Ранг матрицы.

Теорема Кронекера- Капелли

Минор порядка к

Определение 1. *Минором порядка k* матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении k строк и k столбцов.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Миноры первого порядка: $|2|, |9|, |1|, \ldots$

Миноры второго порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, \ldots$

Миноры третьего порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

Миноров четвертого и более высокого порядков не существует.

Ранг матрицы

Определение 2. Наивысший порядок миноров матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$, отличных от нуля, называется *рангом* матрицы A.

Обозначение: $rang(A)$ или $r(A)$.

Пример 1.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 = 28,$ r(A)=3

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 7 = 0,$ $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$ r(B)=2

Теорема 1. Если матрица A эквивалентна матрице B, то $r(A) = r(B)$, т.е. элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

<u>Доказательство.</u>

Справедливость данного утверждения следует из свойств определителей: элементарные преобразования не могут нулевой определитель превратить в ненулевой и наоборот.

Ранг матрицы

Пример 2.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -11 & 22\\ 0 & 5 & -10\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -11 & 22\\ 0 & 5 & -10\\ 0 & -5 & 10\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=A'$$

$$\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1-0\cdot(-4)=-1\neq 0,$$

$$\boxed{r(A)=r(A')=2}$$

Базисный минор. Теоремы о рангах

Определение 3. Миноры матрицы, отличные от нуля, порядок которых равен рангу матрицы, называются *базисными* минорами.

Теорема 2. Если $r(A)=s$, $r(B)=k$, то $r(A\cdot B)\le min\{s,k\}$, т.е. ранг произведения матрицы-произведения не выше ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Справедливость данного утверждения легко доказать, опираясь на правило умножения матриц. Более подробно доказательство представлено в учебнике Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М: Наука, 1971, С. 101.

Теорема 3. Если $r(A)=s$, $detC\ne 0$, то $r(A\cdot C)=r(C\cdot A)=s$.

Доказательство.

$r(A\cdot C)\le r(A)=s,\qquad s=r(A)=r\left(A\cdot C\cdot C^{-1}\right)\le r(A\cdot C),\qquad \boxed{r(A\cdot C)=s}$

$r(C\cdot A)\le r(A)=s,\qquad s=r(A)=r\left(C^{-1}\cdot C\cdot A\right)\le r(C\cdot A),\qquad \boxed{r(C\cdot A)=s}$

Подобные матрицы

Определение 4. Квадратные матрицы A и B, связанные соотношением:

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q \ , \tag{1}$$

где Q - невырожденная матрица, называются *подобными* матрицами.

Определение 5. Операция перехода от матрицы A к матрице B по формуле (1) называется *трансформированием* матрицей Q.

Следствие 1. Если $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$, где $det Q \neq 0$, то $r(A) = r(B)$.

Доказательство. Следует из теоремы 3.

Замечание. Понятие ранга матрицы можно ввести также, используя понятие линейной независимости (зависимости) её строк или столбцов. Этот вопрос будет обсужден ниже (при изучении темы «Линейные пространства»).

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 4 (теорема Кронекера-Капелли) Система m линейный уравнений с n неизвестными вида (2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

из коэффициентов при неизвестных системы равен рангу расширенной матрицы

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \quad \text{т.е. } r(A) = r(\overline{A})$$

<u>Доказательство.</u> Изучите самостоятельно.

Теорема Кронекера-Капелли: следствия

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Следствие 2. Если система вида (2) совместна и $r(A) = k$, то $k \le m$.

Следствие 3. Если система вида (2) совместна и $r(A) = k$, то при $k = n$ система является определенной (имеет единственное решение); при $k < n$ система является неопределенной (имеет бесчисленное множество решений).

Замечание. Ранее мы уже отмечали, что однородная система всегда совместна, так как у неё есть нулевое решение. Теорема Кронекера – Капелли это тоже подтвердит, так как добавление нулевого столбца свободных членов не может привести к увеличению ранга матрицы.

Применение теоремы Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) = \overline{A'}$$

$$\boxed{r\left(\overline{A}\right) = r\left(\overline{A'}\right) = 4}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-4) = -16 \neq 0$$

$$\boxed{r(A) = r(A') = 3}$$

$$\boxed{r(A) \neq r(A') - \textit{система несовместна}}$$

Применение теоремы Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\overline{A'}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A'$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1=1\neq 0,$$

$$r(A)=r(A')=2$$

$$r(\overline{A})=r(\overline{A'})=2$$

$$\boxed{r(A)=r(\overline{A})=2-\textit{система совместна}}$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ x_4=1. \end{cases}\qquad \begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1, \\ x_4=1. \end{cases}\qquad \begin{cases} x_3=1-3x_1-4x_2, \\ x_4=1. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1=a, \\ x_2=b, \\ x_3=1-3a-4b, \\ x_4=1, \end{cases}}$$

где $a,b\in R$.

Этот выбор означает, что x_1 и x_2 - *свободные неизвестные*, т.е. могут принимать любые действительные значения, а x_3 - *базисная неизвестная*.

Некоторые рекомендации по построению общих решений

Нетрудно заметить, что число свободных неизвестных в случае совместных систем всегда равно $n - r$, где r – ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных.

Для построения решения в качестве базисных неизвестных выбирают неизвестные, коэффициенты при которых входят в один из базисных миноров. Оставляя их слева, остальные неизвестные переносят в правые части соответствующих уравнений.

Вводя параметры для обозначения значений, которые принимают свободные неизвестные, получают систему, которую можно уже решить, используя ранее рассмотренные методы (правило Крамера или метод Гаусса).

Позднее, при изучении линейных преобразований, мы рассмотрим еще один метод построения общих решений линейных однородных систем.