

Тема: ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Понятие функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ из некоторого числового множества $D = \{(x; y)\}$ поставлено в соответствие согласно некоторому правилу f число z из множества Z , то говорят, что на множестве

D задана функция двух переменных $z = f(x; y)$.

При этом переменные x и y называются **независимыми переменными** (или аргументами).

Множество $D = \{(x; y)\}$ называется **областью определения**, а множество $Z = \{f(x; y) \mid (x; y) \in D\}$ – **множеством значений функции**.

Областью определения может быть вся плоскость OXY , или ее часть, ограниченная некоторыми линиями.

Линию, ограничивающую область, называют **границей области**.

Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними**. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой**.

Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой**, обозначается D .

Примером замкнутой области является круг с окружностью.

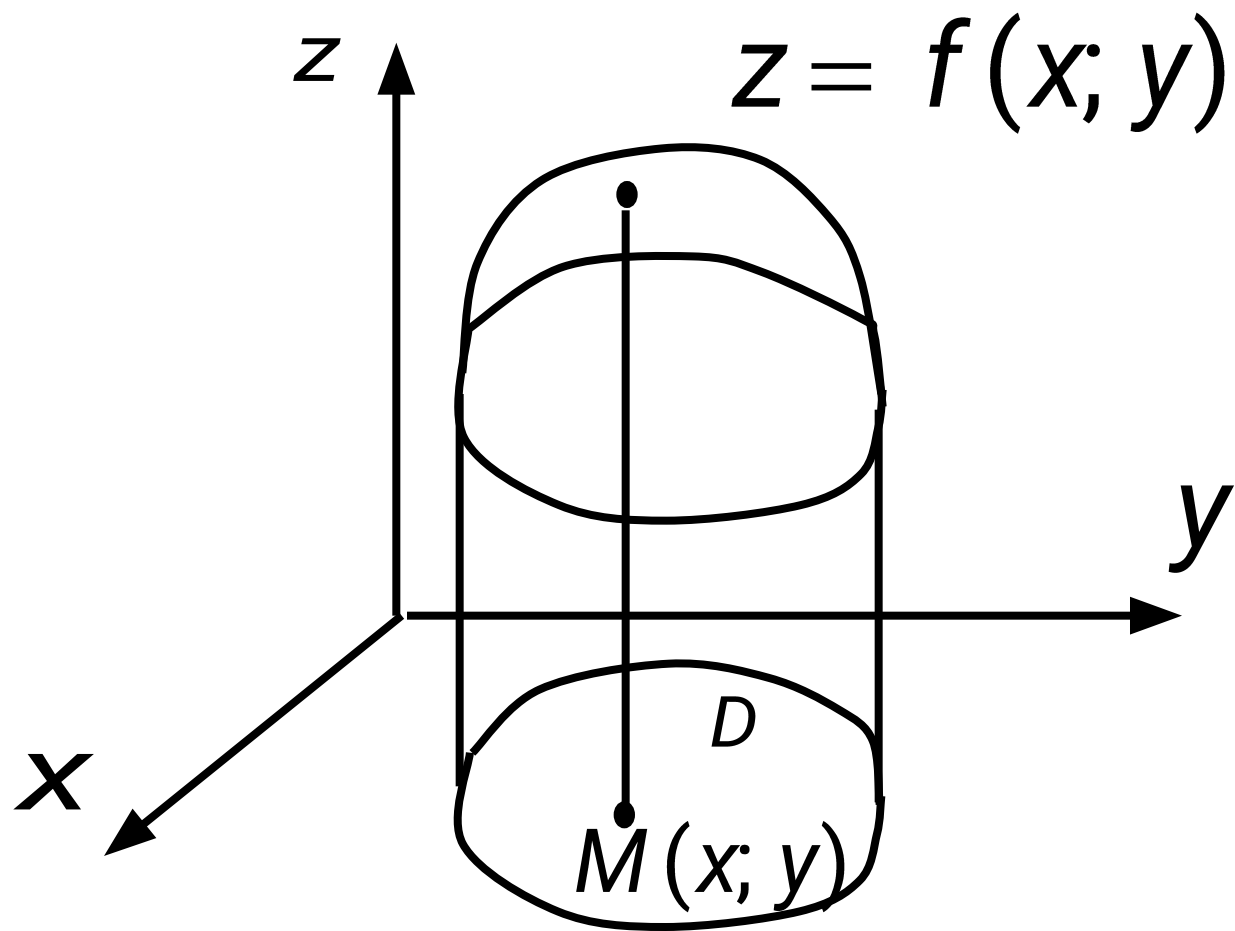
Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ и называется **частным значением функции**.

Пример.

Найти значение функции $z = x^2 y + 2x - 3y + 1$ в точке $M_0(1; -2)$.

Решение $z(1; -2) = 1^2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 1 =$
 $= -2 + 2 + 6 + 1 = 7.$

Графиком функции $z = f(x; y)$
называется поверхность, образованная
множеством точек пространства с
координатами $(x; y; f(x; y))$
для всех $(x; y) \in D$.



Пример

Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Решение. $1 - x^2 - y^2 \geq 0,$

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

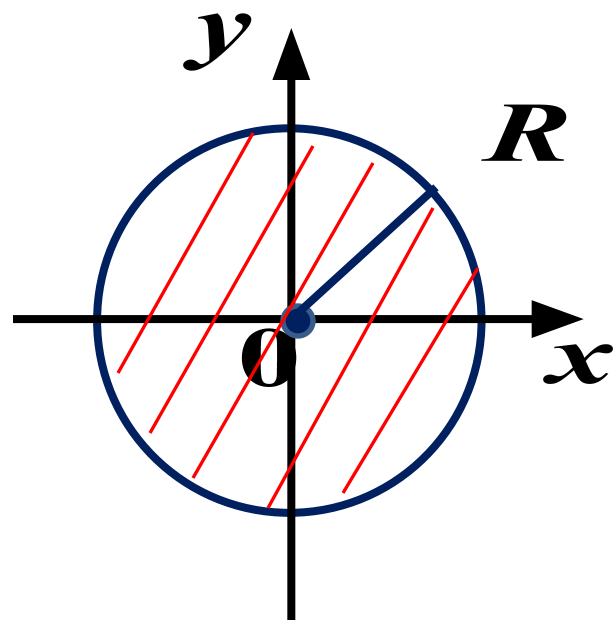
Построим линию $x^2 + y^2 = 1.$

Это окружность с центром в точке $O(0; 0)$

и

$$R = 1.$$

радиусом



Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами:

- таблицей,
- аналитически,
- графиком.

Будем пользоваться, как правило, аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

Величина u называется функцией n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если каждой совокупности $(x_1; x_2; \dots, x_n)$, переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ из некоторой области n -мерного пространства соответствует определенное значение u , что символически записывается

$$u = f(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Линии уровня

Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости OXY , в которых функция z принимает постоянное значение $f(x, y) = C$, где C – постоянная.

Число C в этом случае называется уровнем.

Многие примеры линий уровня хорошо известны и привычны.

Например, параллели и меридианы на глобусе — это линии уровня функций широты и долготы. Синоптики публикуют карты с изображением изотерм — линий уровня температуры.

Построение линий уровня оказывается существенно более легкой задачей, чем построение графиков самих функций.

§2. Предел и непрерывность функции 2-х переменных

ОПР. δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Т.е. δ -окрестность точки M_0 – это круг радиуса δ с центром в точке M_0

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (кроме M_0 может быть самой точки).

Опр. Число A называется **пределом функции** $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число δ , такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Записывают $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Опр. Функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0)$ если она:

- 1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;
- 2) имеет конечный предел
- 3) этот предел равен значению функции z в точке

$$M_0 : \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Геометрический смысл непрерывности очевиден: график в точке $M_0(x_0; y_0)$ представляет собой сплошную, нерасслаивающуюся поверхность.

ОПР. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется **непрерывной в этой области.**

§3. Частные производные ФНП

Частным приращением функции

$$z = f(x; y)$$

по независимой переменной x ,
соответствующим приращению Δx
переменной x , называется разность

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Частным приращением функции

$$z = f(x; y)$$

по независимой переменной y ,
соответствующим приращению Δy ,
переменной y , называется разность

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полным приращением функции $f(x; y)$

соответствующим приращениям
аргументов Δx и Δy , называется

разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Частной производной первого порядка функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x; y)$
по определению частная производная по x
равна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

частная производная по y равна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

**При нахождении частной
производной пользуются
правилами
дифференцирования
функции одной переменной,
считая все другие аргументы
постоянными.**

Пример

Найти частные производные первого порядка

$$z = 5x^3 + 3x^2y^5 - 4y^6.$$

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя данную функцию как функцию переменной x , находим частную производную по x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (5x^3)'_x + (3x^2y^5)'_x - (4y^6)'_x = \\ &= 5(x^3)'_x + 3y^5(x^2)'_x - 0 = \\ &= 5 \cdot 3x^2 + 3y^5 \cdot 2x = 15x^2 + 6xy^5.\end{aligned}$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию переменной y , находим частную производную по y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= (5x^3)'_y + (3x^2y^5)'_y - (4y^6)'_y = \\ &= 0 + 3x^2(y^5)'_y - 4(y^6)'_y = \\ &= 3x^2 \cdot 5y^4 - 4 \cdot 6y^5 = 15x^2y^4 - 24y^5.\end{aligned}$$

Частные производные второго порядка

Частными производными второго порядка функции называются частные производные, если они существуют, от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x; y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x; y),$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков.

Частные производные f''_{xy} , f''_{yx} , f'''_{xxy} называются **смешанными производными**.

Если функция дважды дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке смешанные производные равны.

§4. Полный дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$. Составим полное приращение функции в точке

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$
можно найти по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (1)$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Решение.

$$z'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Для функций произвольного числа переменных формула (1) принимает вид

$$dz(x; y; \dots, t) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

Для приближенных вычислений используют формулу

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \Delta y.$$