

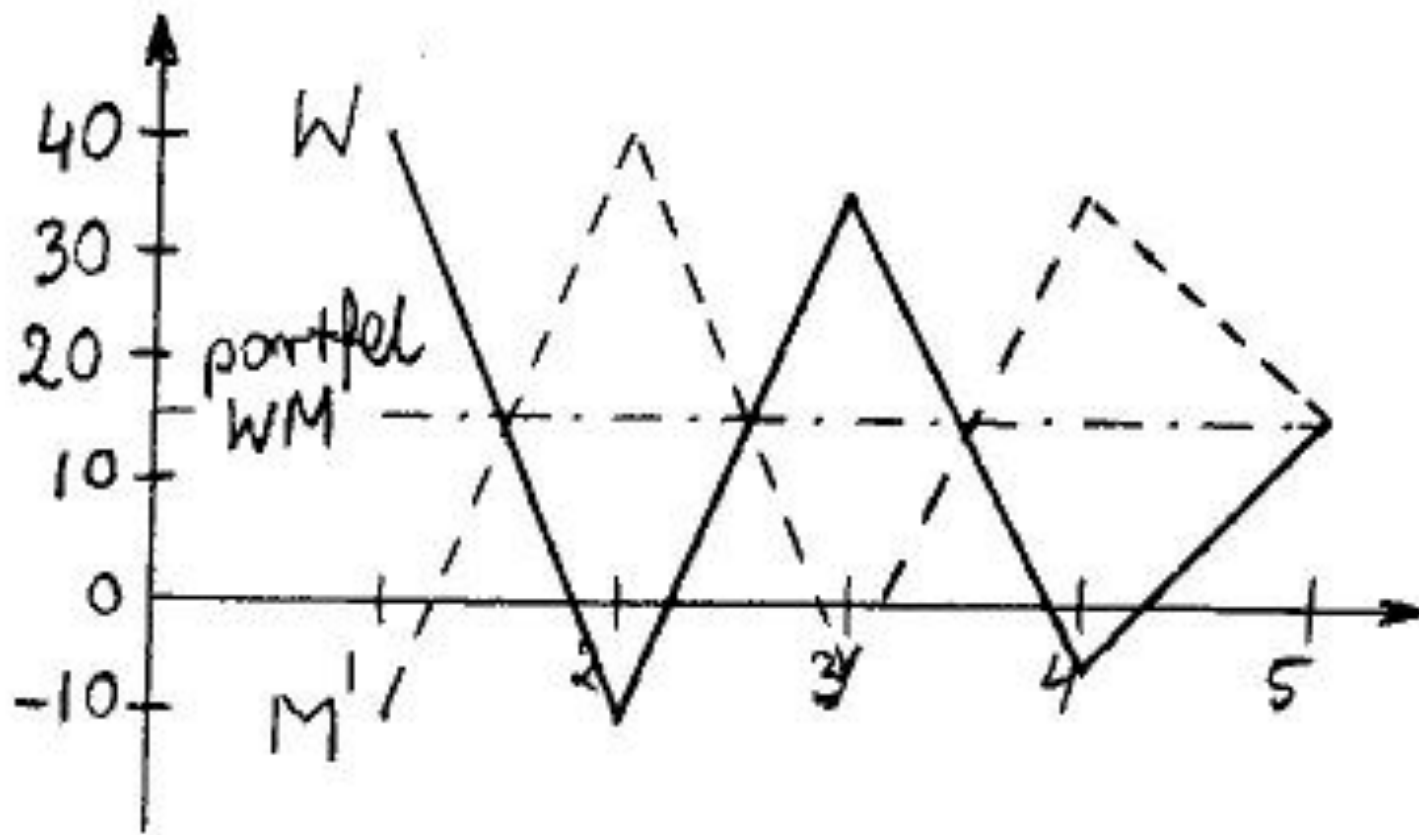
Тема 3. Управление финансовыми рисками на основе современной портфельной теории

1. Эффект портфеля.
2. Доходность и риск портфеля.
3. Определение портфеля с минимальным риском.
4. Понятие эффективных портфелей.
5. Определение оптимального портфеля инвестора.

1.

Доходности и риск акций и портфелей, %

Год	W	M	Портфель WM	W*	Портфель WW*	Y	Портфель WY
1	40	-10	15	40	40	28	34
2	-10	40	15	-10	-10	20	5
3	35	-5	15	35	35	41	38
4	-5	35	15	-5	-5	-17	-11
5	15	15	15	15	15	3	9
Средний доход	15	15	15	15	15	15	15
Среднее квадратиче ское отклонение	22,6	22,6	0	22,6	22,6	22,6	20,6



Если создать портфель из ценных бумаг W и M, доходности которых коррелируют абсолютно противоположно, по 50% каждой, то получим портфель свободный от риска.

Если доходности коррелируют абсолютно прямо пропорционально, то эффект портфеля равен нулю и риск портфеля равен риску отдельных бумаг.

Для портфеля WY среднее квадратическое отклонение уменьшается. То есть, если доходности коррелируют не абсолютно положительно $r_{AB} < 1$, в примере $r_{WY} = 0,65$, то риск портфеля меньше риска отдельных ценных бумаг. Достигается эффект портфеля.

Из этих примеров следует, что в одном предельном случае ($r = -1$) риск можно полностью элиминировать, в противоположном крайнем случае ($r = +1$) диверсификация риска не приносит пользы. Между этими крайними позициями ($r < 1$) объединение акций в портфель уменьшает, но не устраняет риск.

Гари Марковиц доказал, что даже если доходности ценных бумаг изменяются совершенно случайно и взаимно независимо, то создание портфеля из этих бумаг уменьшает риск инвестора. Он вывел граничное условие:

$$\sigma_p < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

где: σ – среднее квадратическое отклонение самой рискованной бумаги в портфеле;
n- число ценных бумаг в портфеле.

Если $n \rightarrow \infty$, то $\sigma \rightarrow 0$

То есть, чем больше разных активов в портфеле, тем меньше риск портфеля.

Таким образом **эффект портфеля обусловлен двумя факторами:**

1) Корреляцией между изменчивостями доходностей активов;

2) Числом разных активов в портфеле

2.

Из первого фактора следует, что для анализа портфеля важными являются два понятия: ковариация и корреляция. Ковариация является мерой связи вариаций двух случайных величин.

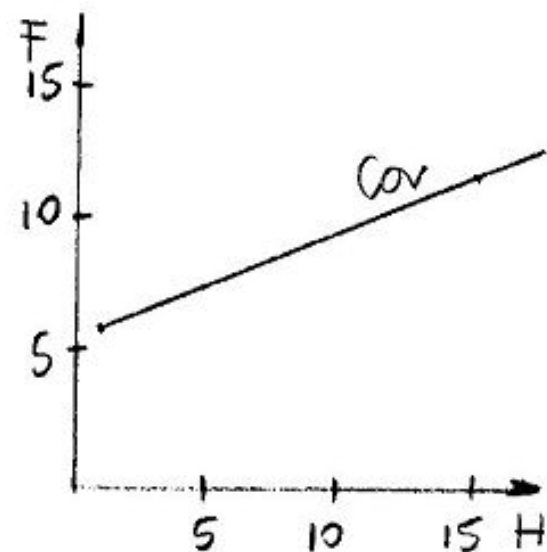
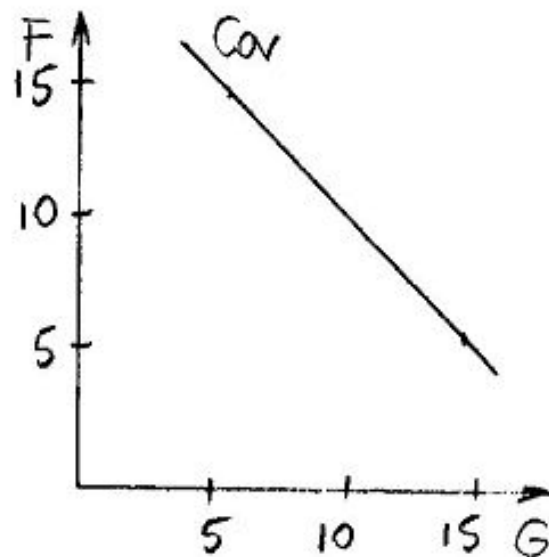
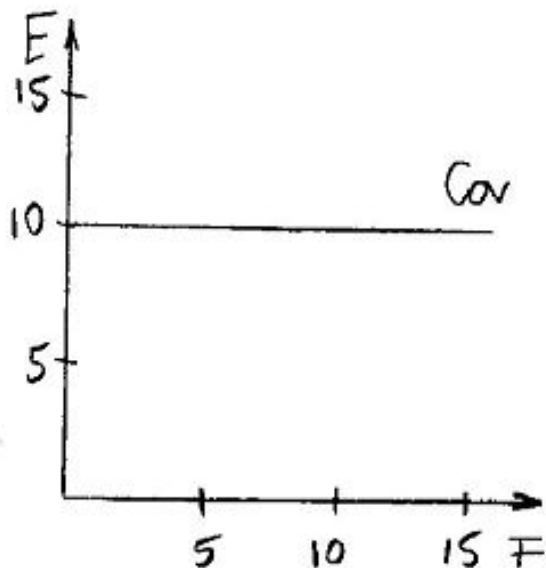
Например, ковариация между акциями А и В показывает, имеют ли доходности этих двух акций тенденцию к согласующимся изменениям и как велика связь этого согласования:

$$Cov(AB) = \sum (K_{Ai} - K_A)(K_{Bi} - K_B) \cdot P_i$$

Первый сомножитель под суммой Σ является отклонением доходности акции А от ее математического ожидания в отдельном сценарии, а второй сомножитель является отклонением доходности акции В от ее математического ожидания в соответствующем сценарии. P_i – вероятность i -го сценария.

Распределение вероятностей доходностей (норм прибыли) акций

Вероятность	Доходность (%)			
	Е	F	G	Н
0,1	10	6	14	2
0,2	10	8	12	6
0,4	10	10	10	9
0,2	10	12	8	15
0,1	10	14	6	20
Математическое ожидание	10	10	10	10
σ	0	2,2	2,2	5



1. Если A и B имеют одинаковое направление изменений, сомножители в скобках будут положительными либо отрицательными для каждого сценария. То есть, если KA_i больше средней KA , то KB_i будет тоже больше KB для данного i -го сценария и наоборот. Поэтому если доходности изменяются в одинаковом направлении и оба сомножителя в скобках будут позитивны или отрицательны, то произведение $(KA_i - KA)(KB_i - KB)$ будет положительно, зато, когда доходности изменяются в противоположных направлениях, произведение будет отрицательно. Если доходности акций подлежат случайным флуктуациям, то произведение будет иногда положительно и иногда отрицательно.

2. Когда доходность акции А или В подвержены большим колебаниям, тогда их стандартное отклонение высоко; сомножители в скобках также будут высокими, их произведение будет также высоко и абсолютная величина $Cov(A, B)$ будет также высока.

3. Если какая-либо акция имеет нулевое стандартное отклонение, а следовательно свободна от риска, то все ее отклонения ($K_i - K$) будут равны нулю. Подобно когда один вид активов полностью не свободен от риска но отягощен относительно низким риском, тогда его отклонения будут обычно низкими, что также уменьшит величину $Cov(A, B)$.

4. В связи с этим $Cov(A, B)$ будет высока и положительна, если оба вида активов имеют большое стандартное отклонение и являются взаимозависимыми; ковариация будет высока и отрицательна для двух активов с высокими σ , доходности которых изменяются в противоположных направлениях. Ковариация будет малой, когда доходы из обоих активов изменяются хаотично или, когда какие-либо активы имеют малые стандартные отклонения.

Пример вычисления ковариации:

$$\text{Cov}(FG) = (6-10)(14-10) \cdot 0,1 + (8-10)(12-10) \cdot 0,2 + (10-10)(10-10) \cdot 0,4 + (12-10)(8-10) \cdot 0,2 + (14-10)(6-10) \cdot 0,1 = (-4,8)$$

Коэффициент корреляции является относительной нормированной величиной и вычисляется по формуле:

$$r_{AB} = \frac{\text{Cov}(AB)}{\sigma_A \cdot \sigma_B}, \quad -1 \leq r \leq 1$$

$$r_{FG} = (-4,8) / (2,2 \cdot 2,2) = (-1) \text{ корреляция абсолютно отрицательная.}$$

Из этой формулы можно выразить ковариацию:

$$\text{Cov}(AB) = r_{AB} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$$

Доходность портфеля определяется как средняя арифметическая взвешенная:

$$K_p = \sum_{j=1}^n x_j \cdot K_j$$

Где: K_j – доходность актива j ;

x_j – удельный вес j -го актива в портфеле;

n – число активов.

Г. Марковиц доказал, что дисперсия портфеля определяется по формуле:

$$V_p = \sigma_p^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k \cdot x_j \cdot Cov(K_k K_j)$$

ИЛИ

$$V_p = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k \cdot x_j \cdot r_{kj} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_j$$

Случай портфеля, складывающегося из двух активов с характеристиками: $X_A, K_A, \sigma_A; X_B, K_B, \sigma_B$.

$$K_p = x_A \cdot K_A + x_B \cdot K_B$$

$$V_p = \sigma_A^2 \cdot 1 \cdot x_A^2 + \sigma_A \sigma_B r_{AB} x_A x_B + \sigma_A \sigma_B r_{AB} x_A x_B + \sigma_B^2 \cdot 1 \cdot x_B^2$$

$$V_p = \sigma_A^2 x_A^2 + \sigma_B^2 x_B^2 + 2\sigma_A \sigma_B r_{AB} x_A x_B$$

$$\sigma_p = \sqrt{V_p} = \sqrt{\sigma_A^2 x_A^2 + \sigma_B^2 x_B^2 + 2\sigma_A \sigma_B r_{AB} x_A x_B}$$

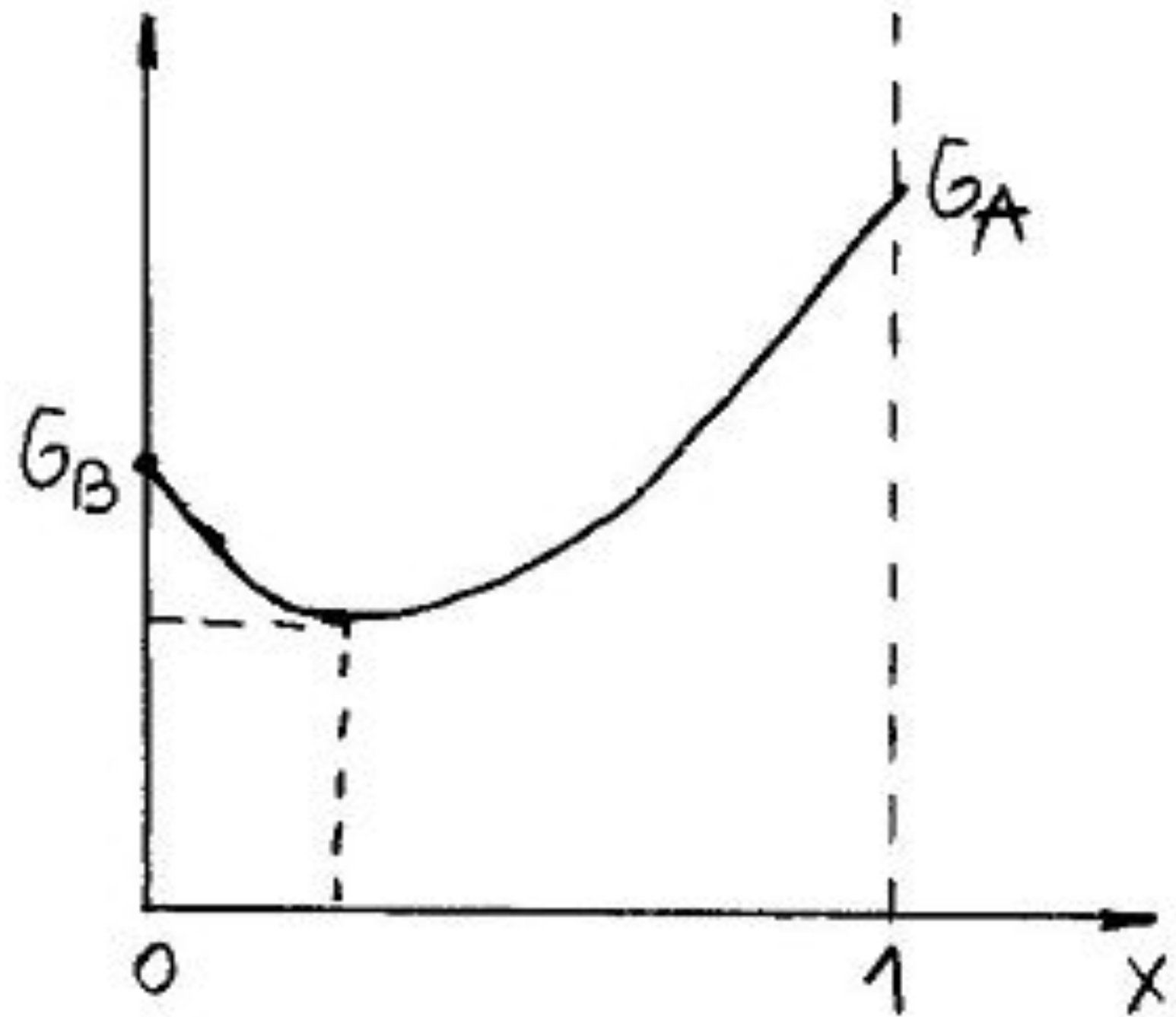
3.

Если: X – доля активов портфеля, инвестированных в актив А; и $(1 - X)$ – доля активов портфеля, инвестированных в актив В, то:

$$V_p = \sigma_A^2 x^2 + \sigma_B^2 (1 - x)^2 + 2\sigma_A \sigma_B r_{AB} x(1 - x)$$

$$V_p = x^2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B r_{AB}) - 2x(\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B r_{AB}) + \sigma_B^2$$

$$y = ax^2 - bx + c$$



Дисперсия доходности портфеля изменяется по параболе.

Теоретически существует портфель с минимальной степенью риска

Если дифференцируем уравнение и приравняем первую производную к нулю, а потом мы разрешим относительно X то мы получим часть портфеля, которая должна быть инвестирована в ценные бумаги А, чтобы получить портфель, отягощенный наименьшим риском.

$$X = \frac{\sigma_B(\sigma_B - r_{AB}\sigma_A)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2r_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

X находится в пределах от 0 до 1. Если значение решения $x > 1$, то тогда принимают $x = 1$, а если $x < 0$ то принимают $x = 0$.

Г. Марковиц выявил, что диверсификация эффективна если:

$$\sigma_A/\sigma_B - r_{AB} > 0 \text{ или } \sigma_B/\sigma_A - r_{AB} > 0;$$

$$\gamma = \min\{\sigma_A/\sigma_B, \sigma_B/\sigma_A\},$$

$$r_{AB} \in [-1, \gamma].$$

Если не выполняется последнее условие, то невозможно уменьшить риск за счет создания портфеля.

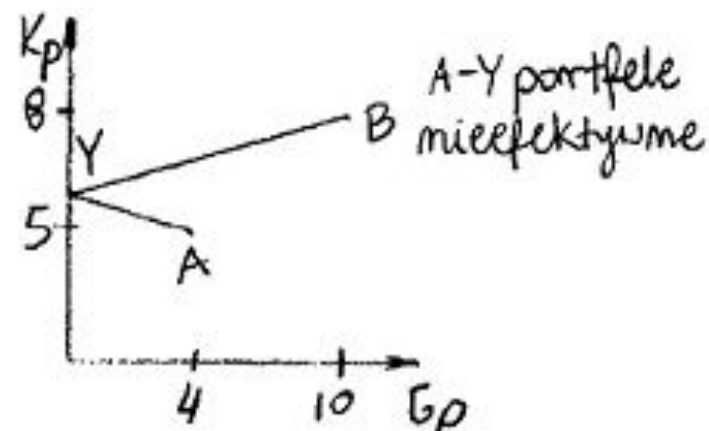
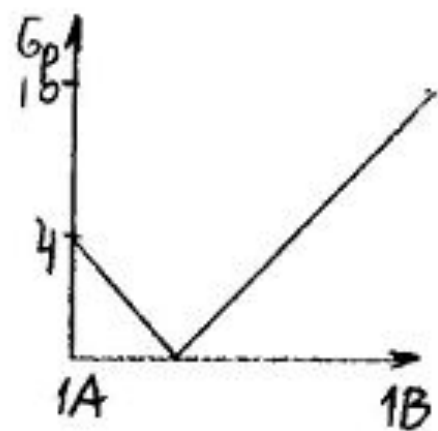
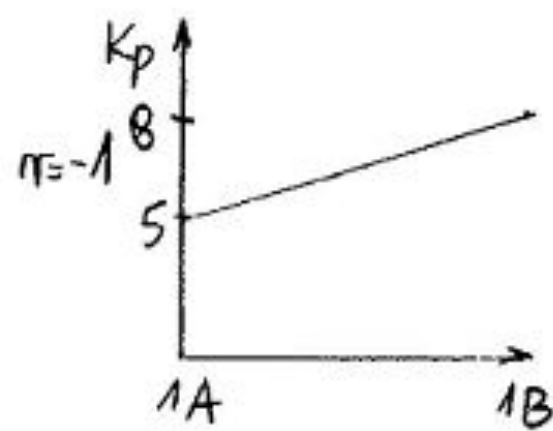
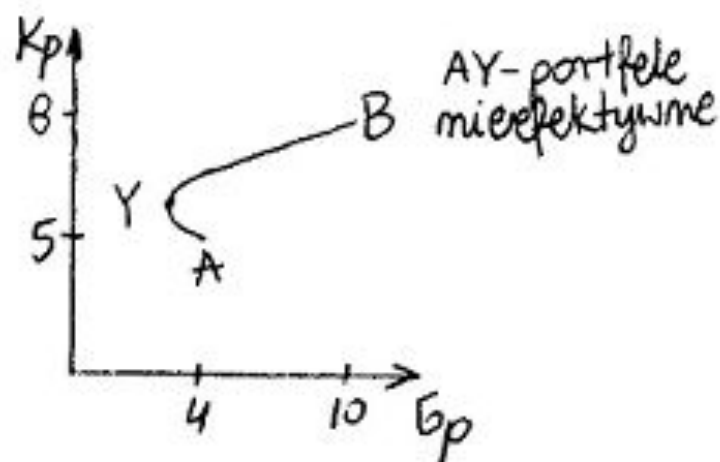
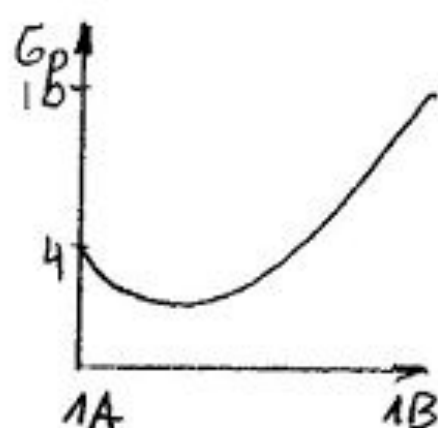
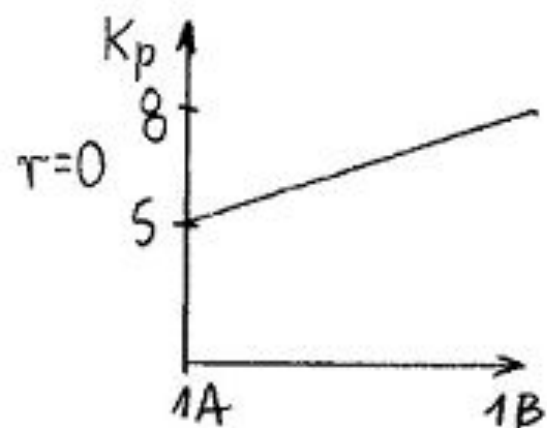
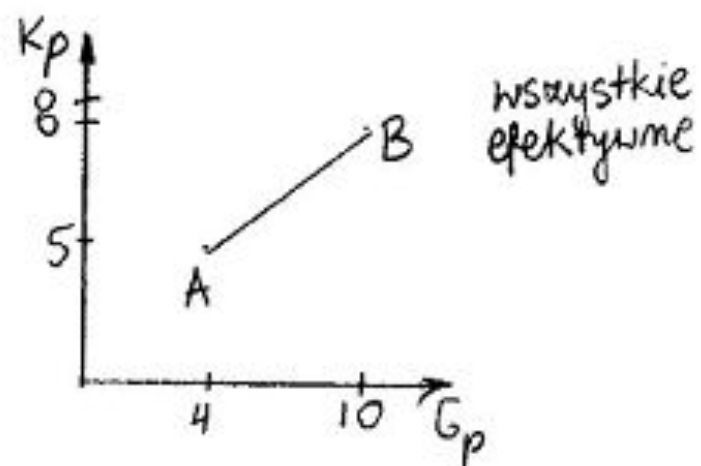
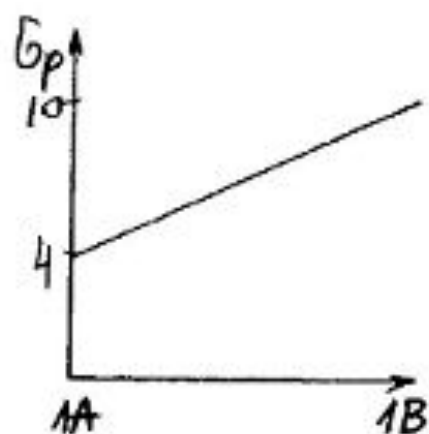
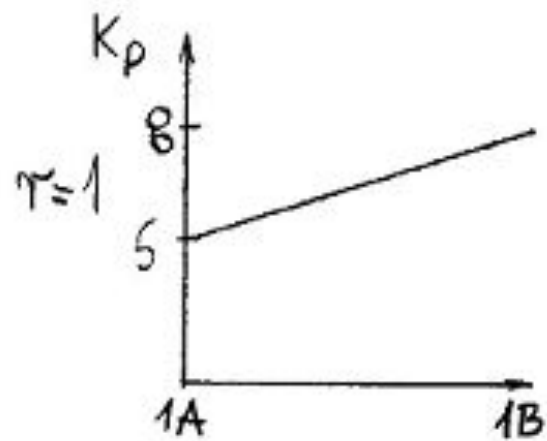
4.

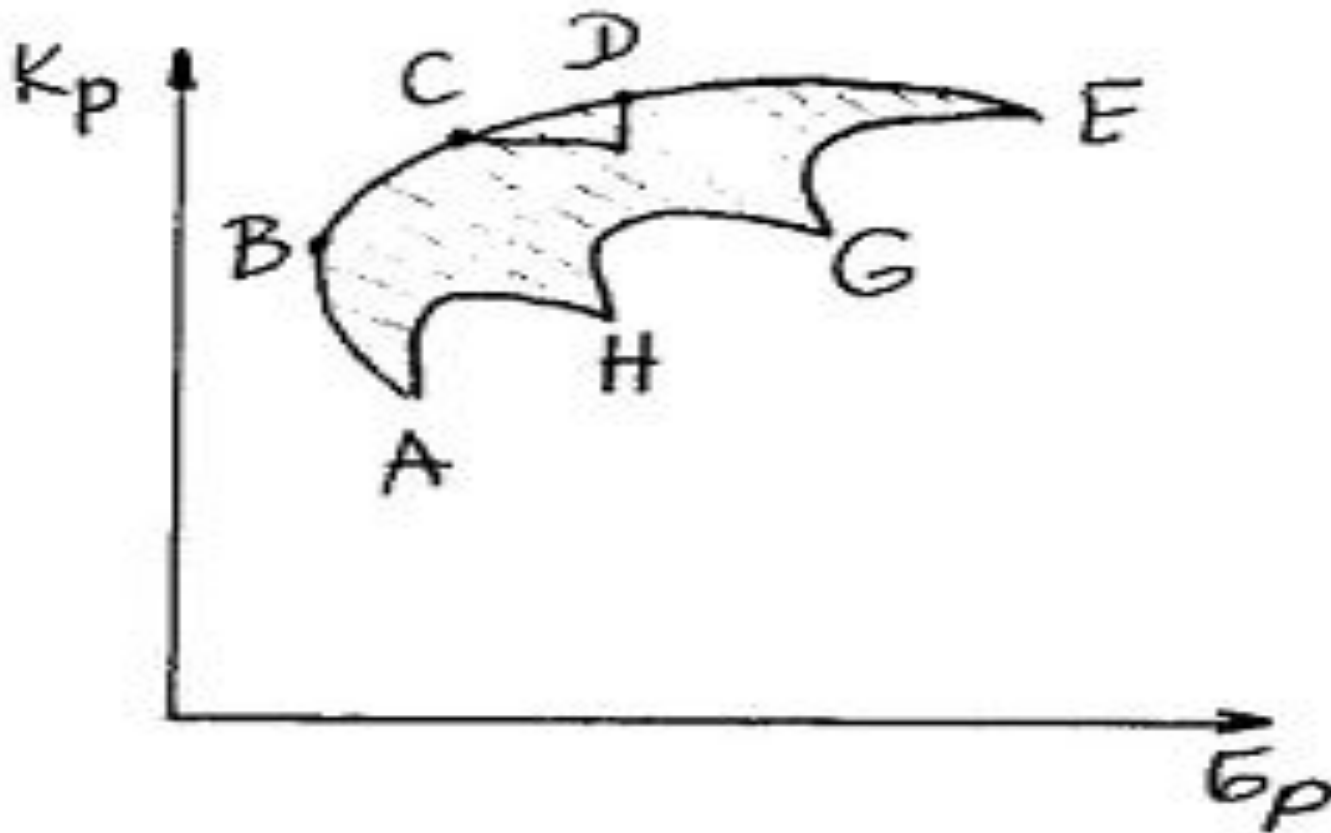
Важным применением статистических зависимостей, которое выше обсуждали, является выбор эффективных портфелей, сформулированных как портфели, которые обеспечивают наивысшую доходность, ожидаемую для данной степени риска, или самый низкий риск для данного ожидаемого уровня доходности.

Чтобы проиллюстрировать эту концепцию, примем что возможна инвестиция в две ценных бумаги А и В, а денежные средства можно размещать в произвольной пропорции.

Допустим, что ценная бумага А имеет $K_A=5$ $\sigma_A=4$, соответственно $K_B=8$, $\sigma_B=10$. Нашим первым заданием является определение набора возможных портфелей, а потом выбор из этого набора множества эффективных портфелей. С целью конструкции набора решений необходимы данные о корреляции между ожидаемыми доходностями обеих ценных бумаг - r_{AB} . Примем три разных варианта корреляции: $r_{AB} = -1$, 0 или $+1$ и применяя их, получим ожидаемые доходности портфелей (K_p), а также стандартные отклонения σ_p .

x_A	x_B	$r=+1$		$r=0$		$r=-1$	
		K_p	σ_p	K_p	σ_p	K_p	σ_p
1	0	5	4	5	4	5	4
0,75	0,25	5,75	5,5	5,75	3,9	5,75	0,5
0,5	0,5	6,5	7	6,5	5,4	6,5	3
0,25	0,75	7,25	8,5	7,25	7,6	7,25	6,5
0	1	8	10	8	10	8	10





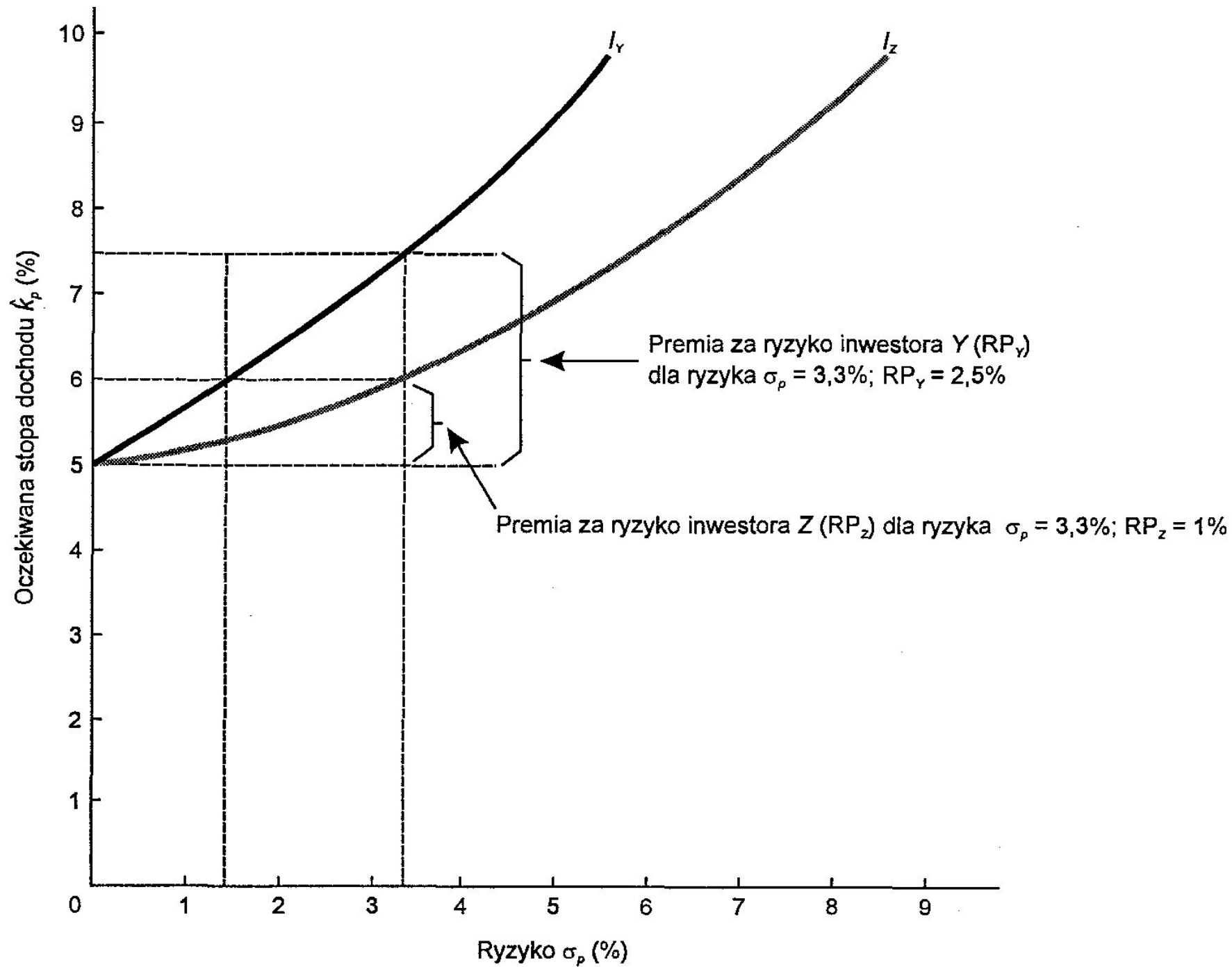
На рисунке пограничная линия BCDE определяет сбор эффективных портфелей; эта линия является границей эффективности. Портфели по левой стороне сбора эффективных портфелей не возможны, поскольку лежат вне допустимого множества. Портфели по правой стороне пограничной линии (внутренние портфели) неэффективны, потому что некоторые портфели обеспечили бы либо высшую доходность при той самой

5.

Кривые безразличия риск/доходность

Какой портфель должен выбрать инвестор, имея в распоряжении множество эффективных портфелей? Чтобы определить оптимальный портфель данного инвестора, мы должны знать отношение инвестора к риску, что можно представить с помощью функции выбора риск/доходность.

Функция выбора риск/доходность инвестора опирается на стандартных экономических понятиях теории полезности и кривых безразличия, которые показаны на рисунке. Кривые I_Y и I_Z представляют кривые безразличия лиц Y и Z . Госпожа Y обнаруживает безразличие относительно портфеля свободного от риска с 5-процентным доходом по отношению к портфелю с ожидаемым доходом 6% с риском $\sigma_p = 1,4$ и т.п. Господин Z одинаково доволен и 5-процентным доходом свободным от риска, и ожидаемым доходом 6% портфеля имеющего риск $\sigma_p = 3,3$.



Госпожа Y требует высшей ожидаемой доходности для уравниваемости данного уровня риска, следовательно можно констатировать, что госпожа Y имеет большее нежелание (антипатию) к риску чем господин Z . Эта антипатия к риску влечет, что госпожа Y требует большей премии за риск, что определяется здесь как разница между 5-процентным доходом свободным от риска и ожидаемым доходом, требуемым с целью компенсации определенного риска чем господин Z . Следовательно госпожа Y требует 2,5-процентной премии за риск (RP_Y), чтобы получить компенсацию за риск $\sigma_r = 3,3$. В то же время премия за риск господина Z для этой степени риска составляет только $RP_Z = 1$. Обобщая, чем больший угол наклона кривой безразличия, тем большее нежелание инвестора к риску. Следовательно госпожа Y имеет большее отвращение к риску чем господин Z . Каждый инвестор имеет множество кривых безразличия. Кривая, расположенная выше, определяет высший уровень удовлетворения (или полезности). Следовательно I_{Z2} лучше, чем I_{Z1} , поскольку для каждого уровня риска господин Z имеет высший ожидаемый доход, а следовательно и большую полезность

Бесконечное число кривых безразличия может быть начерчено для каждого инвестора, и каждый инвестор имеет неповторимый набор кривых.

Оптимальный портфель каждого инвестора определяется через точку касания одной из кривых безразличия инвестора и линии эффективных портфелей. Эта точка касания отмечает наивысший уровень удовлетворения, которое может достичь инвестор. Госпожа Y, которая имеет большее отвращение к риску чем господин Z, выбирает портфель с низшим ожидаемым доходом около 6% но риском, составляющим только $\sigma_p = 4,2\%$. Господин Z выбирает портфель, который дает ожидаемый доход, около 7,2% , однако он должен принять риск около $\sigma_p = 7\%$. Портфель госпожи Y включает большую долю акции с меньшей выгодой, зато большую часть портфеля господина Z составляет рисковнейшая ценная бумага.

Портфель госпожи Y заключал бы 67% акции A и 33% акции B, зато портфель господина Z – 27% акции A и 73% акции B. Доли акций в портфеле можно рассчитать с помощью уравнения путем проверки, какие веса обеспечивают $K_p = 6\%$ или 7,2%. Например, $X \cdot 5 + (1 - X) \cdot 8 = 7,2$. Решив уравнение относительно X, мы можем получить $X = 0,27$ и $(1 - X) = 0,73$.

