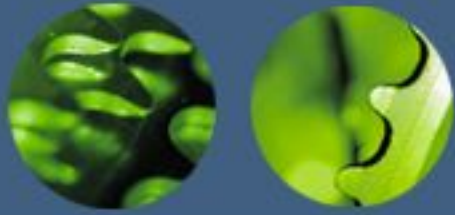




# Основы 3D-моделирования машиностроительных объектов

- Графические примитивы САД - систем.
- Структура трехмерных геометрических моделей объектов проектирования.
- Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей.



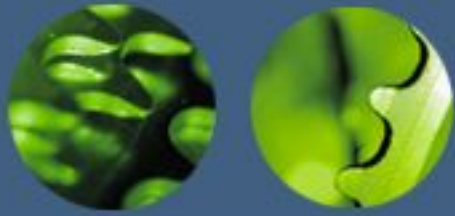
# Графические примитивы CAD - систем

Сложные геометрические модели в среде CAD-систем создаются из **графических примитивов** путем их комбинирования и выполнения логических операций над ними .

Под **графическими примитивами** понимаются простейшие графические объекты из которых состоит более сложное векторное изображение.

К графическим примитивам в CAD-системах относятся:

- Точки
- Отрезки прямых и бесконечные линии (лучи)
- Окружности и их дуги
- Эллипсы
- Кривые Безье и B-сплайны



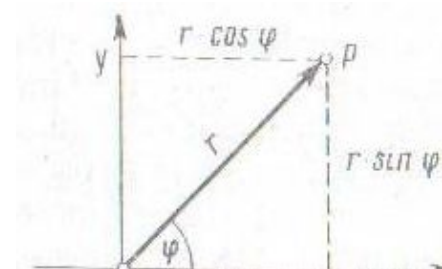
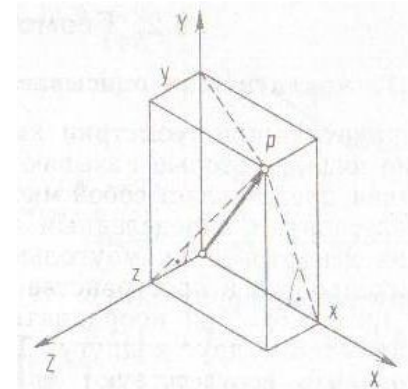
# Графические примитивы CAD - систем

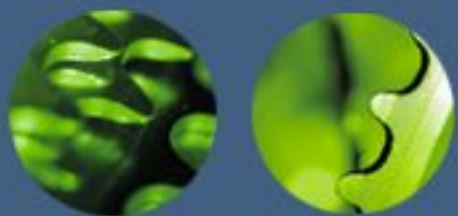
Описанные выше геометрические объекты сохраняются в графической базе данных (ГБД) системы в математической форме. Точки определяются численными значениями своих координат (X,Y,Z) или в ГБД, как массив данных размерностью 1 x 3.

$$T = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]$$

Значения координат точки могут быть заданы:

- Значениями координат путем с клавиатуры или указанием курсора на экране дисплея;
- Смещением относительно ранее определенной точки;
- Размещением с заданным интервалом вдоль некоторого геометрического элемента;
- Пересечением двух прямых и др.





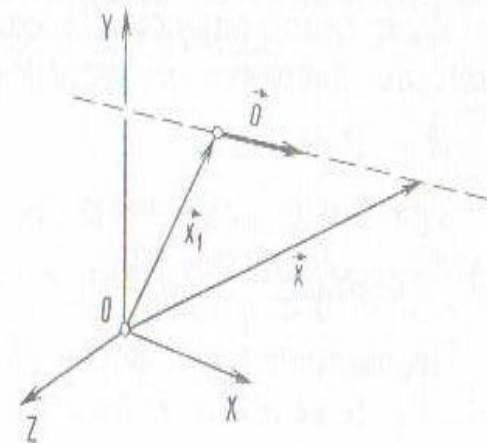
# Графические примитивы CAD - систем

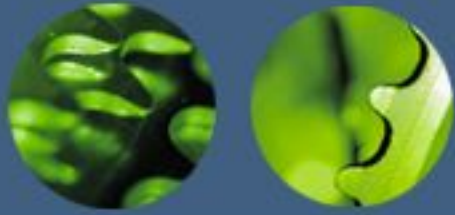
Прямые в ГБД определяются как матрица размерностью 2 x 3, задающая координаты X, Y, Z двух конечных точек этой линии.

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

Значения координат точек прямой могут быть определены путем прямого задания или вычислительными методами аналитической геометрии, как результат:

- Построения линии, проходящей через точку перпендикулярно или параллельно другой линии;
- заданием исходной точки и углами с осями координат или другими линиями;
- Построения нормали или касательной к некоторой кривой в заданной точке;
- Построения линии, касательной к двум кривым ;
- Построения линии, касательной к кривой и перпендикулярной или параллельной другой линии.





# Графические примитивы CAD - систем

Дуги и окружности в ГБД определяются путем прямого задания координат центра и радиуса.

Для дуг дополнительно задаются координаты конечной и начальной точек дуги.

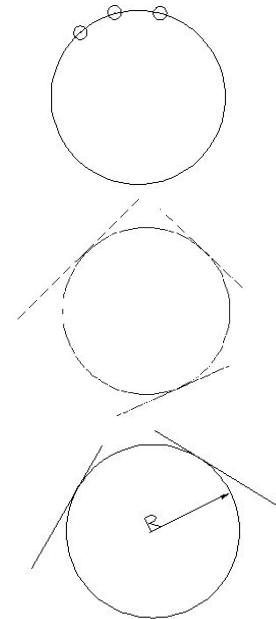
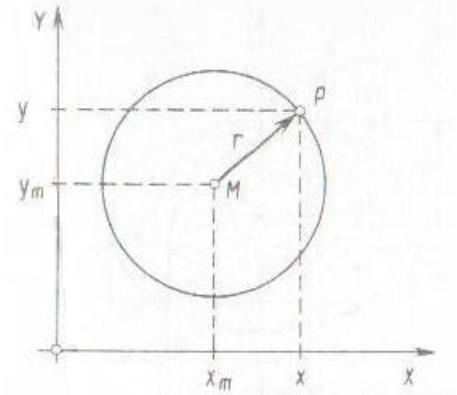
Параметрическое задание окружности или дуги имеет вид

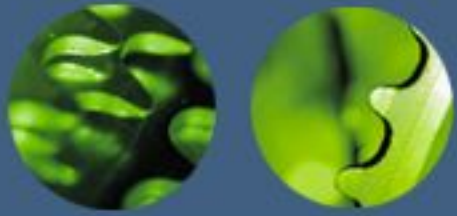
$$X = X_m + r \cos u;$$

$$Y = Y_m + r \sin u, \text{ где } 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Значения координат этих точек и радиуса могут быть определены методами аналитической геометрии, как результат:

- построения по трем заданным точкам;
- построением касательной к трем линиям;
- построения касательно к двум прямым или кривым линиям по заданному радиусу.





# Графические примитивы CAD - систем

## Эллипсы

Образуются при сечении цилиндрических и конических поверхностей плоскостью.

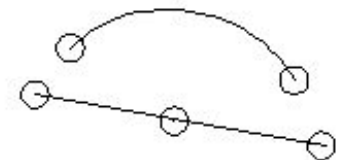
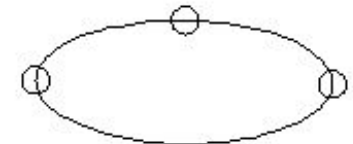
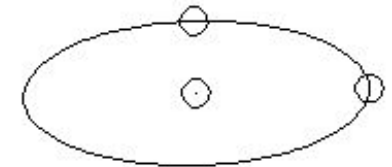
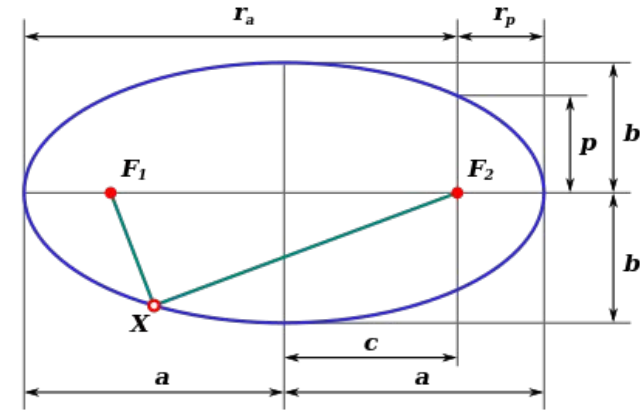
Параметрическое задание эллипса имеет вид

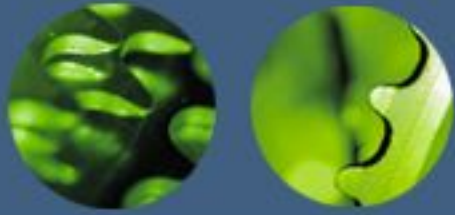
$$X = a \cos t;$$

$$Y = b \sin t, \text{ где } t \in [0; 2\pi ).$$

В CAD-системах эллипс задается двумя способами:

- заданием трех точек;
- заданием пяти точек на плоскости.





# Графические примитивы CAD - систем

**Кривая Безье** – параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad 0 < t < 1$$

где  $P_i$  - функция компонент векторов опорных вершин;

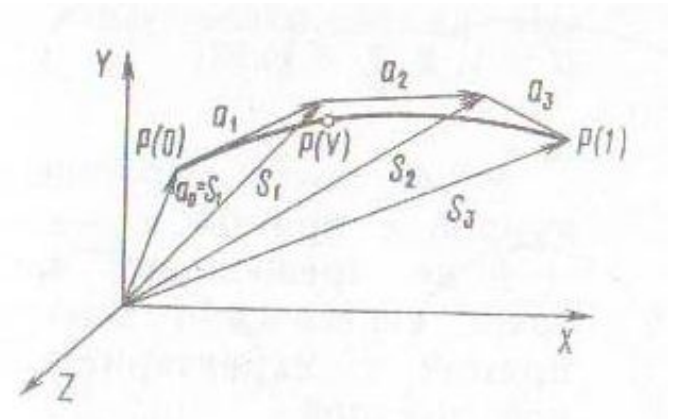
$b_{i,n}(t)$  - базисные функции кривой Безье, называемые также полиномами Бернштейна.

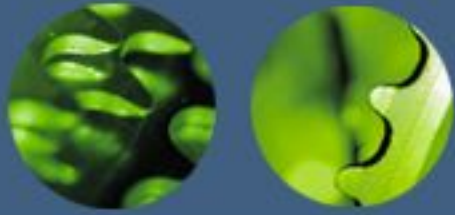
$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

где  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  — число сочетаний из  $n$  по  $i$ ,

где  $n$  - степень полинома;

$i$  - порядковый номер опорной вершины.





# Графические примитивы CAD - систем

Координаты кривой описываются в зависимости от параметра  $t \in [0, 1]$

Для двух точек ( $n=1$ ):

$$P = (1-t)P_0 + tP_1$$

Для трёх точек ( $n=2$ ):

$$P = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2$$

Для четырёх точек ( $n=3$ ):

$$P = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3$$

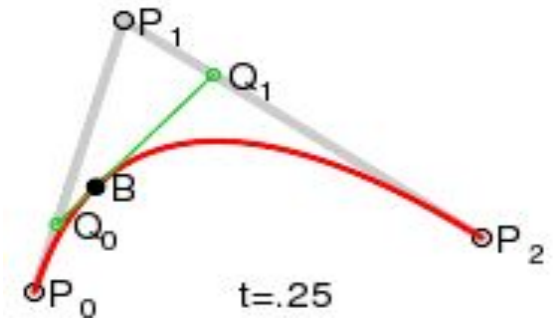
Вместо  $P_i$  нужно подставить координаты  $i$ -й опорной точки  $(x_i, y_i)$ .

Тогда для каждой из координат для трех точек:

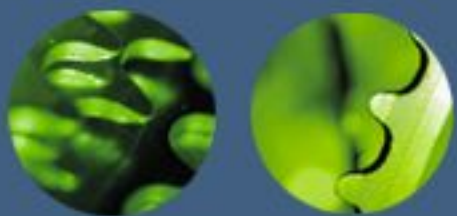
$$x = (1-t)^2x_0 + 2(1-t)tx_1 + t^2x_2$$

$$y = (1-t)^2y_0 + 2(1-t)ty_1 + t^2y_2$$

Вместо  $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$  подставляются координаты трёх опорных точек, и в то время как  $t$  пробегает множество от 0 до 1, соответствующие значения  $(x, y)$  как раз и образуют кривую.

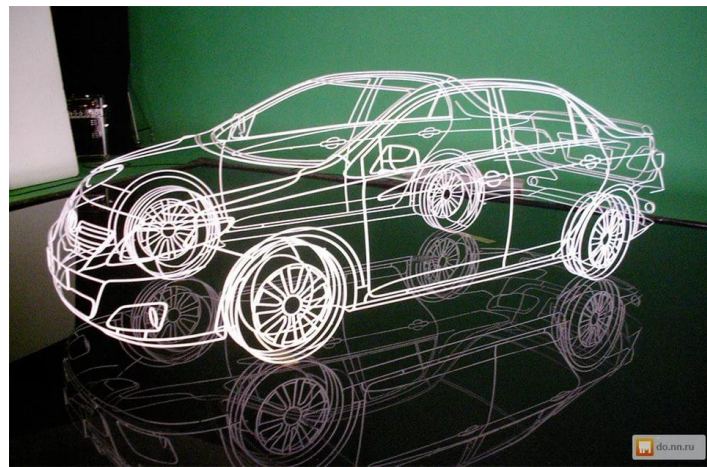
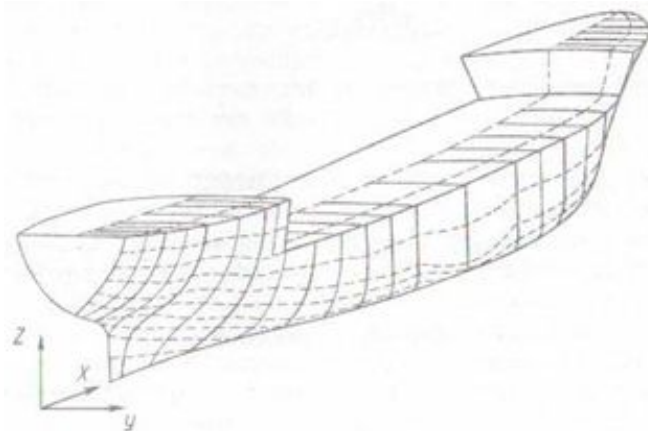
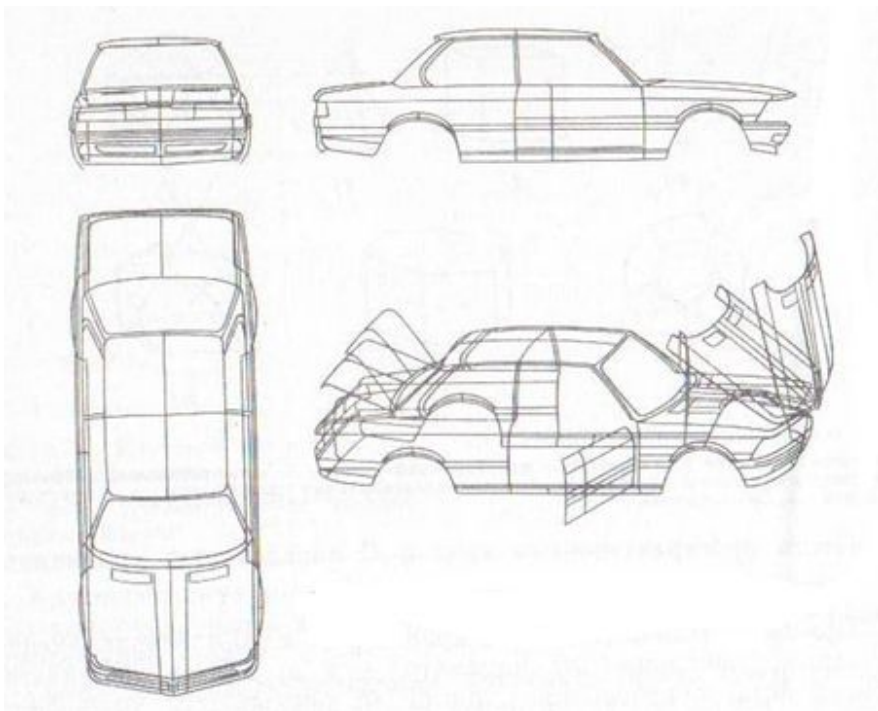


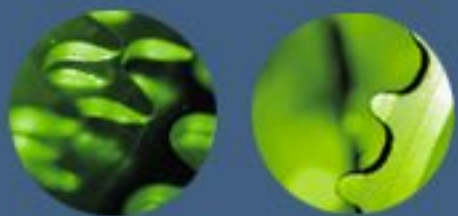




# Графические примитивы CAD - систем

**Кривые Безье и В-сплайны** преимущественно используются при моделировании поверхностей при проектировании кузовов автомобилей, корпусов судов и фюзеляжей самолетов.





# Структура трехмерных геометрических моделей

Под геометрическими моделями понимают модели, содержащие информацию о геометрической форме, размерах изделия, а также технологическую, функциональную и вспомогательную информацию.

Геометрические модели объектов могут быть представлены в виде:

- Проволочной модели;
- Полигональной (поверхностной) модели;
- Твердотельной (объемной) модели.

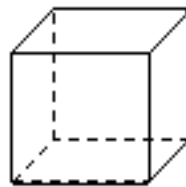


Рис. 1

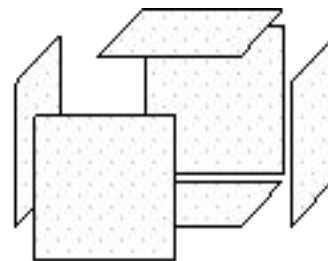


Рис. 2

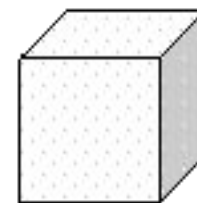
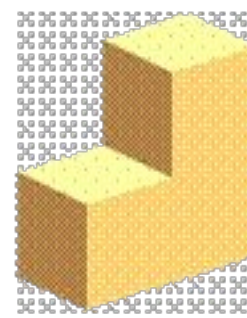
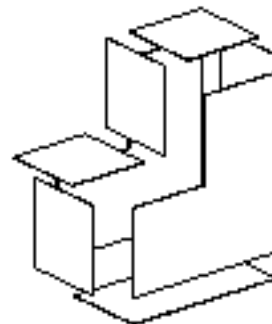
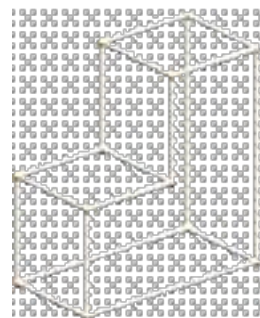
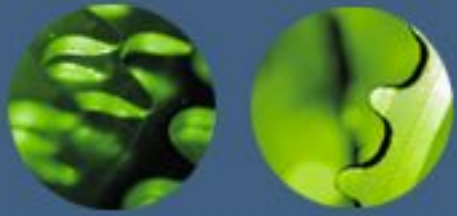


Рис. 3

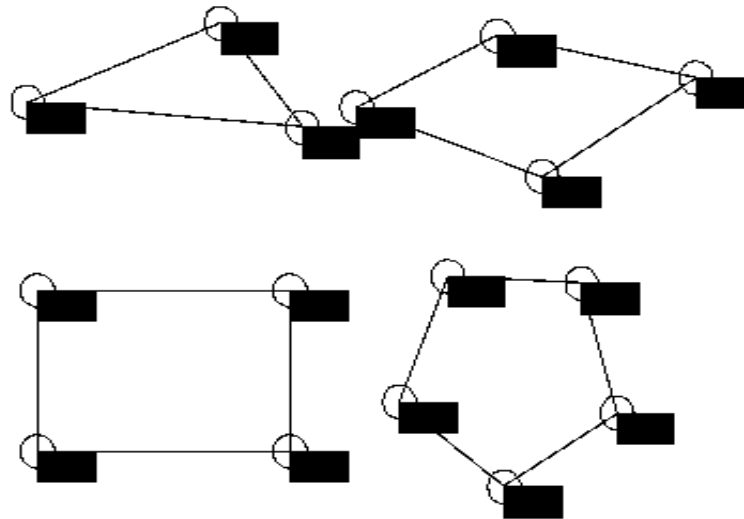


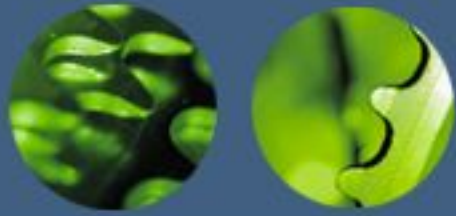


# Структура трехмерных геометрических моделей

Сложные геометрические модели создают из графических примитивов путем их комбинации.

Например, многоугольники определяются как замкнутая ломанная линия, состоящая из отрезков прямых, которые заданы множеством координат их начальных и конечных точек.





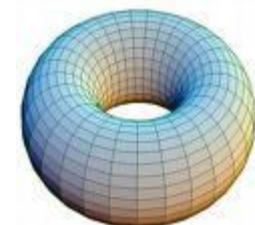
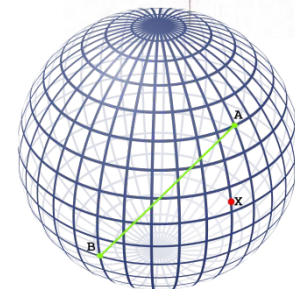
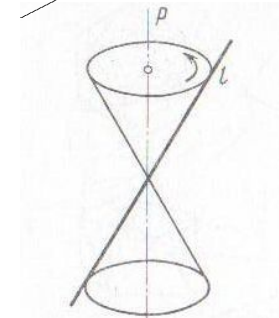
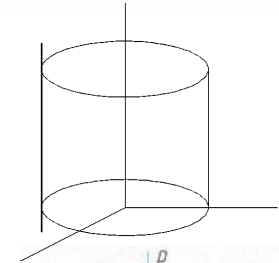
# Структура трехмерных геометрических моделей

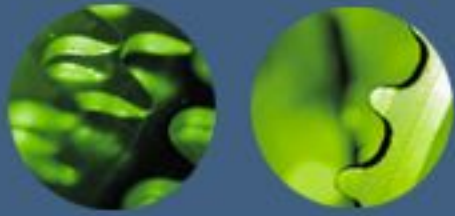
**Поверхности вращения получают путем поворота графических примитивов вокруг заданной оси. Например, цилиндр получают путем вращения отрезка прямой, который параллелен оси.**

**Конус, вращением отрезка, расположенного под углом к оси и пересекающегося с осью.**

**Сферу получают путем вращения дуги, лежащей в плоскости оси вращения.**

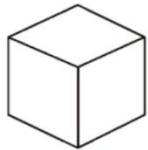
**Тороидальная поверхность (Тор) получается путем вращения окружности вокруг заданной оси вращения.**



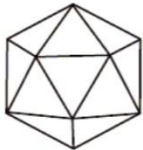


# Структура трехмерных геометрических моделей

Поверхности могут представлять собой области плоскостей, которые ограничены замкнутой ломанной линией. Используются для построения плоских граней многогранников (кубов, призм и др.).



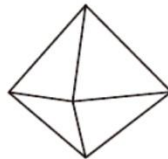
Куб



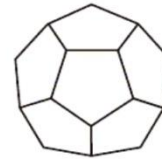
Икосаэдр



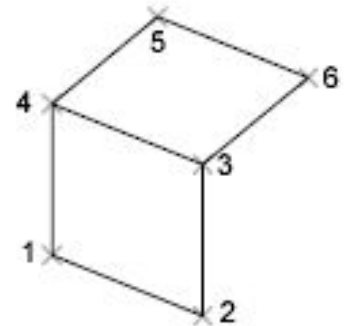
Тетраэдр



Октаэдр

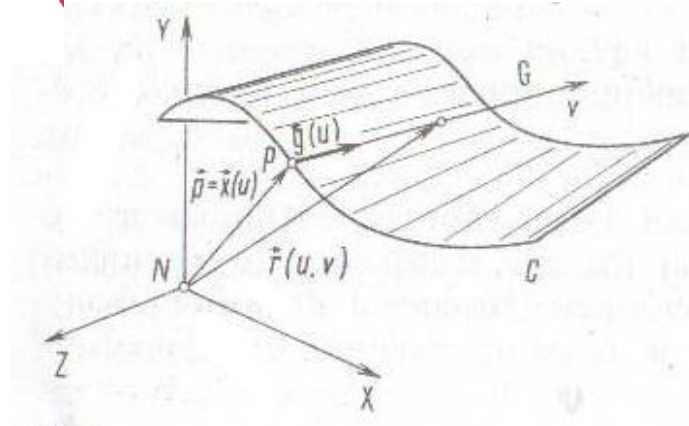


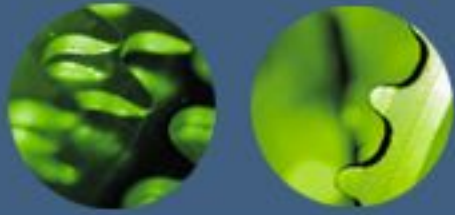
Додекаэдр



Наряду с плоскими поверхностями в САД системах используются линейчатые поверхности.

Линейчатую поверхность получают путем перемещения прямой ( $G$ ) вдоль пространственной кривой ( $C$  - директрисы).





# Структура трехмерных геометрических моделей

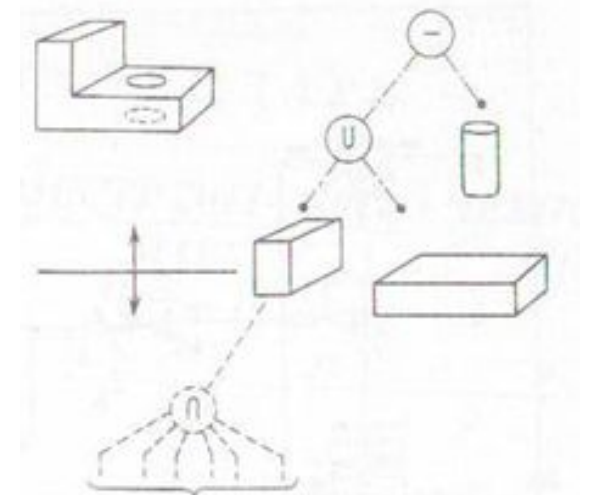
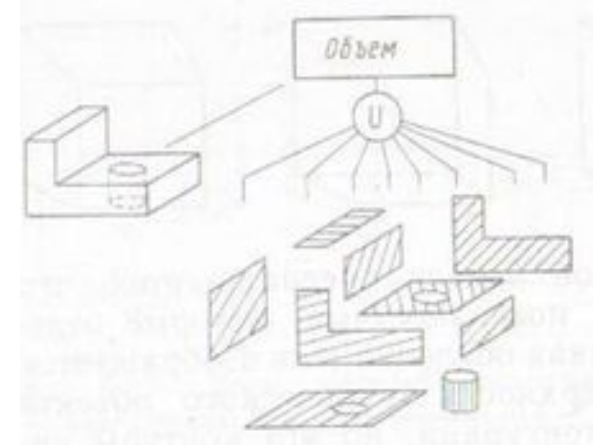
В современных САД – системах для конструирования изделий широко используются трехмерные твердотельные объекты (объемы).

Твердотельным считается тот объект, для которого существенно разграничение точек на внутренние и внешние.

Конструктивными элементами трехмерного объекта являются точка, контурный элемент и поверхность.

Объемы могут быть созданы:

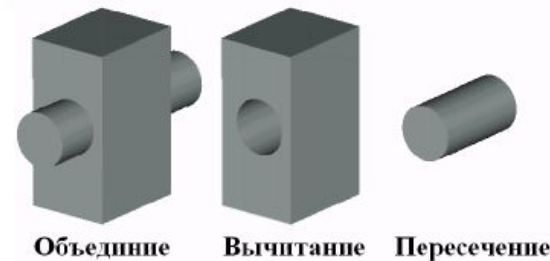
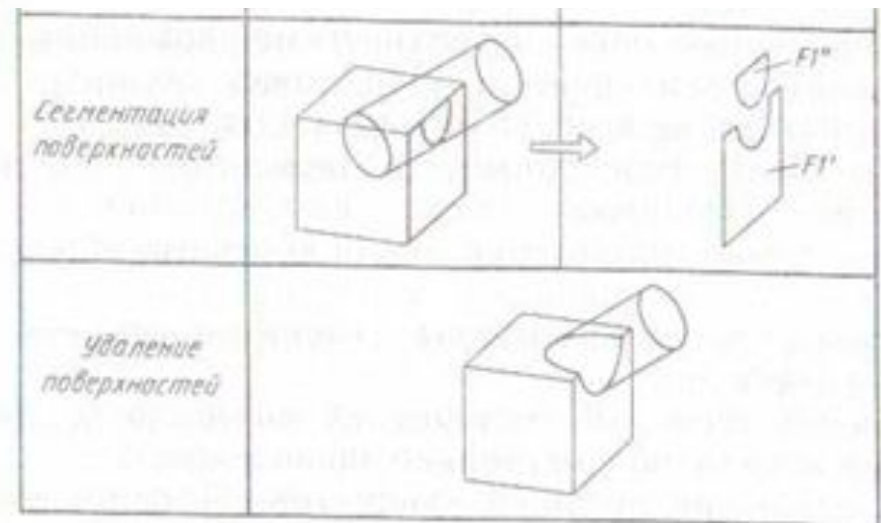
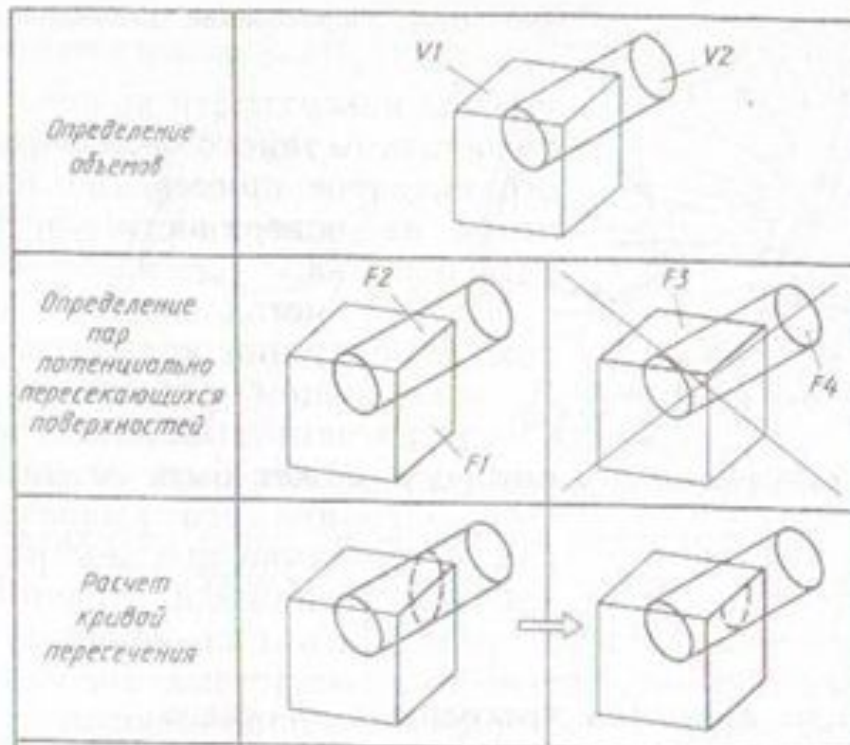
- как совокупность ограничивающих поверхностей;
- комбинацией элементарных объемов с использованием геометрических операций объединения, пересечения и разности.





# Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

Сложные трехмерные объекты могут быть получены путем выполнения операций объединения, пересечения и вычитания с более простыми объемами.



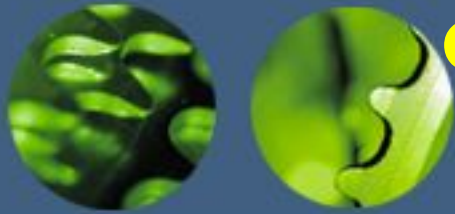


## Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

**При геометрическом синтезе и анализе 3D-моделей используются следующие операции:**

- **линейные перемещение геометрических моделей в пространстве;**
- **повороты геометрических моделей в пространстве;**
- **изменение масштаба геометрических моделей;**
- **построение различных видов проекций (изометрических и др.)**
- **скрытие невидимых линий;**
- **раскрашивание и тонирование поверхностей моделей.**
- **построения линий пересечения тел их разрезов и сечений;**
- **штрихование сечений и разрезов;**
- **булевские операции объединения, пересечения и вычитания.**





# Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

Элементарные геометрические преобразования (двухмерные и трехмерные), в машинной графике основаны на матричных операциях.

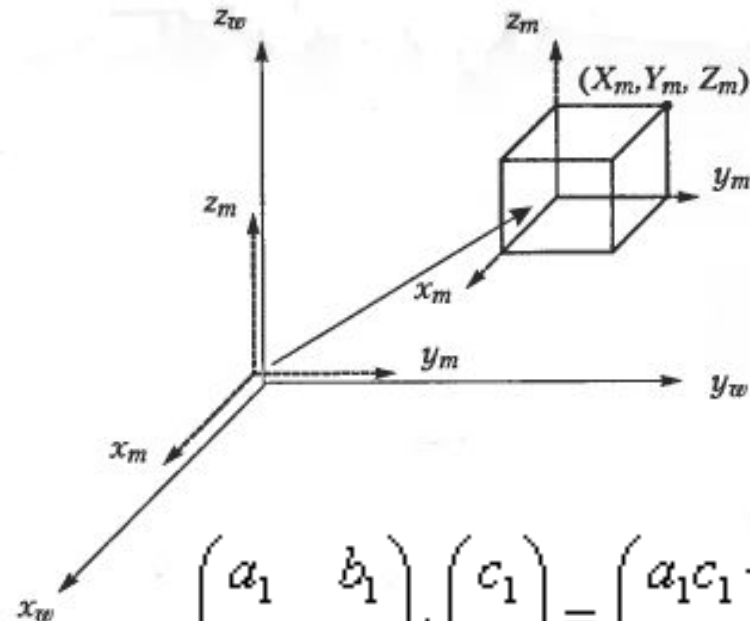
## 3-х мерный перенос

$$X_w = X_m + a;$$

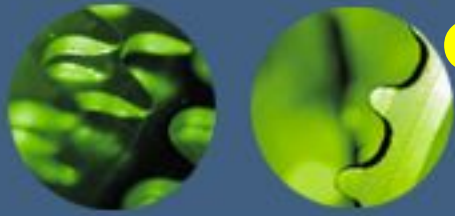
$$Y_w = Y_m + b;$$

$$Z_w = Z_m + c.$$

$$\begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}^{17}$$



# Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

Элементарные геометрические преобразования (двухмерные и трехмерные), в машинной графике основаны на матричных операциях.

## 3-х мерный поворот

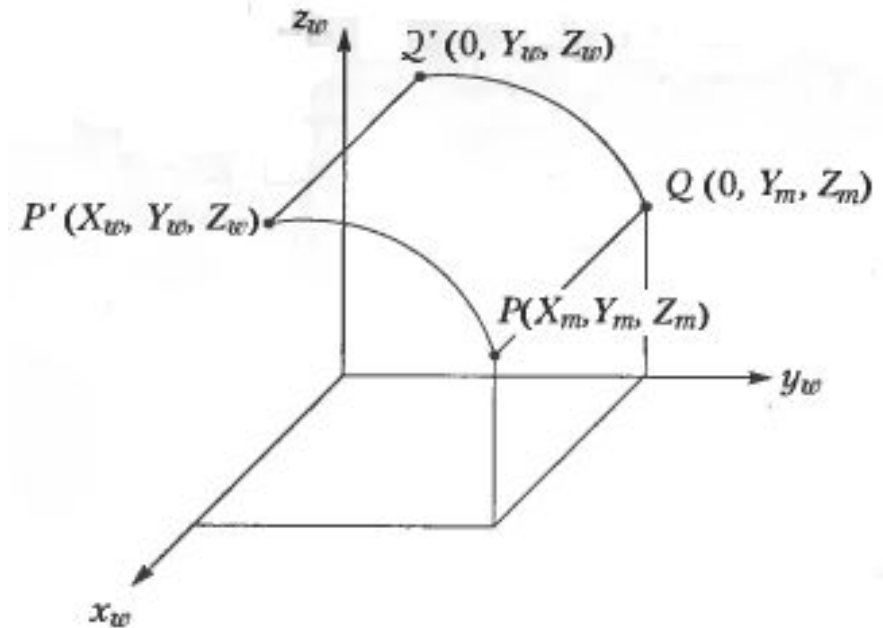
### 3-х мерный поворот вокруг оси X

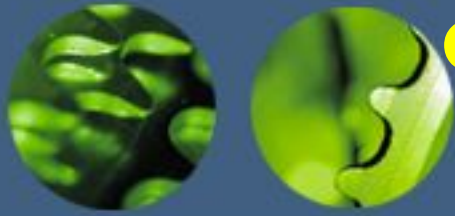
$$\begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_w = X_m;$$

$$Y_w = Y_m \cdot \cos(\theta) - Z_m \cdot \sin(\theta);$$

$$Z_w = -Y_m \cdot \sin(\theta) + Z_m \cdot \cos(\theta).$$





# Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

Элементарные геометрические преобразования (двухмерные и трехмерные), в машинной графике основаны на матричных операциях.

Матрица масштабирования

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица зеркального отображения

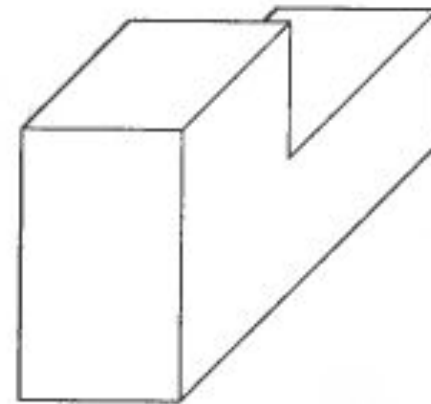
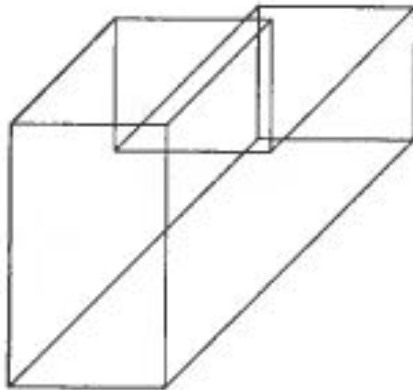
$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

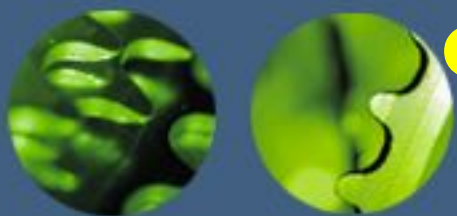


## Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

Скрытие невидимых линий геометрических моделей выполняется с целью придания проекции более наглядного вида. В настоящее время для удаления невидимых линий на проекциях геометрических моделей используется метод **Z-буфера**.

**Z-буфер** это область видеопамяти в которой хранятся значения **Z-координат** пикселов (светящихся точек дисплея), связанных с различными геометрическими объектами – точками, линиями, поверхностями.





# Основные операции геометрического синтеза и анализа 3D-моделей

Раскрашивание отдельных поверхностей и деталей выполняется при моделировании узлов машин с целью более наглядного представления конструкции механизма и взаимодействия деталей.

Тонирование (rendering) поверхностей моделей выполняется для придания им реалистичности.

