Основы корреляционного анализа

Многие объекты исследования характеризуются не одним, а множеством параметров, которые формируются в виде матрицы:

$$X_{n\times k}=\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

x_{ij} – i-ое наблюдение j-ого фактора.

Основная задача – выявление взаимосвязи между случайными переменными.

Задачи:

- отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результативный признак;
- обнаружение ранее неизвестных причинных связей.

Основные средства анализа данных:

- парные коэффициенты корреляции,
- частные коэффициенты корреляции и
- множественные коэффициенты корреляции.

Парный корреляционный анализ

Если X и Y – СВ, то ***теоретическая ковариация*** :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M\left[(X - M(X))(Y - M(Y))\right]$$

Если X и Y – независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Выборочная ковариация – статистическая мера взаимосвязи двух переменных.

При наличии n наблюдений:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$ где

(x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ – фактические значения X и Y,

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \,. \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}.$$

Коэффициент парной корреляции и проверка его значимости

Для X и Y ***теоретический коэффициент корреляции***:

$$\rho_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \text{ где}$$

σ_x^2, σ_y^2 - дисперсии CB X и Y, $\operatorname{cov}(X,Y)$ – их ковариация.

Свойства:

1. $-1 \le \rho_{x,y} \le 1$.
2. При $\rho_{xy}=\pm 1$ СВ X и Y связаны линейной зависимостью, т.е. $Y=\alpha X+\beta$.
3. При $\rho_{xy}=0$ линейная корреляционная связь отсутствует.

Оценка коэффициента корреляции ρ – ***выборочный парный коэффициент корреляции r:***

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$ или

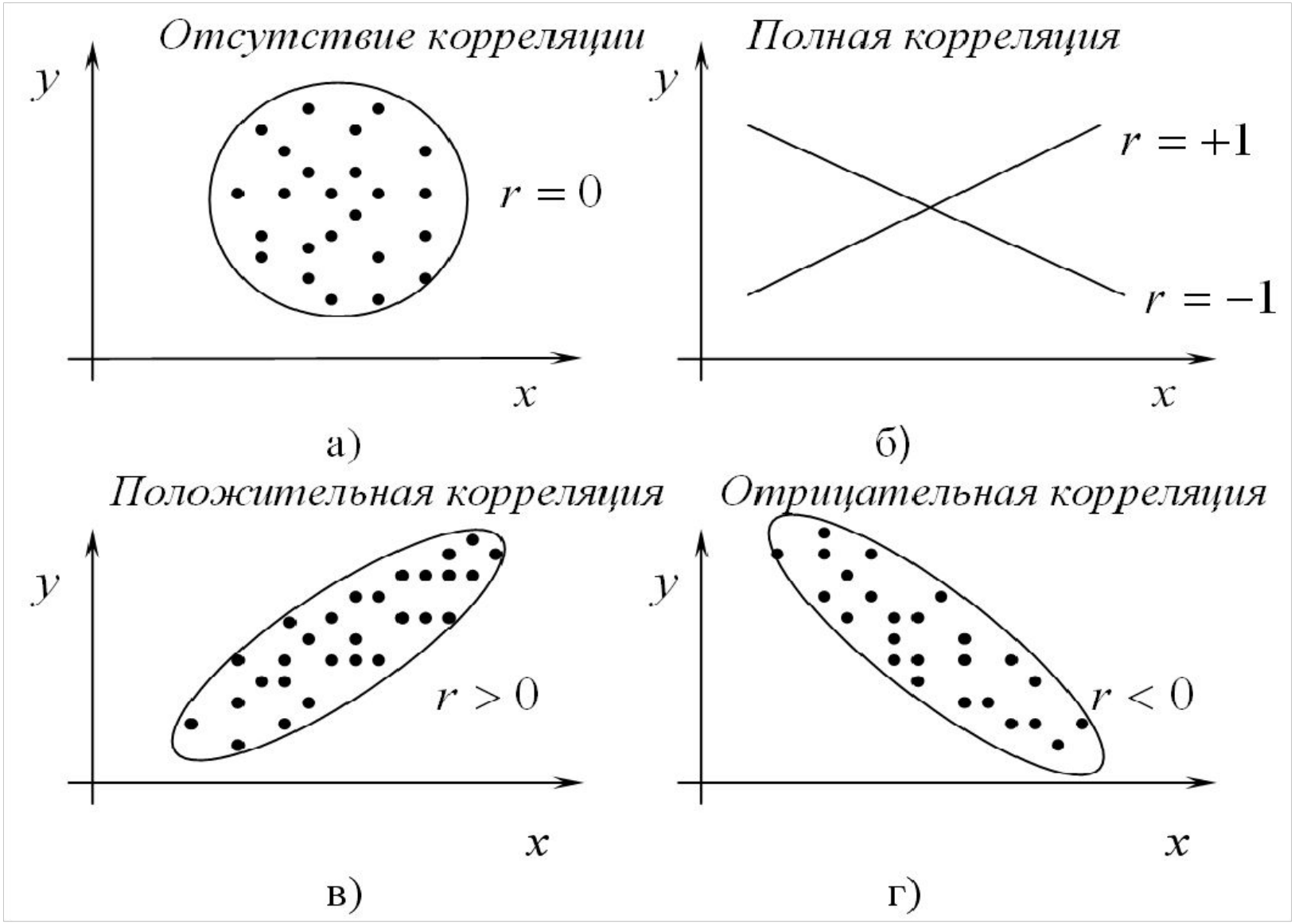
$$\boxed{r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}}}$$,где

$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, $S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ – выборочные дисперсии величин X и Y.

Оценка тесноты связи можно переменными

Теснота связи	Величина коэффициента корреляции при наличии	
	прямой связи (+)	обратной связи (−)
Связь отсутствует	$r = 0$	$r = 0$
Связь очень слабая	$0 < r \le 0{,}3$	$-0{,}3 \le r < 0$
Связь слабая	$0{,}3 < r \le 0{,}5$	$-0{,}5 \le r < -0{,}3$
Связь средняя	$0{,}5 < r \le 0{,}7$	$-0{,}7 \le r < -0{,}5$
Связь сильная	$0{,}7 < r \le 0{,}9$	$-0{,}9 \le r < -0{,}7$
Связь очень сильная	$0{,}9 < r < 1$	$-1 < r < -0{,}9$
Полная функциональная	$r = 1$	$r = -1$

Наиболее простым, приближенным способом выявления корреляционной связи является графический метод.



Оценка значимости коэффициента парной корреляции

$H_0 : \rho = 0$ – значение коэффициента корреляции для генеральной совокупности равно нулю, т.е. *в генеральной совокупности отсутствует корреляция*.

$H_1 : \rho \neq 0$.

Оценка значимости осуществляется с помощью *t*-критерия Стьюдента:

$$t_{набл} = \frac{r}{S_r} = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \text{ где}$$

$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ – ошибка коэффициента корреляции.

Строится двусторонняя критическая область, границы критической области которой находят из условия:

$$P\left(t_{набл} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = P\left(t_{набл} > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

$t_{набл}$ сравнивается с $t_{кр}(\alpha;\nu)$ *для двусторонней критической области*, которое берется с учетом заданного уровня значимости α и числа степеней свободы $\nu = n-2$ (функция Excel СТЮДРАСПОБР ($\alpha;\nu = n-2$)).

Если $|t_{набл}| > t_{кр}(\alpha, \nu = n-2)$, то полученное значение коэффициента корреляции признается *значимым* (т.е. H_0 отвергается).

Вывод: с доверительной вероятностью $\gamma=1-\alpha$ можно утверждать, что между исследуемыми переменными *есть линейная статистическая зависимость*.

Корреляционное отношение и проверка его значимости

В случае нелинейной зависимости тесноту связи между величинами оценивают по величине ***корреляционного отношения***:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \quad (0 \le \eta \le 1), \text{ где}$$

y_i – наблюдаемые значения,

$\hat{y}_i$ – расчетные значения результативной переменной.

Величина η^2, называемая ***коэффициентом детерминации***, показывает, какая часть общей вариации Y обусловлена вариацией X.

$H_0 : \eta = 0$ – *в генеральной совокупности отсутствует корреляция.*

$H_1 : \eta \neq 0$.

Для проверки гипотезы вычисляется статистика:

$$F = \frac{\eta^2 (n-k)}{(1-\eta^2)(k-1)} \sim F(\alpha, \nu_1 = k-1, \nu_2 = n-k)$$, где

k – число факторов, n – количество наблюдений).

Строится критическая область $(F_{кр,\alpha}; \infty)$, для этого границы критической области находят из условия:

$$P\left(F_{набл} > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\right) = \alpha$$

(функция Excel FРАСПОБР $(\alpha, \nu_1 = k-1, \nu_2 = n-k)$).

Можно утверждать с доверительной вероятностью γ=1–α, что корреляционное отношение η значимо отличается от нуля, если $F_{набл} > F_{кр}(\alpha, \nu_1 = k-1, \nu_2 = n-k)$.

Множественный корреляционный анализ

Для измерения силы линейных связей одной переменной X_i с совокупность других (k-1) переменных из их множества ($X_1,\ldots,X_n$) также используются коэффициенты парной корреляции.

Матрица коэффициентов парной корреляции R:

$$R=\begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \ldots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2x_3} & \ldots & r_{x_2x_k} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & 1 & \ldots & r_{x_3x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \boxed{R=\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{22} & \ldots & r_{2k} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \ldots & r_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}}, \text{ где}$$

r_{ij} – выборочный парный коэффициент корреляции, характеризующий тесноту линейной связи между показателями X_i и X_j.

Многомерный корреляционный анализ решает *две задачи*:

1. Определение тесноты связи одной переменной с совокупностью остальных (k – 1) величин, включенных в анализ;
2. Определение тесноты связи между переменными при фиксировании (исключении) влияния остальных.

Эти задачи решаются с помощью коэффициентов множественной и частной корреляции, соответственно.

Выборочный коэффициент множественной корреляции и проверка его значимости

Выборочный коэффициент множественной корреляции

$$R_{j,1,2,\ldots j-1,j+1,\ldots k} = \sqrt{1-\frac{|R|}{R_{jj}}}\ , \text{где}$$

$|R|$ – определитель корреляционной матрицы $\boldsymbol{R}$;

R_{jj} – алгебраическое дополнение элемента r_{jj} матрицы $\boldsymbol{R}$.

$R^2_{j,1,2,\ldots j-1,j+1,\ldots,k}$ называют ***выборочным множественным коэффициентом детерминации***, который показывает, какую долю вариации исследуемой j-ой величины объясняет вариация остальных $(k-1)$ величин.

Значимость множественного коэффициента корреляции проверяется по F – критерию Фишера.

$H_0 : R^2 = 0$, т.е. *в генеральной совокупности отсутствует корреляция.*

$H_1 : R^2 \neq 0$.

Для проверки гипотезы вычисляется статистика:

$$F_{набл} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \text{ или } \boxed{F_{набл} = \frac{R^2 \cdot (n-k)}{(1-R^2)\cdot(k-1)}}.$$

Для критической области $(F_{кр,\alpha}; \infty)$ критические значения статистики находят из условия:

$$P(F_{набл} > F_{кр}(\alpha, \nu_1 = k-1, \nu_2 = n-k)) = \alpha$$

(функция Excel FРАСПОБР $(\alpha, \nu_1 = k-1, \nu_2 = n-k)$).

Множественный коэффициент корреляции считается значимым, если выполняется неравенство: $F_{набл} > F_{кр}$.

Частный коэффициент корреляции и проверка его значимости

Выборочный частный коэффициент корреляции X_j и X_i, при фиксированных значениях остальных переменных (k–2) определяется по формуле:

$$r_{ji\cdot 1,2,\ldots,k} = -\frac{R_{ji}}{\sqrt{R_{jj}R_{ii}}}, \text{ где}$$

R_{ji}, R_{jj}, R_{ii} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам корреляционной матрицы R.

$R_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot M_{ji}$, где M_{ji} – минор элемента r_{ji} (определитель матрицы, получаемой путем вычеркивания j-й строки и i-го столбца из матрицы R).

Частный коэффициент корреляции, так же как и парный коэффициент корреляции изменяется от –1 до +1.

Для вычисления коэффициентов частной корреляции можно использовать рекуррентную формулу:

$$r_{yx_i \cdot x_1 \dots x_k} = \frac{r_{yx_i \cdot \overbrace{x_1 \dots x_{k-1}}^{\text{без } x_i}} - \overbrace{r_{yx_k \cdot \overbrace{x_1 \dots x_{k-1}}^{\text{без } x_i}}}^{A} \overbrace{r_{x_i x_k \cdot \overbrace{x_1 \dots x_{k-1}}^{\text{без } x_i}}}^{B}}{\sqrt{(1-A^2)(1-B^2)}}.$$

В частности, для случая трех переменных, выборочный частный коэффициент корреляции между переменными X и Y при фиксированных значениях переменной Z равен:

$$r_{xy \cdot z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}}$$

Оценка значимости коэффициента частной корреляции осуществляется с помощью *t*-критерия Стьюдента:

$$t_{набл} = \frac{r}{S_r} = \sqrt{\frac{r^2}{1-r^2} \cdot (n-l-2)} = r\sqrt{\frac{n-l-2}{1-r^2}}$$, где

r – соответственно оценка частного коэффициент корреляции;

l – число фиксируемых факторов.

$H_0 : R^2 = 0$ – *в генеральной совокупности отсутствует корреляция.*

$H_1 : R^2 \neq 0$.

Строится критическая область, границы которой находят из условия:

$$P\left(t_{набл} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = P\left(t_{набл} > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

$t_{набл}$ сравнивается с критическим $t_{кр}(\alpha;\nu)$ для двусторонней критической области (функция Excel СТЮДРАСПОБР $(\alpha;\nu = n-l-2)$).

Если $|t_{набл}| > t_{кр}(\alpha,\nu)$, то коэффициент корреляции признается *значимым* (т.е. H_0 отвергается).

Вывод: с вероятностью $\gamma = 1-\alpha$ можно утверждать, что между исследуемыми переменными есть линейная статистическая зависимость.