Лекция 24. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид общего решения в зависимости от корней характеристического уравнения.

§ 1. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (ОЛДУ).

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (1)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n \in R$ – действительные числа, называют однородными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Чтобы найти общее решение уравнения (1) нужно построить фундаментальную систему решений, т. е. систему вида:

1) линейно независимую

2) $L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \ldots, L[y_n] = 0,$

тогда общее решение однородного уравнения (обозначим y_{oo}):

$y_{oo} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ – общее решение

Построим фундаментальную систему решений на примере ОЛДУ второго порядка.

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0. \qquad (2)$$

Будем искать решение уравнения в виде: $y = e^{\lambda x}$, тогда: $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Подставим y и ее производные в уравнение (2):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p_1 \lambda e^{\lambda x} + p_2 e^{\lambda x} = 0. \qquad (3)$$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0$, разделим на $e^{\lambda x} \neq 0$:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \qquad (4)$$

(4) называется **характеристическим уравнением** для дифференциального уравнения (2).

Уравнение (4) может имеет два корня. Возможно три случая:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – два действительных различных корня.
2) $\lambda_1 = \lambda_2$ – два действительных кратных корня.
3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней.

i – символ: $i^2 = -1$.

Рассмотрим первый случай.

Пусть характеристическое уравнение (4) имеет корни: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – действительные.

Тогда λ_1 соответствует $e^{\lambda_1 x}$,

λ_2 соответствует $e^{\lambda_2 x}$,

следовательно, имеем две функции. Они являются решениями уравнения (2) и они линейно независимы. Действительно:

$$W\left[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x}\lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Таким образом, $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ – фундаментальная система решений, тогда: $y_{oo} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.

Замечание: так как λ_1 и λ_2 – произвольные, то очевидно, что для $\forall$ уравнения второго порядка с действительными различными корнями $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ – фундаментальная система решений

Пример. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Ищем решение в виде: $y = e^{\lambda x}$, тогда:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ – характеристическое уравнение.

Найдем его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, следовательно, $(e^x, \ e^{2x})$ – фундаментальная система решений, тогда:

$$y_{oo} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Рассмотрим второй случай.

Корни действительные и кратные, то есть характеристическое уравнение (4) имеет корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ – действительный.

Тогда λ_1 соответствует e^{ax},

λ_2 соответствует e^{ax},

Эта система решений не является фундаментальной, т.к.:

$$W\left[e^{ax}, e^{ax}\right] = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{ax} \\ ae^{ax} & ae^{ax} \end{vmatrix} = 0$$

$[e^{ax}, e^{ax}]$ - линейно зависима.

Попробуем для второго корня найти функцию, которая: 1) удовлетворяла бы уравнению 2 и при этом система функций была бы фундаментальной.

Будем искать решение в виде:

$$y = u(x)e^{ax}$$

Найдем производные:

$$y' = u'e^{ax} + uae^{ax},$$

$$y'' = u''e^{ax} + u'ae^{ax} + u'ae^{ax} + ua^2e^{ax} =$$

$$= u''e^{ax} + 2u'ae^{ax} + ua^2e^{ax}.$$

Подставим их в уравнение 2: $y'' + p_1y' + p_2y = 0$:

$$u''e^{ax} + 2u'ae^{ax} + ua^2e^{ax} + p_1u'e^{ax} + p_1uae^{ax} +$$

$$+ p_2ue^{ax} = 0.$$

Сократим на e^{ax} и сгруппируем:

$$u'' + u'(\underline{2a + p_1}) + u(\underline{\underline{a^2 + p_1 a + p_2}}) = 0.$$

Так как a – корень характеристического уравнения, то выражение, подчеркнутое двумя линиями: $a^2 + p_1 a + p_2 = 0$.

В силу теоремы Виета: $\lambda_1 + \lambda_2 = -p_1$, тогда:

$2a = -p_1 \Rightarrow 2a + p_1 = 0$.

Следовательно: $u'' = 0$. Решаем его последовательным интегрированием:

$u' = c_1 \Rightarrow u = \int c_1 dx + c_2 = c_1 x + c_2$.

Пусть $c_1 = 1$, $c_2 = 0 \Rightarrow u = x$, имеем:

λ_1 соответствует e^{ax},

λ_2 соответствует xe^{ax},

$$W\left[e^{ax}, xe^{ax}\right] = \begin{vmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ ae^{ax} & e^{ax} + xae^{ax} \end{vmatrix} = e^{ax} \neq 0$$

Построенная таким образом система функций является фундаментальной системой решений, тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{oo} = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} = e^{ax}(c_1 + c_2 x).$$

Если встречаются кратные корни, то фундаментальная система строится таким образом: первому корню ставится e^{ax}, а каждому последующему корню – предыдущая функция, умноженная на x.

Пример.

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Решение ищем в виде:

$$y = e^{\lambda x}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$

$(\lambda - 1)^2 = 0,$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1,$

$\lambda_1 = 1$ соответствует e^x,

$\lambda_2 = 1$ соответствует xe^x,

Тогда:

$$y_{oo} = c_1 e^x + c_2 x e^x = e^x(c_1 + c_2 x).$$

Третий случай.

Корни мнимые: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

<u>**Лемма 1.**</u> Если $y = u(x) + v(x)i$ – решение уравнения $L[y] = 0$, то:

$u(x)$ – решение $L[u] = 0$,

$v(x)$ – решение $L[v] = 0$,

Доказательство.

$L[y] = L[u + iv] = L[u] + L[iv] = L[u] + iL[v]$ – в силу линейности оператора.

Так как $L[y] = 0 \Rightarrow L[u] + iL[v] = 0 \Rightarrow L[u] = 0$, $L[v] = 0$.

Ч.т.д.

Формулы Эйлера.

Они связывают функции комплексного аргумента e^z, $\cos z$, $\sin z$, где $z = a + bi$ или $z = a - bi$. Они имеют вид:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$$

где: ϕ - действительное число.

Частные решения в случае комплексных корней.

$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ соответствует $e^{(\alpha + \beta i)x}$,

$\lambda_2 = \alpha - \beta i$ соответствует $e^{(\alpha - \beta i)x}$,

По формулам Эйлера имеем:

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x}e^{\beta x i} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x}e^{-\beta x i} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

λ_1 соответствует $e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$,
λ_2 соответствует $e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$,
То есть: $e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$ - решение.
Тогда в силу леммы:
$e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ - также решения. Имеем две функции.
$W[e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x] \neq 0$,
Значит систему двух функций можно считать фундаментальной.
$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ соответствует $e^{\alpha x}\cos\beta x$,
$\lambda_2 = \alpha - \beta i$ соответствует $e^{\alpha x}\sin\beta x$,
Тогда:
$$y_{oo} = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

Пример.

$$y'' + y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm 1i = \pm i.$

Следовательно:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = +i$ соответствует $\cos x$,
$\lambda_2 = -i$ соответствует $\sin x$,
Тогда:

$$y_{oo} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

§ 2. Построение решений ОЛДУ в общем случае.

Корни характеристи-ческого уравнения	Вид слагаемого в общем решении
λ - действительный корень	$ce^{\lambda x}$
λ - действительный корень кратности k	$(c_0 + c_1x + c_2x_2 + \ldots + + c_{k\text{-}1}x_{k\text{-}1})e^{\lambda x}$
$\alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней	$e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$
$\alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности k	$e^{\alpha x}[(C_0 + C_1x + \ldots + + C_{k\text{-}1}x_{k\text{-}1})\cos\beta x + + (D_0 + D_1x + \ldots + + D_{k\text{-}1}x_{k\text{-}1})\sin\beta x]$

§ 3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (5)$$

или

$$L[y] = f(x). \qquad (6)$$

Для дифференциального уравнения (5) ставится Задача Коши:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

При рассмотрении уравнений (5) используют:

<u>**Теорема 1.**</u> Если $\widetilde{y}(x)$ - есть решение уравнения $L[y] = f(x)$, а $y_0(x)$ - есть решение уравнения $L[y] = 0$, то $\widetilde{y}(x) + y_0(x)$ - есть решение $L[y] = f(x)$

Доказательство.

Применим линейный оператор:

$$L[\,\tilde{y}(x)+y_0(x)] = \underset{f(x)}{\underset{\parallel}{L[\,\tilde{y}(x)\,]}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{L[y_0(x)]}} = f(x).$$

Ч.т.д.

<u>**Замечание.**</u> Из теоремы 1 следует, что сумма любого решения неоднородного уравнения и любого решения однородного уравнения, есть решение неоднородного уравнения.

<u>Теорема 2.</u> Если $y_1(x)$ – решение $L[y] = f_1(x)$, а функция $y_2(x)$ – решение $L[y] = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ – есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Доказательство.

Применим линейный оператор L к сумме $y_1 + y_2$:
$L[y_1+y_2]=L[y_1] + L[y_2]$ = по условию $= f_1(x)+ f_2(x)$.

Ч.т.д.

<u>Замечание.</u> Из теоремы видно, что решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ можно найти, решая уравнения $L[y_1] = f_1(x)$, $L[y_2] = f_2(x)$, путем сложения $y = y_1 + y_2$.

Теорема 3. Если $u(x) + v(x)i$ – есть решение уравнения $L[y] = u(x) + v(x)i$, где $u(x)$ и $v(x)$ – действительные функции, то $u(x)$ и $v(x)$ есть решение уравнений $L[y] = U$, $L[y] = V$ соответственно.

Без доказательства.

Теорема 4. (***О структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения***). Общее решение уравнения

$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$, где:

1) $a < x < b$,

2) $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции,

4) $|y^{(k)}| < +\infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$,
выражаются формулой:

$$y_{он} = y_{чн} + y_{оо},$$

где: $y_{он}$ – общее решение неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$,

$y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$,

$y_{оо}$ – общее решение однородного уравнения $L[y] = 0$.

Без доказательства.

§ 4. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (НЛДУ).

Схема построения решения. Метод подбора.

$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$ – НЛДУ.

Схема построения общего решения.

1) Рассмотрим однородное уравнение: $L[y] = 0$.

2) Для однородного уравнения составляем характеристический многочлен $P_n(\lambda) = 0$ и находим корни: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3) Записываем фундаментальную систему решений, т.е. систему $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$.

4) Строим общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

5) Находим какое-либо одно решение $\tilde{y}(x)$, такое что: $L[\tilde{y}] = f(x)$

$$y_{чн} = \tilde{y}(x)$$

6) В соответствии с теоремой 4:

$$y_{он} = y_{чн} + y_{oo} = \sum_{k=1}^{n} (c_k \varphi_k + \tilde{y}(x_0))$$

Применение метода подбора.

I. Рассмотрим: $L[y] = P_m(x)$ – правая часть многочлен.

Характеристическое уравнение: $P_n(\lambda) = 0$, находим корни: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и записываем y_{oo}.

При отыскании $y_{чн}$ необходимо обращать внимание на корни характеристического уравнения. Возможны два случая:

а) среди корней характеристического уравнения нет нулевых, тогда: $y_{чн} = Q_m(x)$ с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты этого многочлена определяются по методу неопределенных коэффициентов, после подстановки в исходное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x.

б) Среди корней характеристического уравнения есть нулевые корни кратности r.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, тогда $y_{чн} = x^r Q_m(x)$, где:

$Q_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$.

Нахождение коэффициентов производится методом неопределенных коэффициентов:

$$L[x^r Q(x)] = P_m(x).$$

II. Рассмотрим: $L[y] = e^{\alpha x} P_m(x)$, $\alpha \in R$.

Самостоятельно.

Обобщение метода подбора

Тип	Правая часть дифференциального уравнения	Связь с корнями характеристического уравнения	Вид частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}$
I	$P_m(x)$ - многочлен	*а*) 0 не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами
		б) 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r Q_m(x)$
II	$e^{\alpha x} P_m(x)$ α – действительное число	*а*) α не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x)e^{\alpha x}$
		б) α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r Q_m(x) e^{\alpha x}$
III	$e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x +$ $+ P_s(x)\sin\beta x)$ $m \neq s$	*а*) $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}(\underline{Q}_p(x)\cos\beta x +$ $+ \quad \overline{Q}_p(x)\sin\beta x)$, где: $p = \max\{m,s\}$
		б) $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x}(\underline{Q}_p(x)\cos\beta x +$ $+ \quad \overline{Q}_p(x)\sin\beta x)$, где: $p = \max\{m,s\}$

Если в линейном дифференциальном уравнении имеются переменные коэффициенты или правая часть не имеет специального вида, то применяют другие методы.

§ 5. Метод вариации произвольных постоянных (*n* = 2)

Пусть $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$ (7)

где $f(x)$ не является правой частью специального вида, $p(x)$ и $q(x)$ – дифференцируемы на $[a,b]$.

Рассмотрим кроме (7) уравнение:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{8}$$

которое является однородным.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения, то:

$$y_{oo} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Чтобы найти общее решение (7) Лагранж предложил метод вариации: искать

$$y_{он} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

где: $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – переменные, и накладывать на них ограничения. Найдем производную:

$$y'_{он} = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

Накладываем ограничения и требуем, чтобы

$$c_1' y + c_2' y_2 = 0$$

тогда

$$y'_{он} = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

Находим теперь вторую производную:

$$y''_{он} = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y'_2 + c_2 y_2''$$

Подставим $y_{он}$, $y'_{он}$ и $y''_{он}$ в уравнение (7), имеем

$$c_1 y_1' + c_1 y_1'' + c'_2\, y_2' + c_{\,2} y'' + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') +$$

$$+ q(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

Группируя, получаем:

$$c_1' y_1' + c'_2\, y_2' +$$

$$+c_1\underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_{=0} + c_2\underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_{=0} = f(x)$$

В итоге:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

Составим систему уравнений из ограничения и полученного последнего уравнения.

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Полученная система линейна относительно неизвестных c_1' и c_2'.

Определитель Вронского для этой системы:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Решаем данную систему по методу Крамера:

$$\tilde{n}_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \varphi_1(x); \quad \tilde{n}_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \varphi_2(x);$$

Отсюда, решая дифференциальные уравнения, получаем:

$$\tilde{n}_1 = \int \varphi_1(x)dx + c_1^*$$

$$\tilde{n}_2 = \int \varphi_2(x)dx + c_2^*$$

Таким образом, окончательное решение имеет вид:

$$y_{\hat{\imath}\acute{\imath}} = \left(\int \varphi_1(x)dx + c_1^*\right)y_1 + \left(\int \varphi_2(x)dx + c_2^*\right)y_2$$

Пример. $y'' + y = tgx$

Запишем однородное уравнение:

$$y'' + y = 0$$

Это ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, т.к. из (7) $p(x) = 0$, $q(x) = 1$

Составляем соответствующее ему характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{12} = \pm i = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{1}_{\beta} i$$

Примечание: $e^{\alpha x} = e^{0x} = 1$

Тогда, общее решение однородного уравнения:

$$y_{\hat{\imath}\hat{\imath}} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Используем метод вариации произвольных постоянных, ищем общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{он} = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

Составляем систему уравнений и решаем её:

$$\begin{cases} c_1'\cos x + c_2'\sin x = 0 \\ -c_1'\sin x + c_2'\cos x = tgx \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot \sin x \\ \cdot \cos x \end{matrix} \right| \oplus$$

$$c_1'\cos x \sin x + c_2'\sin^2 x - c_1'\sin x \cos x + c_2'\cos^2 x = tgx\cos x$$

$$c_2' = tgx\cos x \Rightarrow c_2' = \sin x$$

$$c_2 = \int \sin dx + c_2^* = -\cos x + c_2^*$$

$$c_1' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$c_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx + c_1^* = -\int \frac{\sin^2 x(\cos x dx)}{\cos^2 x} + c_1^* =$$

$$= -\int \frac{\sin^2 x d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)} + c_1^* =$$

$$= [\sin x = t] = \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} + c_1^* = \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{(t^2 - 1)} dt + c_1^* =$$

$$= \int dt + \int \frac{1}{t^2 - 1} dt + c_1^* =$$

$$t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c_1^*=\sin x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+c_1^*$$

$$y_{\text{îí}}=\left(\sin x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+c_1^*\right)\cos x+$$
$$+\left(-\cos x+c_2^*\right)\sin x$$

$$y_{\text{îí}}=c_1^*\cos x+c_2^*\sin x+\frac{1}{2}\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|$$