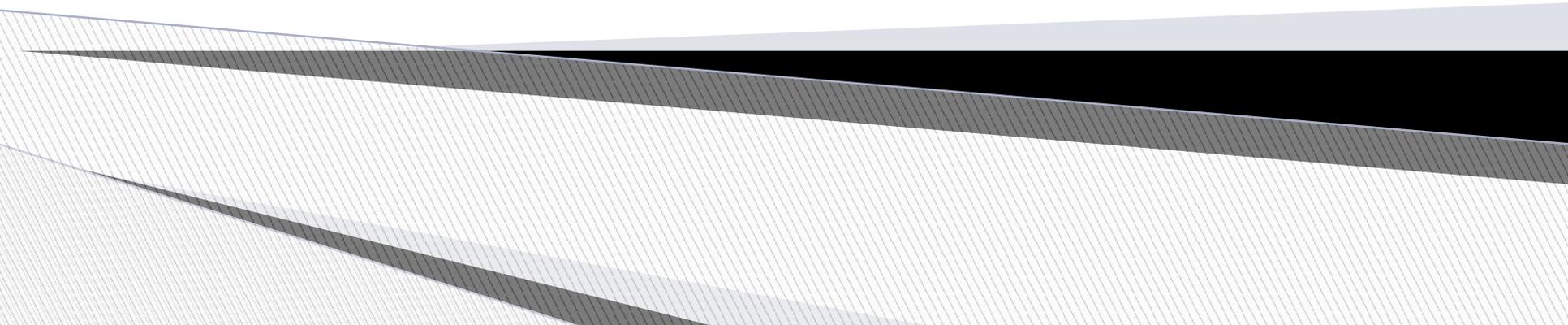


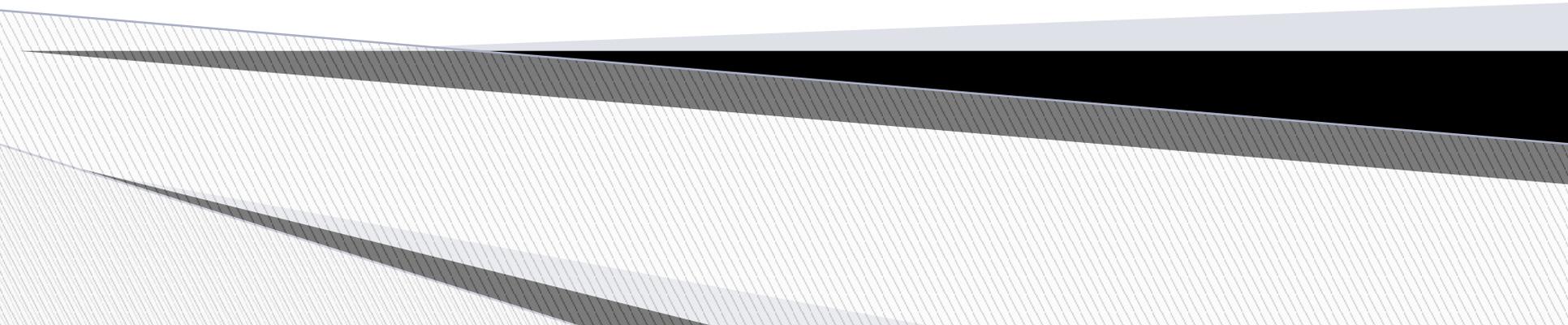
*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.  
Аммосова»  
Инженерно-технический институт  
Кафедра прикладной механики*

**Лекции**  
**по дисциплине «Техническая механика»**  
**270800 - Строительство**



**Внутренние силы.**

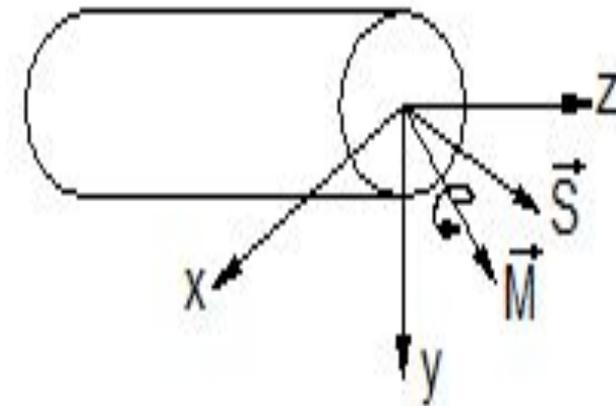
**Напряжения и деформации**



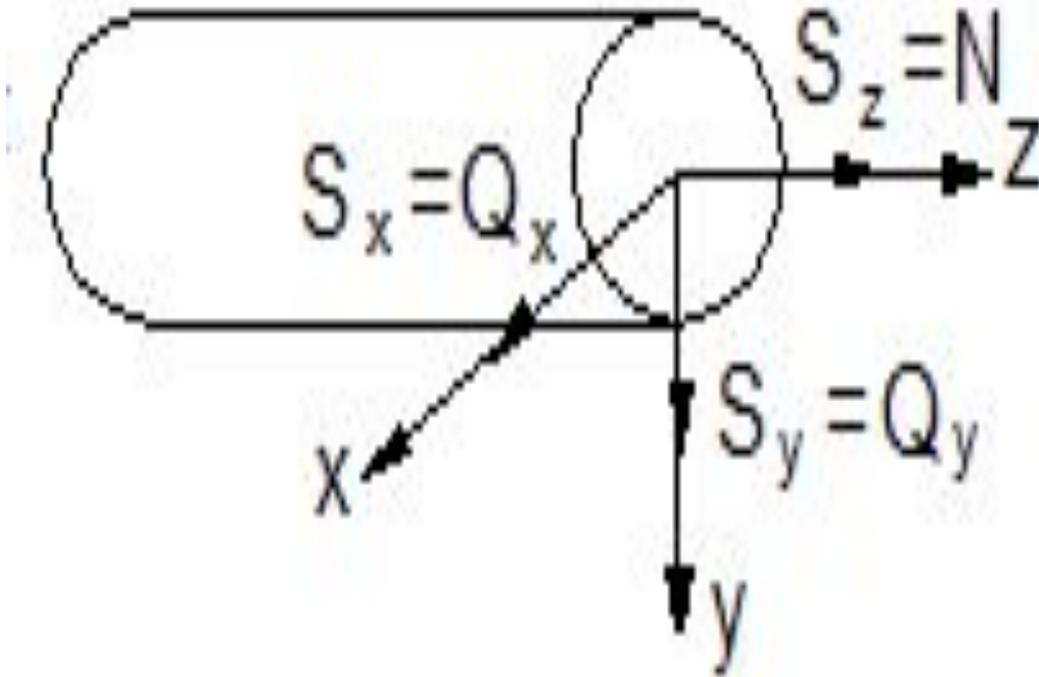
## Внутренние силы

*Внутренние силы* в элементах конструкции – это силы взаимодействия между отдельными частицами элемента, которые вызываются стремлением внешних сил (нагрузок) разрушить элемент, изменить его форму и размеры, отделить одну часть от другой.

Внутренние усилия определяются **метод сечений**. Взаимодействие отдельных частей заменяется их внутренними усилиями, действующими по всему сечению, которые представляются через **главный вектор сил** -  $S$  и **главный вектор-момент** -  $M$ , приложенные к центру тяжести сечения.



Разложение этих векторов по трем координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  дают **шесть составляющих** (компонентов) внутренних усилий.

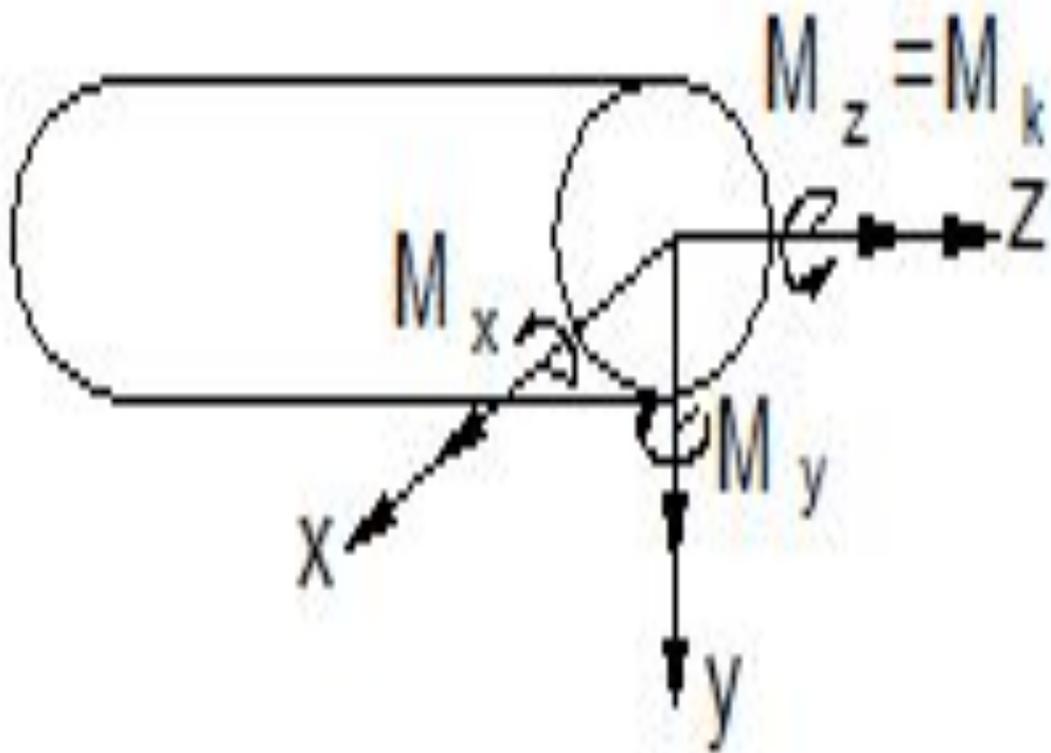


Проекции главного вектора сил  $S$ :

$S_z = N$  – продольная сила;

$S_y = Q_y$  – поперечная сила по оси  $y$ ;

$S_x = Q_x$  – поперечная сила по оси  $x$ ;



Проекции главного вектора-момента  $M$ :

$M_z = M_k$  – крутящий момент;

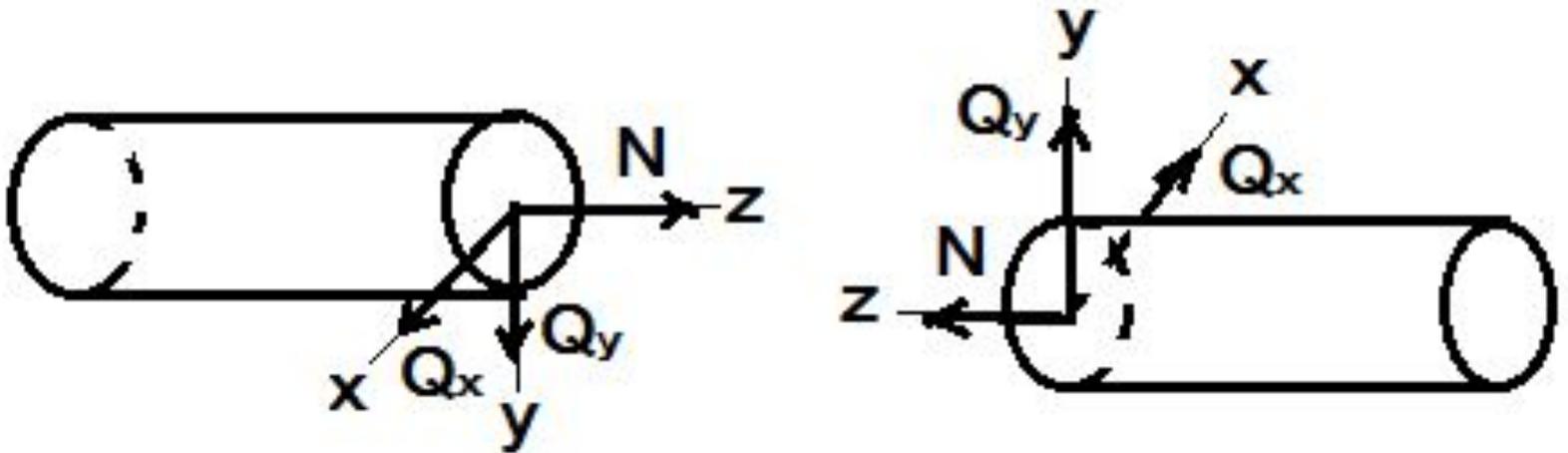
$M_y$  – изгибающий момент относительно оси  $y$ ;

$M_x$  – изгибающий момент относительно оси  $x$ .

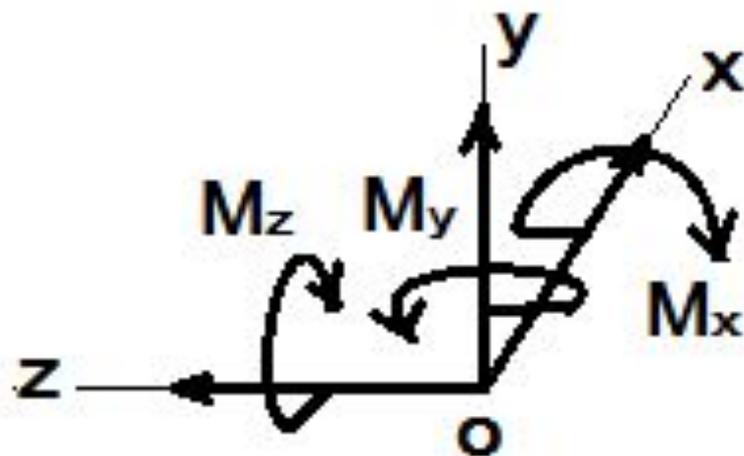
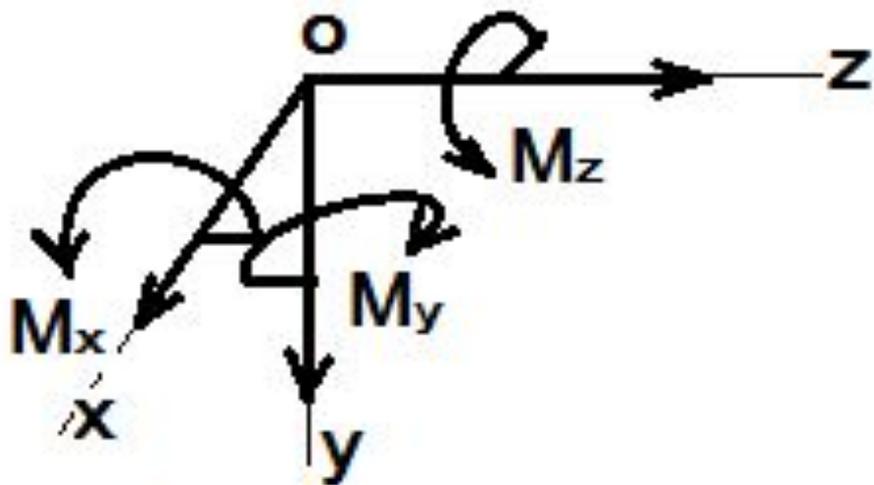
## Знаки внутренних сил в пространственной системе координат

Нормальная (продольная) сила  $N$  считается **положительной**, если направлена **от сечения** и растягивает элемент, то есть одна часть тянется к другой.

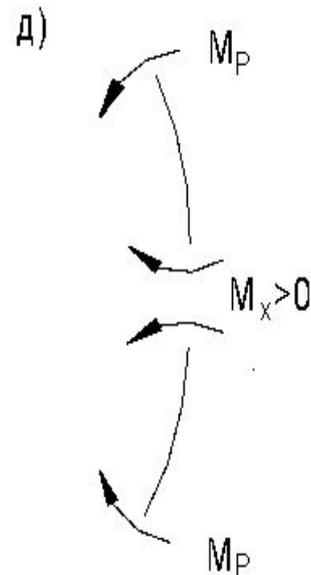
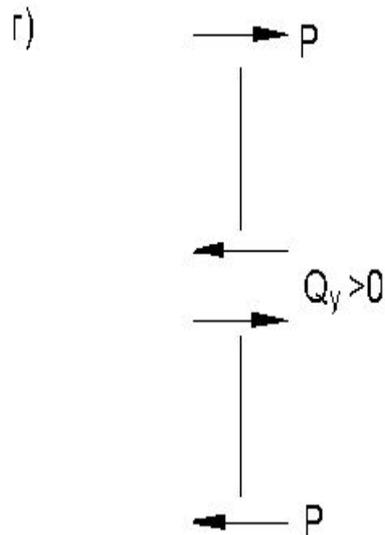
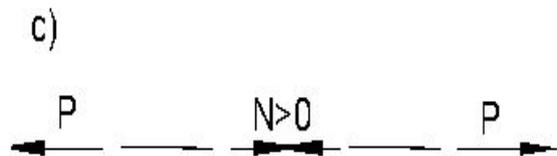
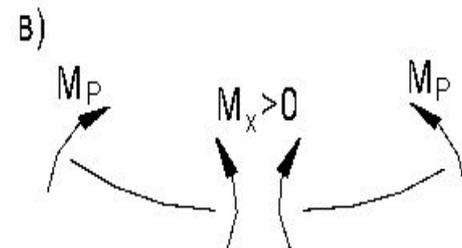
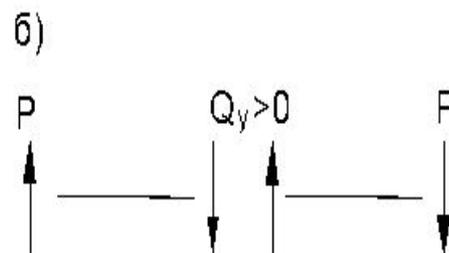
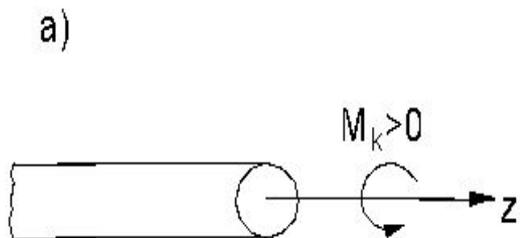
Поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  считаются **положительными**, если они стараются повернуть отсеченную часть **по ходу часовой стрелки**.



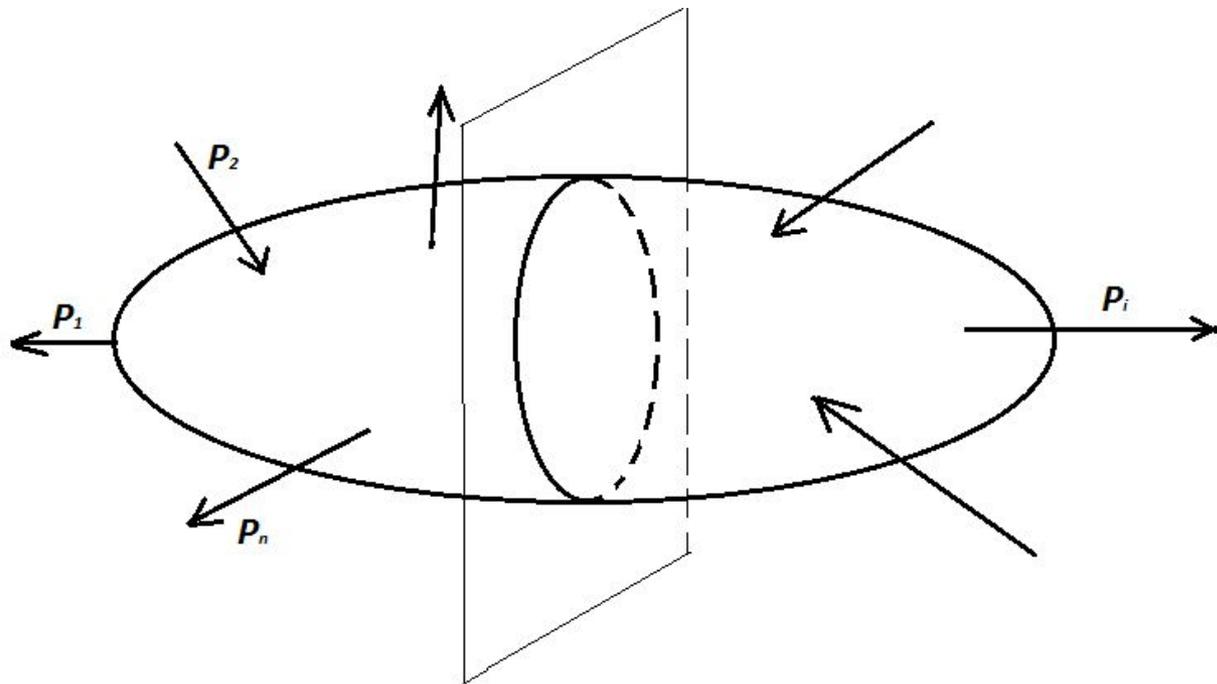
Крутящий  $M_k$  и изгибающие моменты  $M_y$ ,  $M_x$  считаются положительными, если они поворачивают против хода часовой стрелки, если смотреть от конца осей  $z$ ,  $x$  и  $y$  (правило правого буравчика).

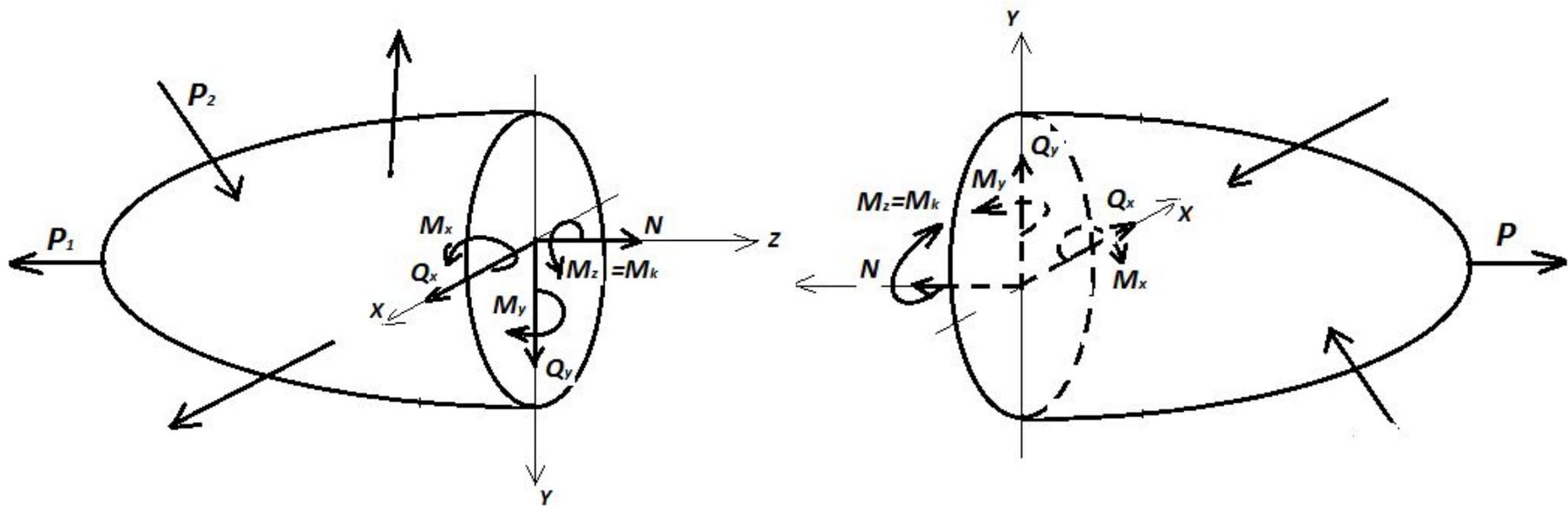


# Правило знаков внутренних усилий в плоской системе координат



В технической механике расчет элементов конструкций всегда начинается с определения внутренних усилий и построения их эпюр. При использовании метода сечений для определения внутренних усилий элемент конструкции мысленно разрезается сечением в том месте, где необходимо определить внутренние силы и разделяется на две части.





При этом любая из этих частей находится в состоянии равновесия под действием всех внутренних и внешних сил, действующих на эту часть, если вся система находится в состоянии равновесия.

Составляем **уравнения равновесия** для рассматриваемой части:

– в общем случае (в пространственной системе)

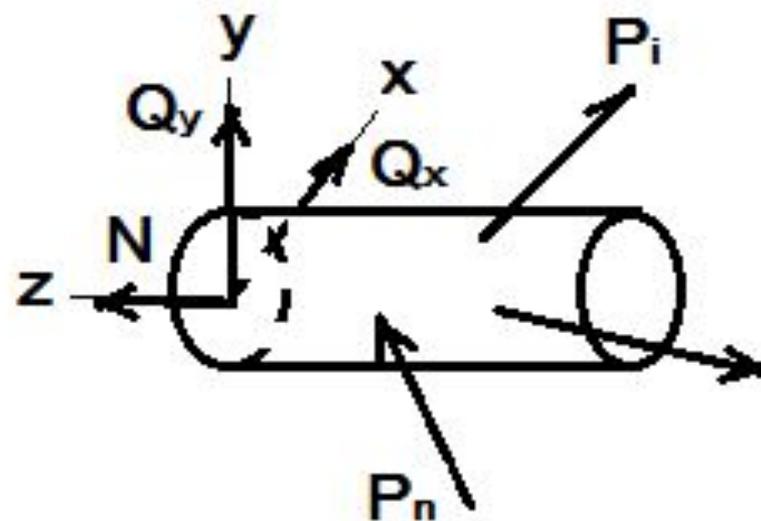
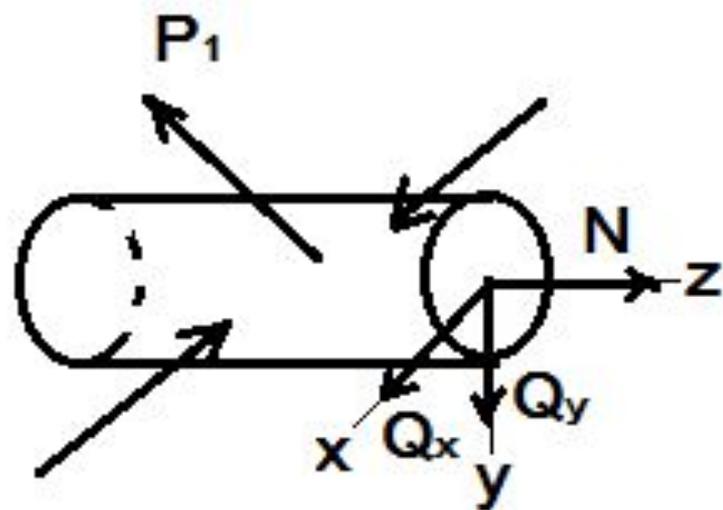
$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum m_x = 0, \sum m_y = 0, \sum m_z = 0,$$

из которых определяем шесть компонентов внутренних усилий  **$N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_k$** ;

– при плоской системе координат

$$\sum Z = 0, \sum Y = 0, \sum m_0 = 0,$$

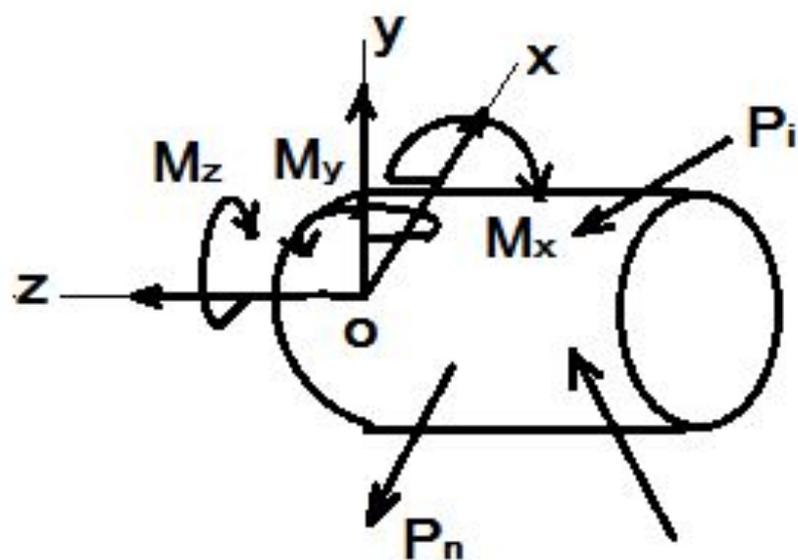
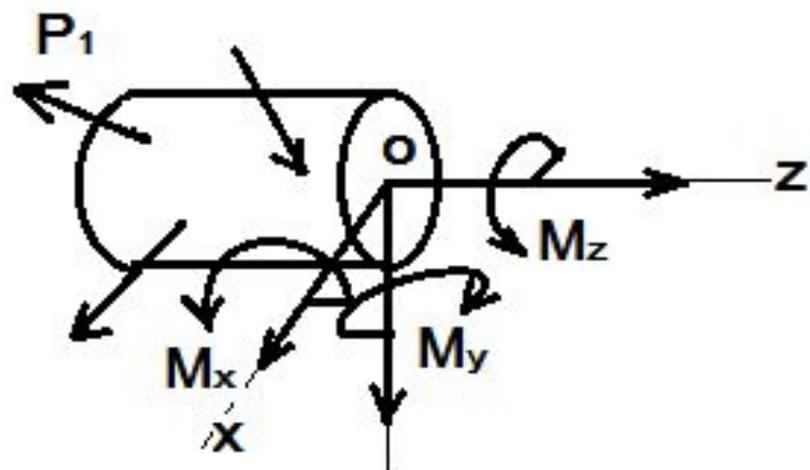
из которых определяем  **$N$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$** .



$$\sum Z = N - \sum P_z = 0 \quad \text{отсюда} \quad N = \sum P_z$$

$$\sum X = Q_x - \sum P_x = 0 \quad \text{отсюда} \quad Q_x = \sum P_x$$

$$\sum Y = Q_y - \sum P_y = 0 \quad \text{отсюда} \quad Q_y = \sum P_y$$

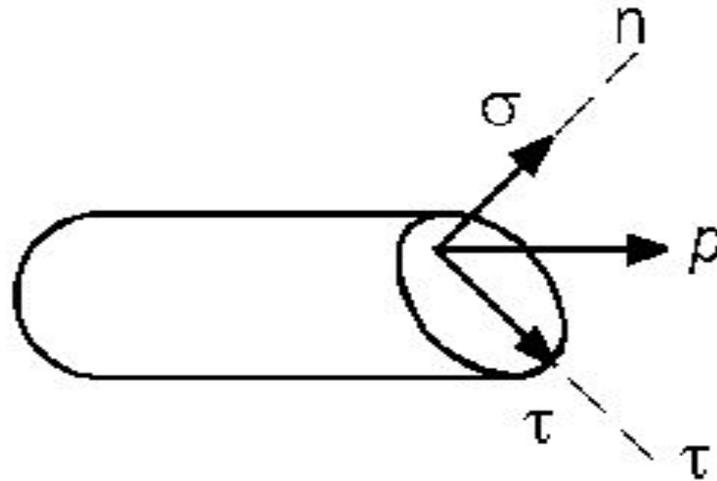


$$\sum m_x = M_x - \sum m_x(P) = 0 \quad \text{отсюда} \quad M_x = \sum m_x(P)$$

$$\sum m_y = M_y - \sum m_y(P) = 0 \quad \text{отсюда} \quad M_y = \sum m_y(P)$$

$$\sum m_z = M_k - \sum m_z(P) = 0 \quad \text{отсюда} \quad M_k = \sum m_z(P)$$

**Напряжение** – внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади, в окрестности какой-либо точки рассматриваемого сечения.



$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{S}}{\Delta A}$$
 – **полное напряжение**, где  $\Delta S$  – элементарное внутреннее усилие, приходящееся на элементарную площадь  $\Delta A$  в окрестности рассматриваемой точки. Единица измерения полного напряжения – Паскаль (**Па = Н / м<sup>2</sup>**).

Мера измерения **напряжений** такая же как у **давления**:

По стандарту международной системы единиц (СИ):

$$\text{Паскаль} - \text{Па} = \text{Н} / \text{м}^2$$

(что соответствует давлению около 100 грамм на 1 м<sup>2</sup>)

В механике чаще используется с кратной приставкой

$$\text{Мега} = 10^6 = 1\ 000\ 000 \qquad 1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н} / \text{мм}^2$$

Соотношение между старым стандартом и стандартом СИ:

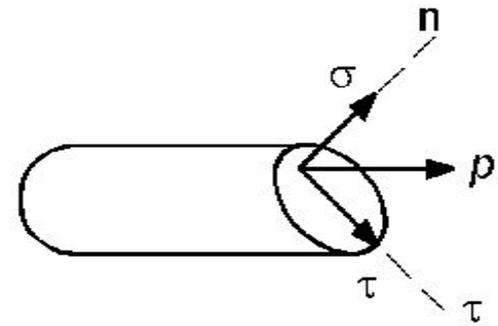
$$1 \text{ МПа} = 10 \text{ атм} = 10 \text{ кГ} / \text{см}^2 \qquad 1 \text{ атм} = 0,1 \text{ Мпа.}$$

*Например,* давление в шинах легкового автомобиля

$$2,2 \text{ атм} = 0,22 \text{ МПа} = 220 \text{ кПа}$$

**Международная система единиц, СИ** ([фр.](#) *Le Système International d'Unités, SI*) — система единиц физических величин, современный вариант метрической системы. Основные единицы: килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела. В рамках СИ считается, что эти единицы имеют независимую размерность, то есть ни одна из основных единиц не может быть получена из других.

При практических расчетах применяются составляющие полного напряжения на нормальные и касательные оси.



Нормальной называется ось, направленная перпендикулярно к рассматриваемому сечению (нормаль – перпендикуляр). Касательной называется ось, направленная по рассматриваемому сечению перпендикулярно к нормали  $n$  (касающаяся сечение).

$\sigma$  – нормальное напряжение, составляющая полного напряжения, равная проекции  $\rho$  на ось  $n$ , перпендикулярную к данному сечению (Па, МПа).

$\tau$  – касательное напряжение, составляющая полного напряжения, равная проекции  $\rho$  на ось, касательную к данному сечению (Па, МПа).

Связь между внутренними силами  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_k$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и нормальными-  $\sigma$ , касательными-  $\tau$  напряжениями в поперечных сечениях элементов конструкций в интегральной форме:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad \text{— продольная сила через нормальные напряжения}$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} \cdot dA \quad \text{— поперечная сила по оси x через касательные напряжения}$$

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} \cdot dA \quad \text{— поперечная сила по оси y через касательные напряжения}$$

$$M_k = \int_A (-\tau_{zx} \cdot y \cdot dA + \tau_{zy} \cdot x \cdot dA)$$

— крутящий момент через касательные напряжения

$$M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

— изгибающий момент относительно оси x  
через нормальные напряжения

$$M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA$$

— изгибающий момент относительно оси y  
через нормальные напряжения

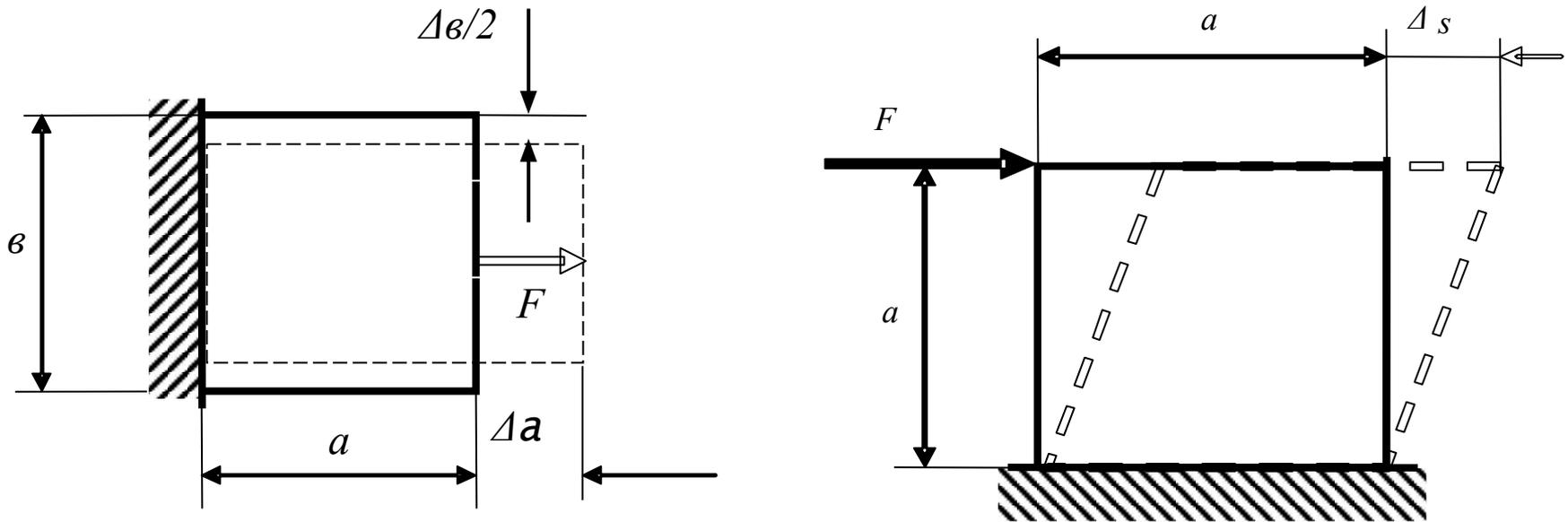
**Деформация** – это изменение формы и размеров элементов конструкции под действием внешних сил:

**1. Упругие деформации** – изменения формы и размеров элемента, исчезающие после снятия вызвавших их сил, тело полностью восстанавливает первоначальную форму и размеры;

**2. Остаточные деформации** – это изменения формы и размеров элементов, которые остаются в элементах после снятия этих нагрузок;

**3. Линейные деформации** – это изменение линейных размеров элемента.  $\Delta l$  – абсолютное удлинение (укорочение) линейных размеров элемента (м);  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  – относительное удлинение (укорочение) линейных размеров элемента (безразмерная величина);

**4. Угловые деформации ( $\gamma, \phi, \theta$ )** – это изменение углов между отдельными гранями элемента за счет изменения первоначальной формы (градусы или радианы).



**Перемещение ( $f, \phi$ )** — изменение положения элемента или точки элемента конструкции в рассматриваемом пространстве, вызванное общей деформацией конструкции или системы.

$f_x = u$  — проекция перемещения  $f$  на ось  $X$ ;

$f_y = v$  — проекция перемещения  $f$  на ось  $Y$ ;

$f_z = w$  — проекция перемещения  $f$  на ось  $Z$ ;

$\phi$  — угол поворота в пространстве;

## Условия прочности и жесткости элементов

Для обеспечения надежной работы элементов конструкции составляются условия прочности, жесткости, устойчивости и проверяются их выполнения.

**Надежностью** называется способность объекта сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании.

### *Условие прочности*

При расчете конструкций на действие внешних нагрузок действительные значения напряжений, возникающие в элементах конструкции, не должны превышать допускаемые напряжения, установленные для материала этих элементов:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad \tau \leq [\tau],$$

где:  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$  – допускаемые напряжения - это максимальные значения напряжений, которые не должны превышать действительные значения напряжений, возникающие в элементах конструкции под действием внешних нагрузок.

Допускаемые напряжения для определенных материалов устанавливаются по результатам лабораторных испытаний и эксплуатационных наблюдений:

• для хрупких и для высокопрочных материалов с небольшими остаточными деформациями:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_v}{K}$$

• для упруго-пластичных материалов со значительными остаточными деформациями:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K},$$

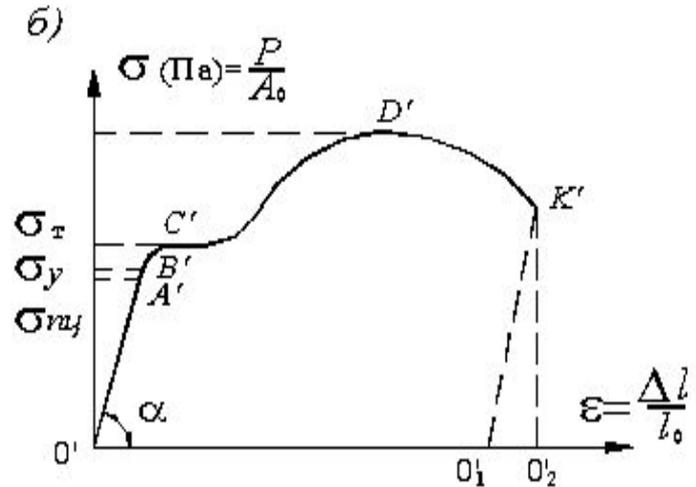
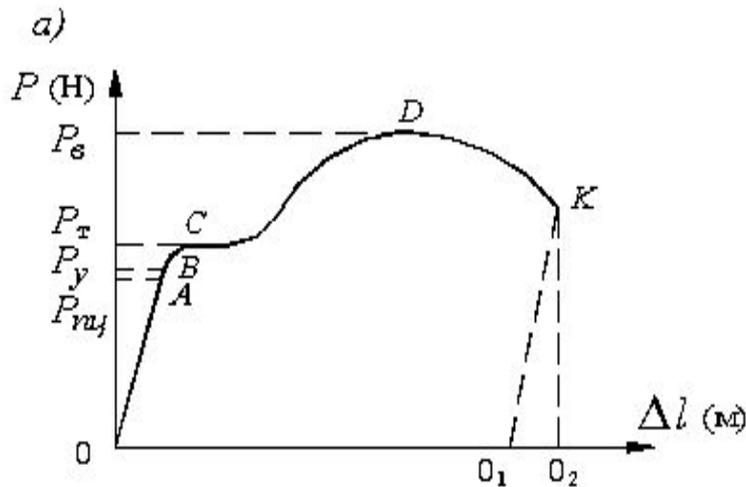
$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{K}$$

где:  $\sigma_e$  – предел прочности или временное сопротивление материала;

$\sigma_T$  – физический предел текучести материала;

$\sigma_{0.2}$  – условный предел текучести материала;

$K$  – коэффициент запаса прочности элементов (по материалу) – число, показывающее во сколько раз допускаемые напряжения в элементах конструкции меньше предела прочности или предела текучести материала.



Диаграммы растяжения

## *Условие жесткости*

Действительные значения перемещений (линейные и угловые) элементов конструкций, вызванные общей деформацией конструкции, не должны превышать установленные их предельные величины.

$$f \leq [f], \quad \phi \leq [\phi].$$

где  $[f]$ ,  $[\phi]$  – допускаемые линейные и угловые перемещения - предельные величины линейных и угловых перемещений, которые устанавливаются по технологическим и эксплуатационным требованиям к конструкциям и их элементам.

## Простейшие виды деформации

*Растяжение и сжатие* наблюдаются, когда в элементе возникает деформация удлинения или укорочения под действием продольных сил.

*Сдвиг* возникает, когда в элементе соседние сечения перемещаются параллельно друг другу под действием поперечных сил.

*Кручение* возникает, когда соседние поперечные сечения элемента поворачиваются относительно друг друга под действием крутящих моментов, относительно оси рассматриваемого элемента.

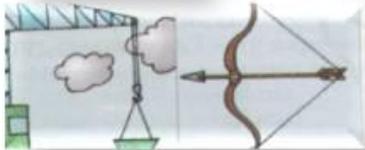
*Изгиб* возникает, когда ось элемента (бруса или срединная поверхность пластины) меняет свою кривизну под действием изгибающих моментов.

# Виды деформаций:

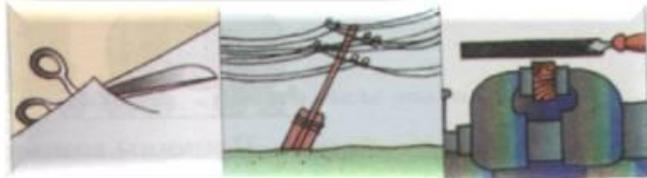
растяжение



сжатие



кручение



изгиб



сдвиг