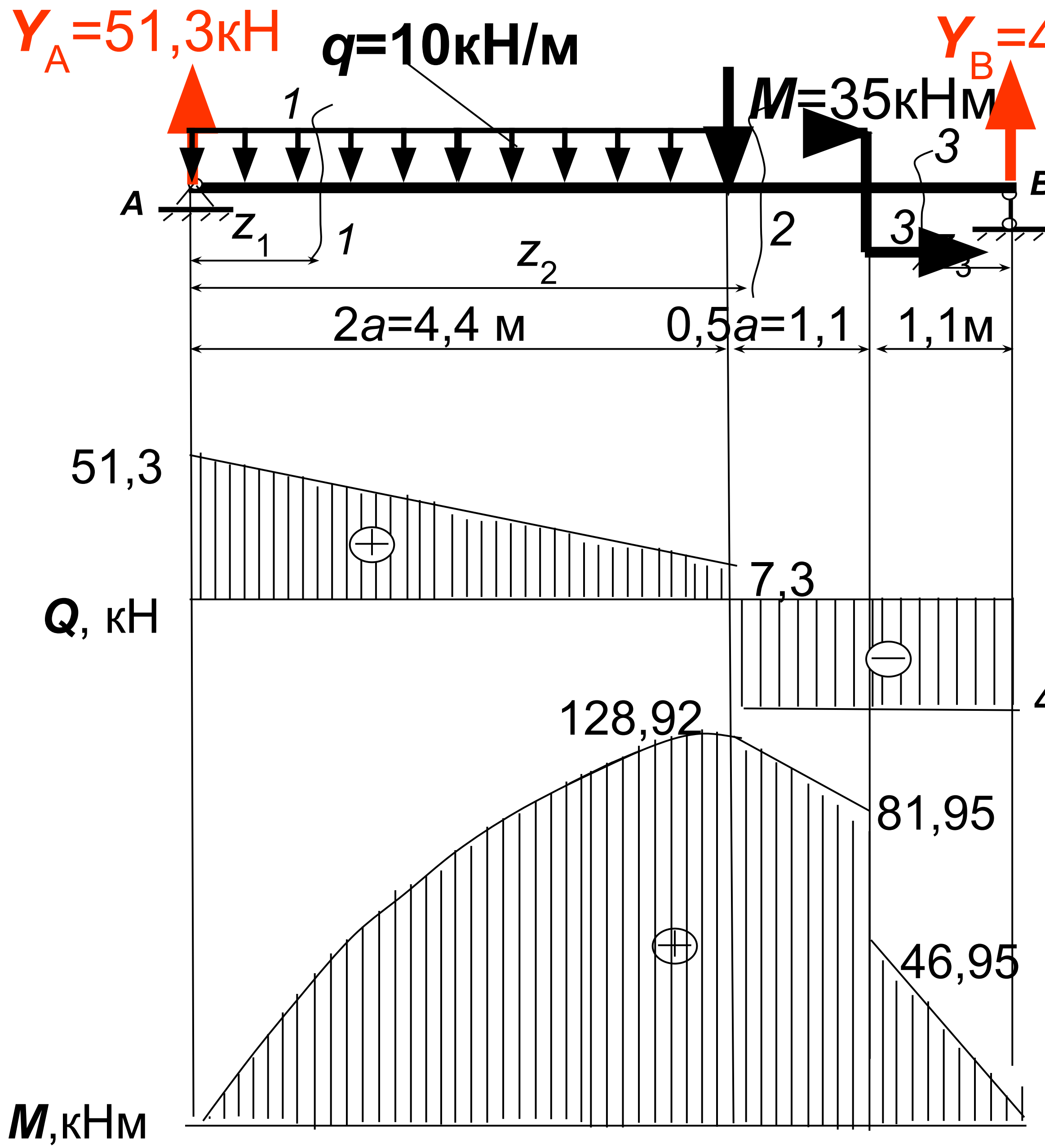
$M_{z2=4,4}$=51,3·4,4 - 10·4,4·2,2-50(4,4-4,4)=128,92 кНм;

$M_{z2=5,5}$=51,3·5,5 - 10·4,4·3,3-50(5, 5-4,4)= 81,95 кНм;

$$\underline{M_{z3} = Y_B z_3}$$

$M_{z3=0}$=0; $\qquad$ $M_{z3=1,1}$=46,95 кНм.

ИЗГИБ Внутренние усилия Примеры



Выбираем масштаб и откладываем положительные значения ординат эпюр от нулевой линии вверх, а отрицательные - вниз.

Опасное сечение - сечение с изгибающим моментом, равным 128,92 кНм.

ИЗГИБ Пример выполнения задания

Подбор сечения двутаврового профиля выполняем из условия прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_x}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{adm}$$

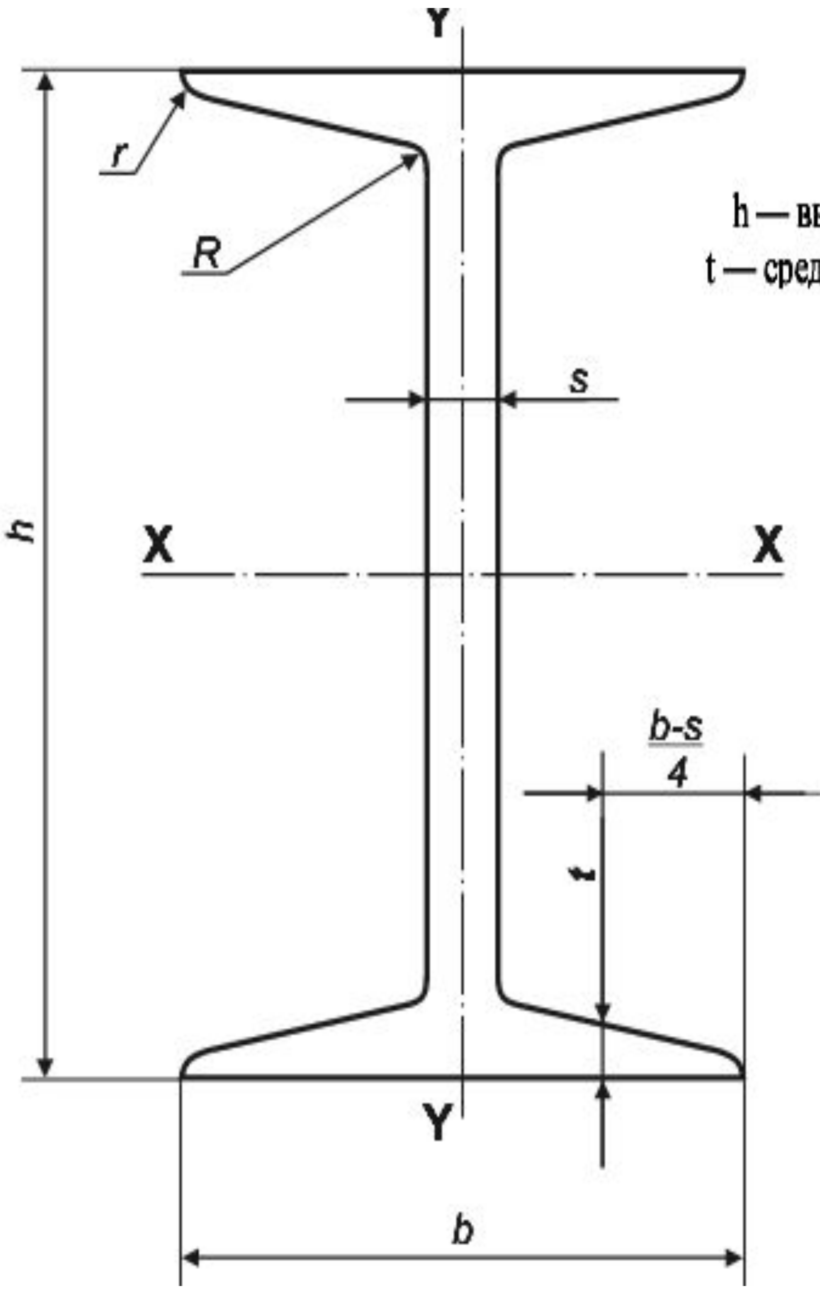
откуда

$$\boxed{W_{\text{н.о.}} \ge \frac{M_x}{\sigma_{adm}}}$$

где $W_{\text{н.о.}}$ – момент сопротивления относительно нейтральной оси, которая в сечении балки совпадает с осью x

$$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{128{,}92 \cdot 10^{-3}}{160} = 8{,}05 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3 = 805\ \text{см}^3$$

Сортамент ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ



h — высота двутавра; b — ширина полки; s — толщина стенки;
t — средняя толщина полки; R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки.

Т

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей					
									X-X				Y-	
	h	b	s	t	R	r			I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W
					не более									
	мм													
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182

ИЗГИБ Пример выполнения задания

а) Проверка по рабочим нормальным напряжениям:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{128{,}92 \cdot 10^{-3}}{953 \cdot 10^{-6}} = 135{,}3\text{МПа} \leq \sigma_{adm}$$

т. е. условие прочности выполняется.

ИЗГИБ Пример выполнения задания

б) Проверка по максимальным касательным напряжениям:

$$\tau = \frac{Q_{max} \cdot S_{\text{н.о.}}^{\text{отс}}}{I_{\text{н.о.}} b}$$

S_x - статический момент отсеченной (верхней части) относительно оси *x* в сечении;

I_x - момент инерции сечения,
b – толщина стенки, для двутавра *b*=*s*;

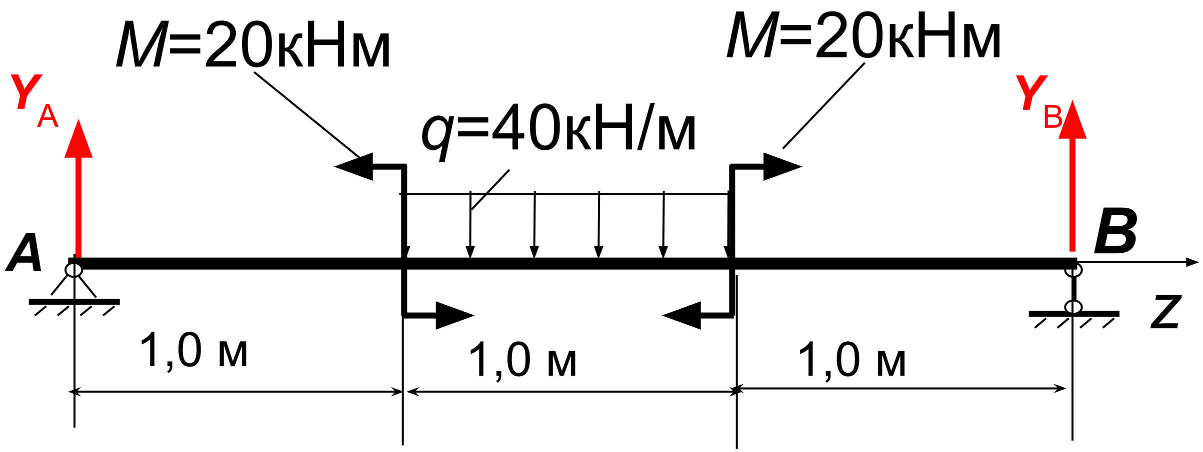
$$\tau = \frac{51{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-3}} = 17{,}7\,\text{МПа}$$ <96 МПа

условие прочности по касательным напряжениям также выполняется.

Пример №2 решения задачи на изгиб

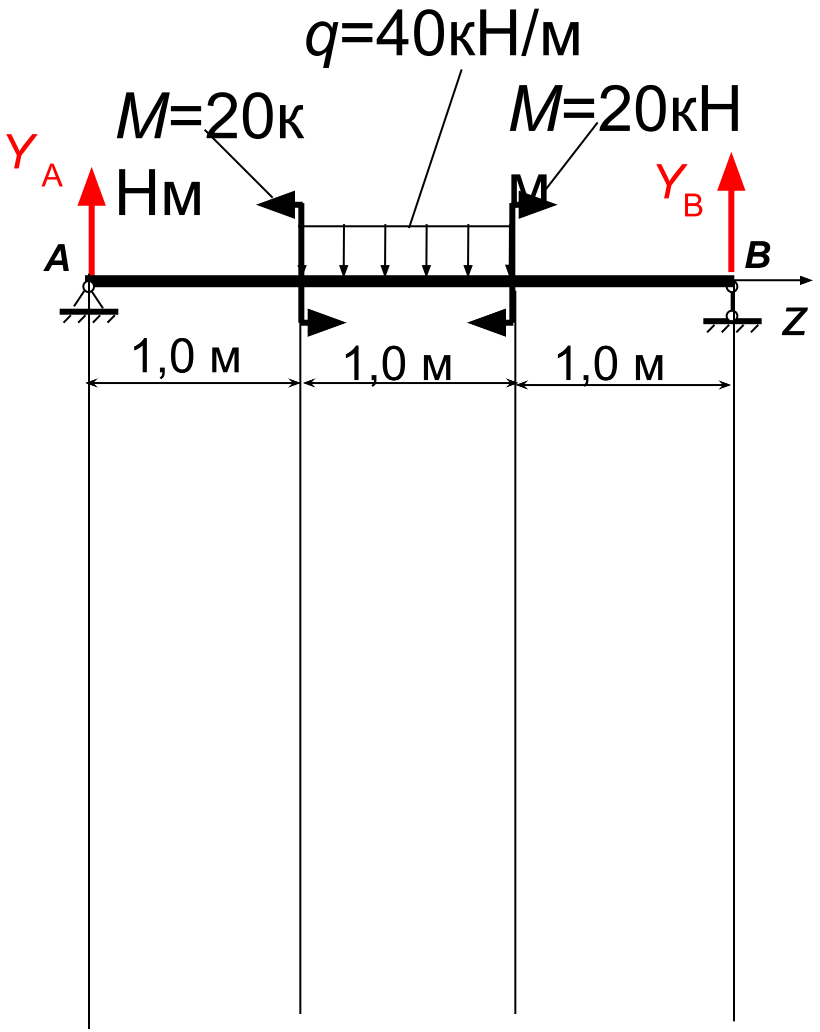
Расчет балки на прочность

Для расчетной схемы балки необходимо:
1. Построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
2. Подобрать поперечное сечение балки двутаврового профиля, материал Сталь 3 при $\sigma_{adm} = 160$, $\tau_{adm} = 96$ МПа.
3. Подобрать прямоугольное поперечное сечение балки, материал – дерево, $\sigma_{adm} = 10$ МПа.

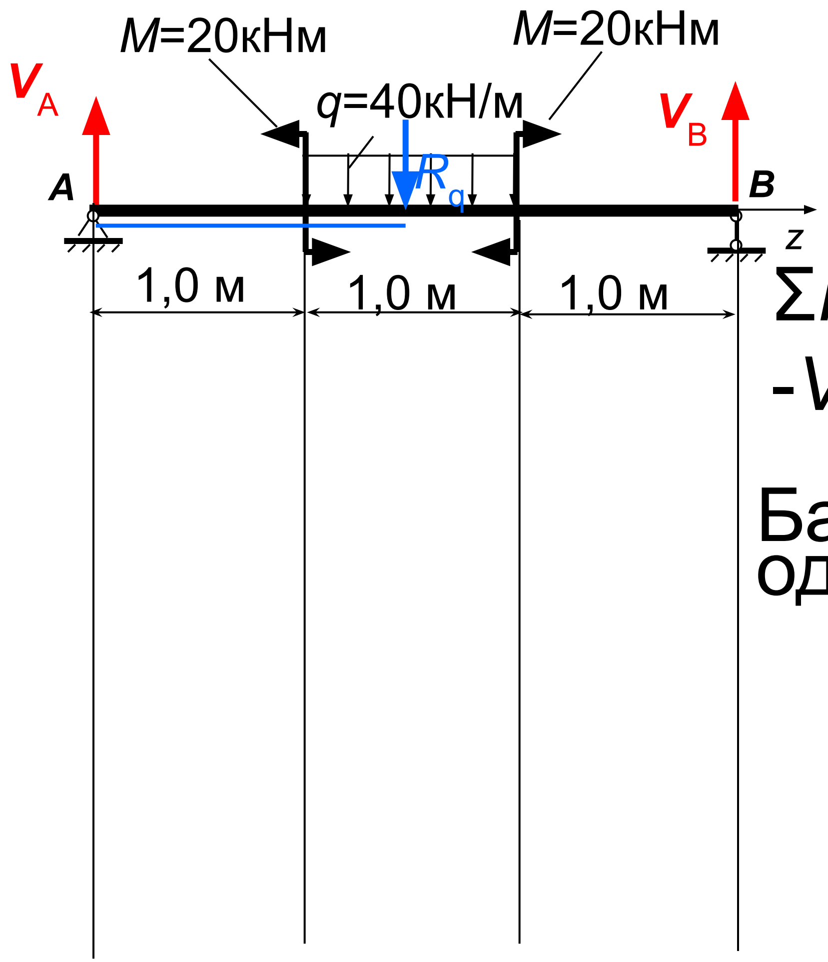


Пример решения задачи на изгиб

1. Вычерчиваем балку в масштабе с указанием размеров и нагрузок



2. Определяем реакции, рассматривая условие равновесия



$$\Sigma M_{(A)} = 0;\ V_B \cdot 3 + M - M - q \cdot 1 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$V_B = q \cdot 1 \cdot 1{,}5/3 = 40 \cdot 0{,}5 = 20\text{кН}.$$

$$V_B = 20\ \text{кН}.$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0;$$

$$-V_A \cdot 3 + M - M + q \cdot 1 \cdot 1{,}5 = 0;$$

$$V_A = 20\ \text{кН}$$

Балка симметричная, реакции одинаковы.

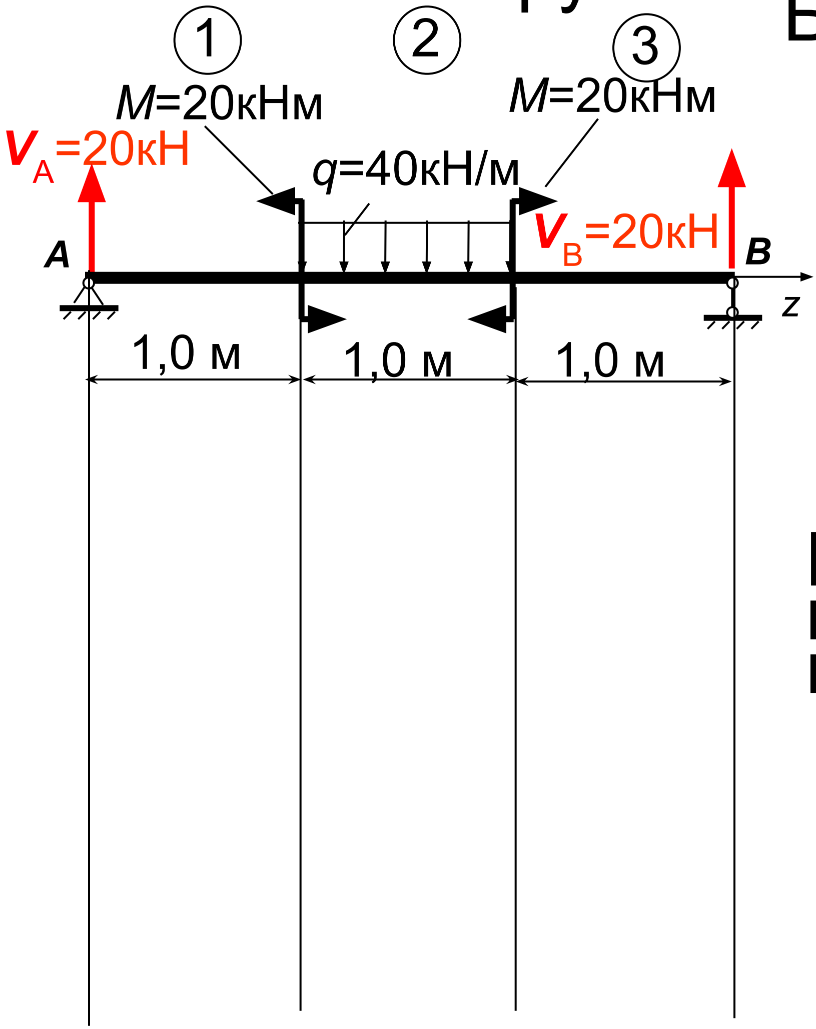
Проверка

$$\Sigma У = 0;\quad V_A + V_B - q \cdot 1 = 0;$$

$$20 + 20 – 40 = 0;$$

$$0 = 0.$$

3. Балка разбивается на участки со своим законом изменения нагрузки



Балку разбиваем на 3 участка

1-й участок:

$$0 \le z_1 \le 1м$$

2-й участок:

$$1м \le z_2 \le 2\ м$$

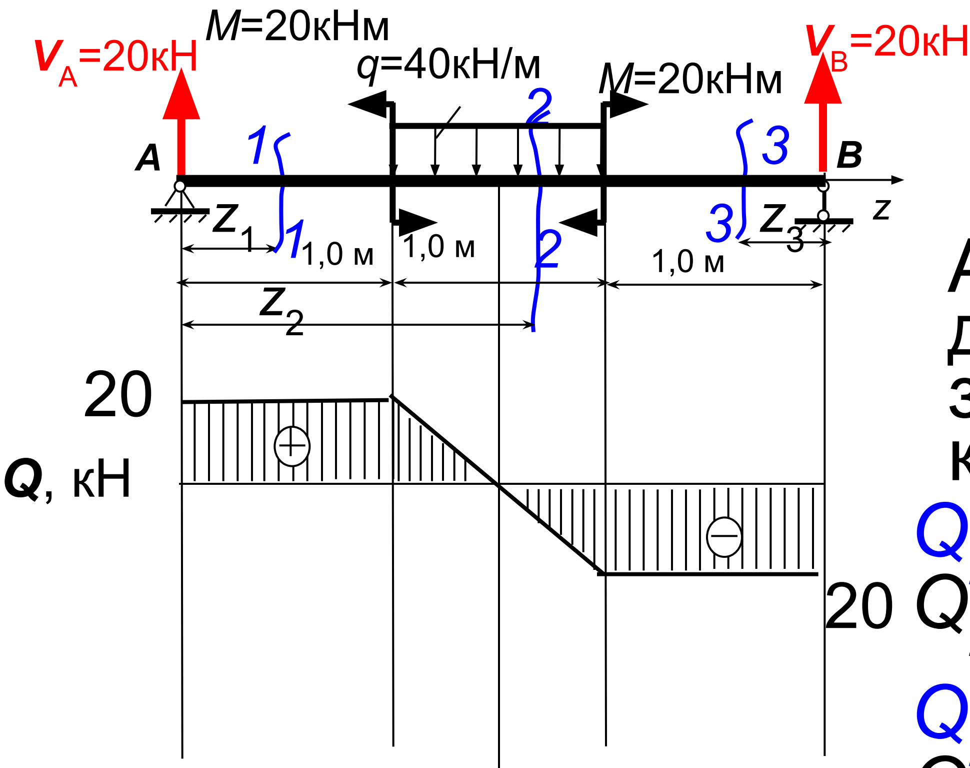
Меняем направление оси *z* , помещая начало координат в точку *B*

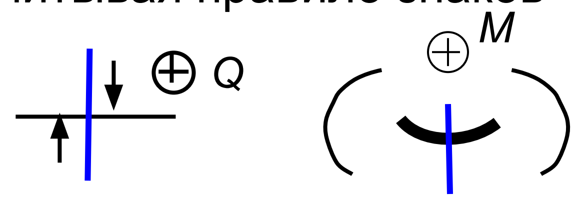
3-й участок:

$$0 \le z_3 \le 1\ м$$

4. В пределах каждого участка проводим сечения

Записываем уравнения для определения Q_z и M_z, учитывая правило знаков





Аналитические выражения для **Q** в каждом сечении и значения для сечений на концах участков :

$Q_{z1} = V_A$;

$Q_{z1=0}$=20 кН; $Q_{z1=1}$=20 кН.

$Q_{z2} = V_A - q(z_2-1)$;

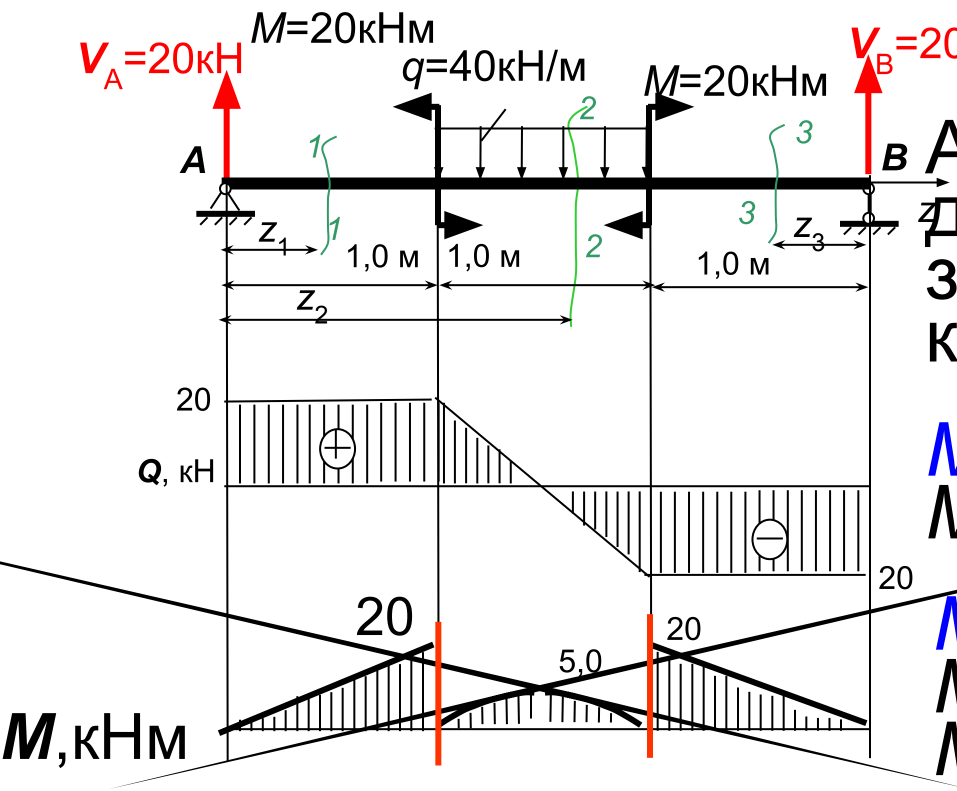
$Q_{z2=1}$=20 кН. $Q_{z2=2}$= -20 кН.

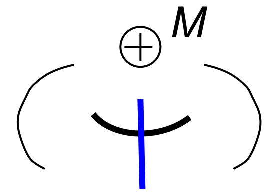
$Q_{z3} = -V_B$;

$Q_{z3=0}$=-20 кН; $Q_{z3=1}$=-20 кН.

При z_2=1,5 м, Q_{z2}=0.

Строим эпюру поперечных сил *Q*





Аналитические выражения для ***M*** в каждом сечении и значения для сечений на концах участков :

$M_{z1} = V_A \cdot z_1;$

$M_{z1=0}=0;\quad M_{z1=1}=20$ кНм.

$M_{z2} = V_A \cdot z_2 - q(z_2-1)^2/2;$

$M_{z2=1}=20$ кНм; $M_{z2=1,5}=5$ кНм;

$M_{z2=2}=20$ кНм;

$M_{z3} = V_B z_3;$

$M_{z3=0}=0;\quad M_{z3=1}=20$ кНм.

Строим эпюру изгибающих моментов M_z

Опасные сечения - сечения с изгибающим моментом, равным 20 кНм.

Подбор сечения

Подбор сечения выполняем из условия прочности при изгибе

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{adm}}$$ откуда $$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{M_x}{\sigma_{adm}}$$

где $W_{\text{н.о.}}$ – момент сопротивления относительно нейтральной оси, которая в сечении балки совпадает с осью x

$$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{20 \cdot 10^{-3}}{160} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$$ м^3= 125 см^3.

Т

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей					
									X-X				Y-Y	
	h	b	s	t	R	r			I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W… с…
					не более									
	мм													
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,…
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,…
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11…
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14…
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18…
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23…
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28…
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34…
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41…
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49…
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59…
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71…
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86…
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101…
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123…
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151…
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182…

Подбор сечения

1) Двутавровый профиль, материал Сталь 3

Ближайшее к полученному значению момента сопротивления соответствует двутавру № 18, для которого $W_{н.о.} = 143$ см^3 .

Подбор сечения

Проверка по рабочим напряжениям:

а) нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M_x}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 139{,}8\,\text{МПа} \le \sigma_{adm}$$

т. е. условие прочности выполняется.

б) максимальные касательные напряжения

$$\tau = \frac{Q_{max} \cdot S_{\text{н.о.}}^{\text{отс}}}{I_{\text{н.о.}} b}$$

где S_x - статический момент верхней части относительно оси *x*;

I_x - момент инерции сечения;

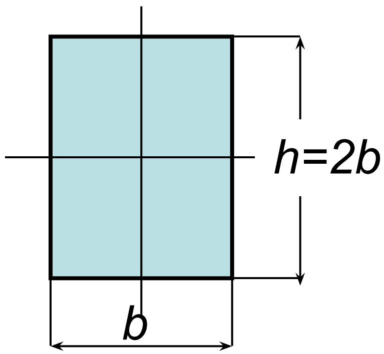
b=s– толщина стенки

$$\tau = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 81{,}4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}} = 24{,}7$$ <96 МПа

1) Прямоугольное сечение, материал дерево

$$\sigma = \frac{M_x}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{adm} \qquad W_x = \frac{bh^2}{6}$$

- момент сопротивления для прямоугольника относительно оси *x*



Учитывая заданное условие, имеем

$$\frac{6M}{bh^2} \le \sigma_{adm} \qquad \frac{6M}{b2^2b^2} \le \sigma_{adm} \qquad \frac{3M}{2b^3} \le \sigma_{adm}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M}{2\sigma_{adm}}} \qquad b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10}} = 0{,}144\text{м}$$

$b \times h = 144 \times 288$ мм^2

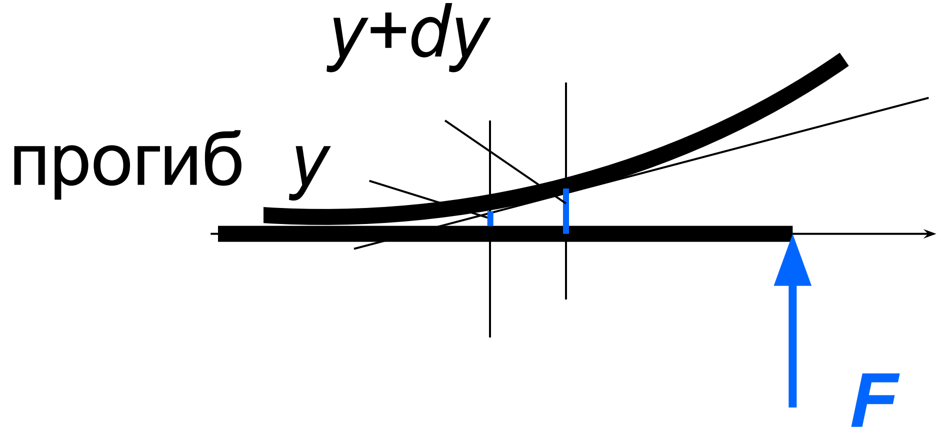
Деревянное сечение по расходу материала весьма не экономично.

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0{,}144 \cdot 0{,}288^2} = 10\text{МПа} \le \sigma_{adm}$$

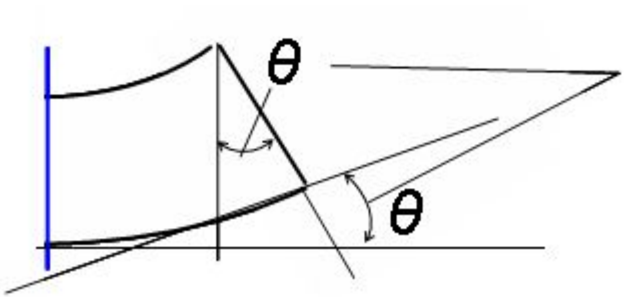
Деформации при изгибе

При изгибе балки в качестве деформаций рассматриваются

прогиб «y» (перемещение сечения вверх или вниз от первоначального положения)



угол поворота сечения «θ»



<u>угол поворота сечения-</u> угол между касательной к изогнутой оси и горизонталью

Деформации при изгибе

Из математики известно уравнение для определения кривизны линии

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

В области малых перемещений величиной $(y')^2$ можно пренебречь и тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey} = y''$$ и, учитывая $$\sigma = \frac{M}{I_x} y$$

имеем

$$\boxed{EI_x y'' = \pm M}$$

уравнение изогнутой оси балки

Деформации при изгибе

или в виде

$$y'' = \frac{M}{EI_x}$$

Интегрируя уравнение первый раз получают угол поворота сечения, второй раз – прогиб

Но при интегрировании необходимо определять постоянные интегрирования из граничных условий, которыми являются условия закрепления балки

Деформации при изгибе

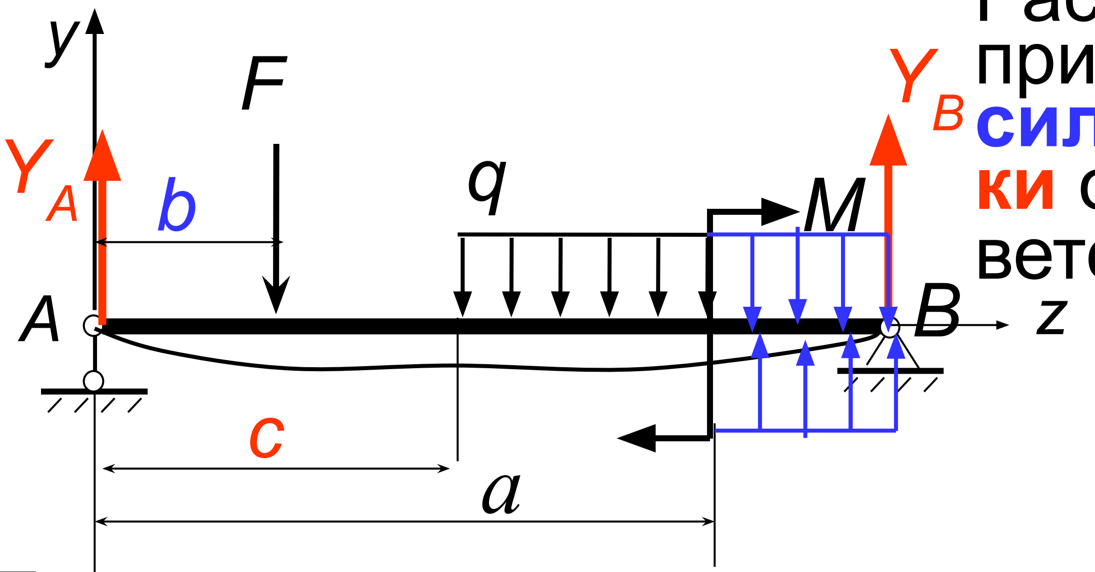
Из этих формул сформулированы различные методы определения деформаций

Для балок постоянной жесткости наиболее часто используется метод начальных параметров, в которых в качестве постоянных интегрирования используется угол поворота в начале координат θ_0, и прогиб в начале координат y_0

При этом необходимо выполнять некоторые приемы

Деформации при изгибе

1. Принимается единое начало координат, помещают его на левом конце балки



Растояния до точек приложения **момента**, **силы** и начала **нагрузки** обозначаются соответственно: ***a***, **b**, **c**.

Если нагрузка заканчивается не доходя до рассматриваемого сечения, ее продлевают до сечения

На участке продления добавляют нагрузку противоположного знака

Деформации при изгибе

Универсальные уравнения для определения

углов поворота

$$EI_x\theta = EI_x\theta_0 + \sum\frac{M(z-a)}{1!} + \sum\frac{F(z-b)^2}{2!} + \sum\frac{q(z-c)^3}{3!}$$

прогибов

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x\theta_0 z + \sum\frac{M(z-a)^2}{2!} + \sum\frac{F(z-b)^3}{3!} + \sum\frac{q(z-c)^4}{4!}$$

где θ - угол поворота в исследуемом сечении;

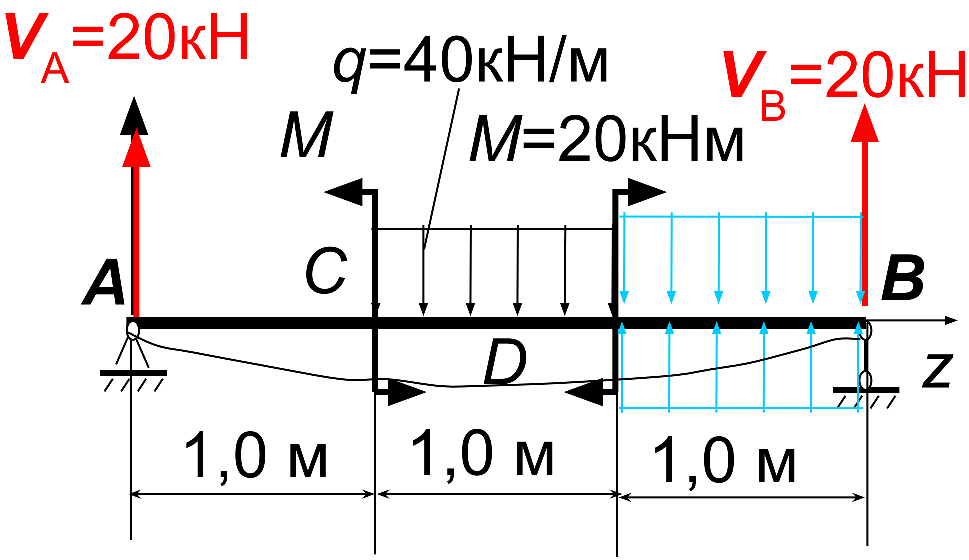
y - прогиб в исследуемом сечении;

y_0 - прогиб в начале координат;

θ_0- угол поворота в начале координат;

z- расстояние от начала координат до сечения, где определяем перемещение;

Пример определения деформаций при изгибе



Определим прогибы в точке C, где приложен момент и в точке D посредине пролета.

Начало координат в точке A

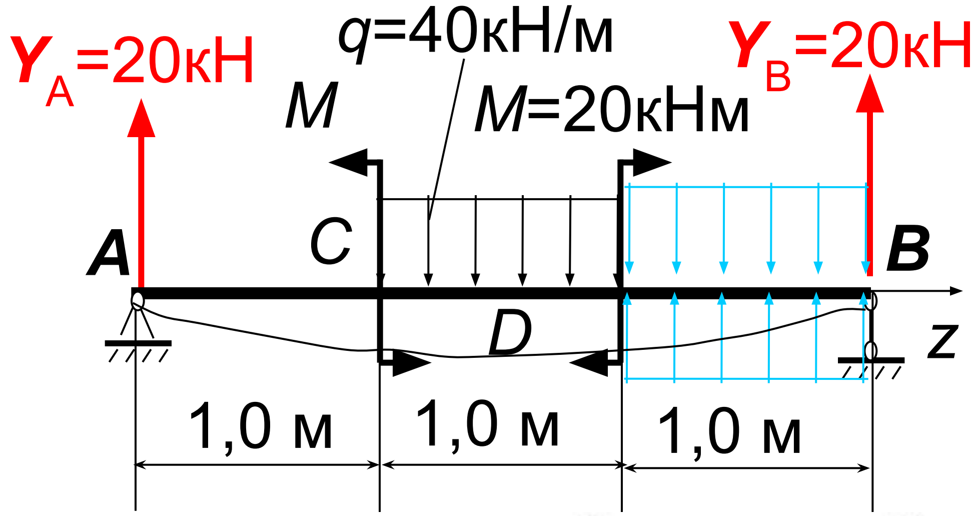
В точке A – опора, поэтому

$$y_A = y_0 = 0$$

Но угол поворота на опоре не равен 0, поэтому, чтобы определить θ_0, используем второе условие закрепления.

$$y_B = 0.$$

Деформации при изгибе



Жесткость балки с сечением двутавра№18

$EI_x = 2\cdot10^{11}\cdot1290\cdot10^{-8} =$
$= 2580\cdot10^3$Нм^2 $= 2580$кНм^2

$$EIy_B = EI\theta_0 z_B - \frac{M(z_B-1)^2}{2} + \frac{M(z_B-2)^2}{2} + \frac{Y_A(z_B-0)^3}{6} - \frac{q(z_B-1)^4}{24} + \frac{q(z_B-2)^4}{24} = 0$$

$$EIy_B = EI\theta_0\cdot3 - \frac{20(3-1)^2}{2} + \frac{20(3-2)^2}{2} + \frac{20(3-0)^3}{6} - \frac{40(3-1)^4}{24} + \frac{40(3-2)^4}{24} = 0$$

$$EI\theta_0\cdot3 + 35 = 0 \qquad EI\theta_0 = -11{,}7$$

Деформации при изгибе

$$EI_x y_C = EI_x \theta_0 z_C + \frac{Y_A (z_C - 0)^3}{6}$$

z_C =1м; $EIy_C = -11{,}7 \cdot 1 + \frac{20(1-0)^3}{6} = -8{,}4\text{кНм}^3$

$$y_C = -\frac{8{,}4}{2580} = -0{,}003\text{м} = -3\text{ мм}$$

$$EI_x y_D = EI_x \theta_0 z_D + \frac{Y_A (z_D - 0)^3}{6} - \frac{M (z_D - 1)^2}{2} - \frac{q (z_D - 1)^4}{24}$$

z_D=1,5м $EIy_D = -11{,}7 \cdot 1{,}5 - \frac{20(1{,}5-1)^2}{2} + \frac{20(1{,}5-0)^3}{6} - \frac{40(1{,}5-1)^4}{24} = -8{,}9\text{кНм}^3$

$$y_D = -\frac{8{,}9}{2580} = -0{,}0034\text{ м} = -3{,}4\text{ мм}$$

Деформации при изгибе

$$y_C = \frac{18,26}{2580} = 0,007\text{м}$$

$$y_C = 0,7\text{см}$$