

Элементы комбинаторики



Практическое занятие 1

Цели и задачи занятия

Цель

систематизировать знания о комбинаторике, полученные в школе

Задачи

- Сформировать представление о месте комбинаторики в математике и практической деятельности;
- подготовиться к решению задач по теории вероятностей



По окончании занятия необходимо

иметь чёткое представление о месте комбинаторики в теории вероятностей и математической статистике, о решении прикладных задач комбинаторными методами;

**знать
основные
понятия,
теоремы и
формулы,
относящиеся
к данному
разделу**

**уметь
применять их
к решению
практических
задач, в том
числе,
реализуемых
с помощью
компьютера**



В конспекте отразите следующие вопросы, проиллюстрировав их примерами из домашнего задания (с решениями)

1

Предмет комбинаторики

2

Правило произведения

3

Правило суммы

4

Перестановки (без повторения и с повторениями)

5

Размещения (без повторения и с повторениями)

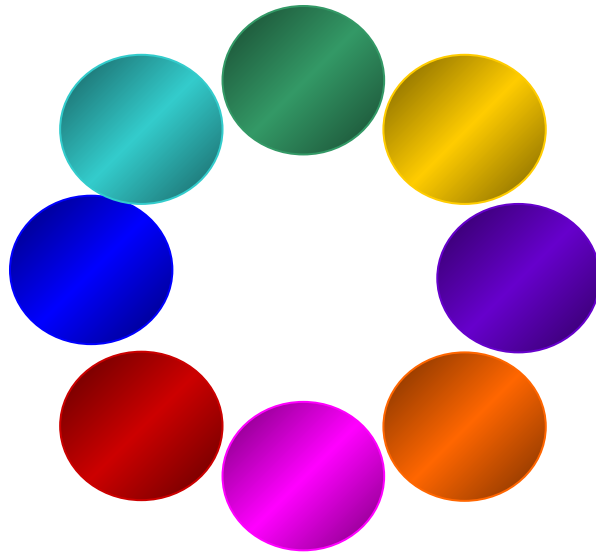
6

Сочетания (без повторения и с повторениями)



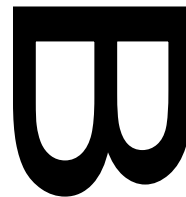
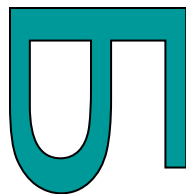
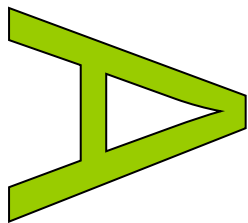
Предмет комбинаторики

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия.



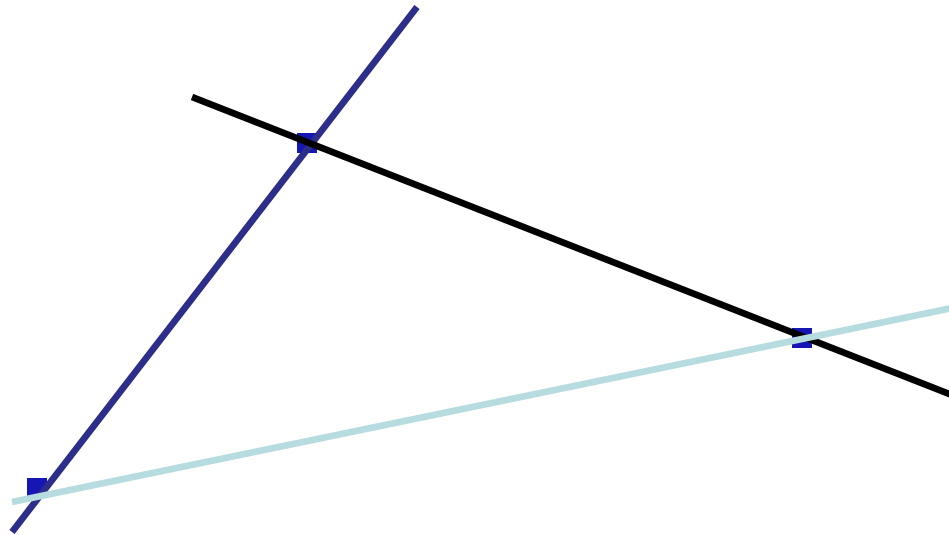
Предмет комбинаторики

Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, называемый комбинаторикой, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или другом случае.



Пример


Сколько прямых проходит через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой?



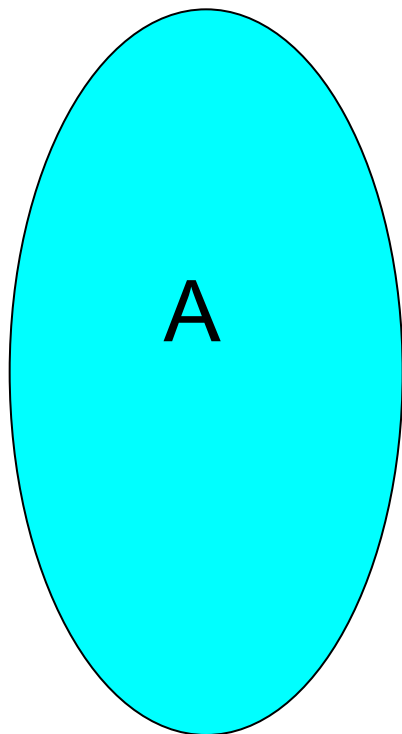


Правило суммы

Пусть некоторый предмет **A** может быть выбран **m** способами, а другой предмет **B** может быть выбран **n** способами. Тогда имеется **m + n** возможностей выбрать либо предмет **A**, либо предмет **B**.



Правило суммы

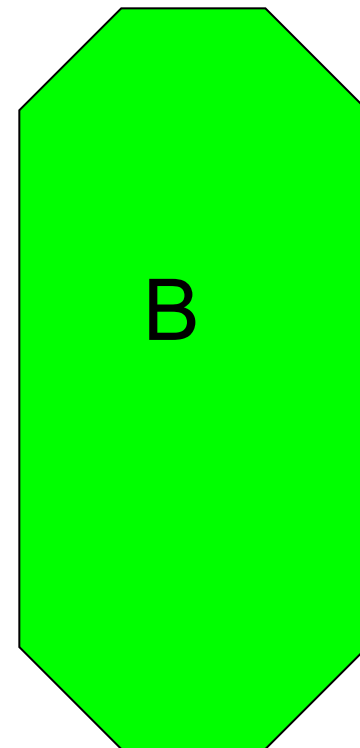


A или B

$A \vee B$

$A \cup B$

$A + B$





Задача 1

От сквера Кирова до академгородка можно проехать через Ангарский мост, плотину и новый мост. В первом случае количество дорог равно 2, во втором — 2, в третьем — 3.

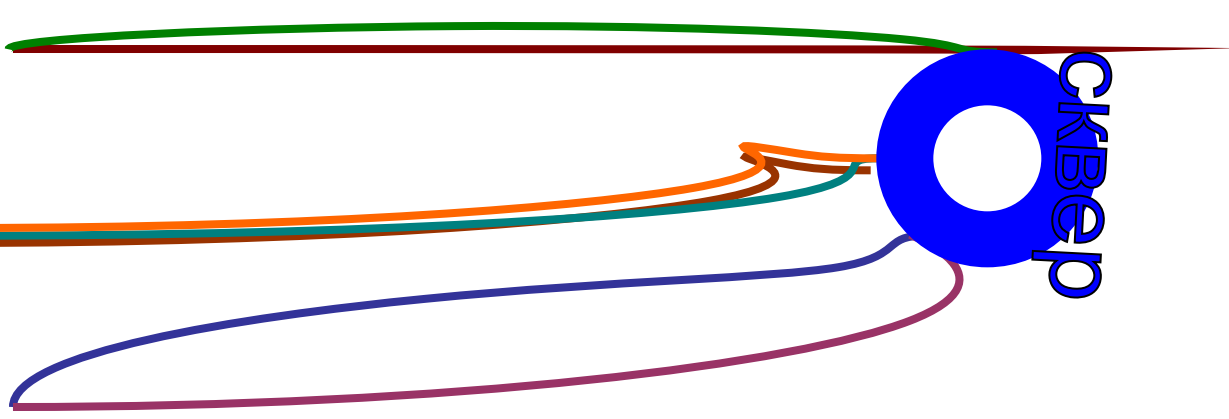
Сколькими способами можно добраться от сквера Кирова до академгородка ?

Решение

академгородок

СКВАР


$$2+2+3=7$$



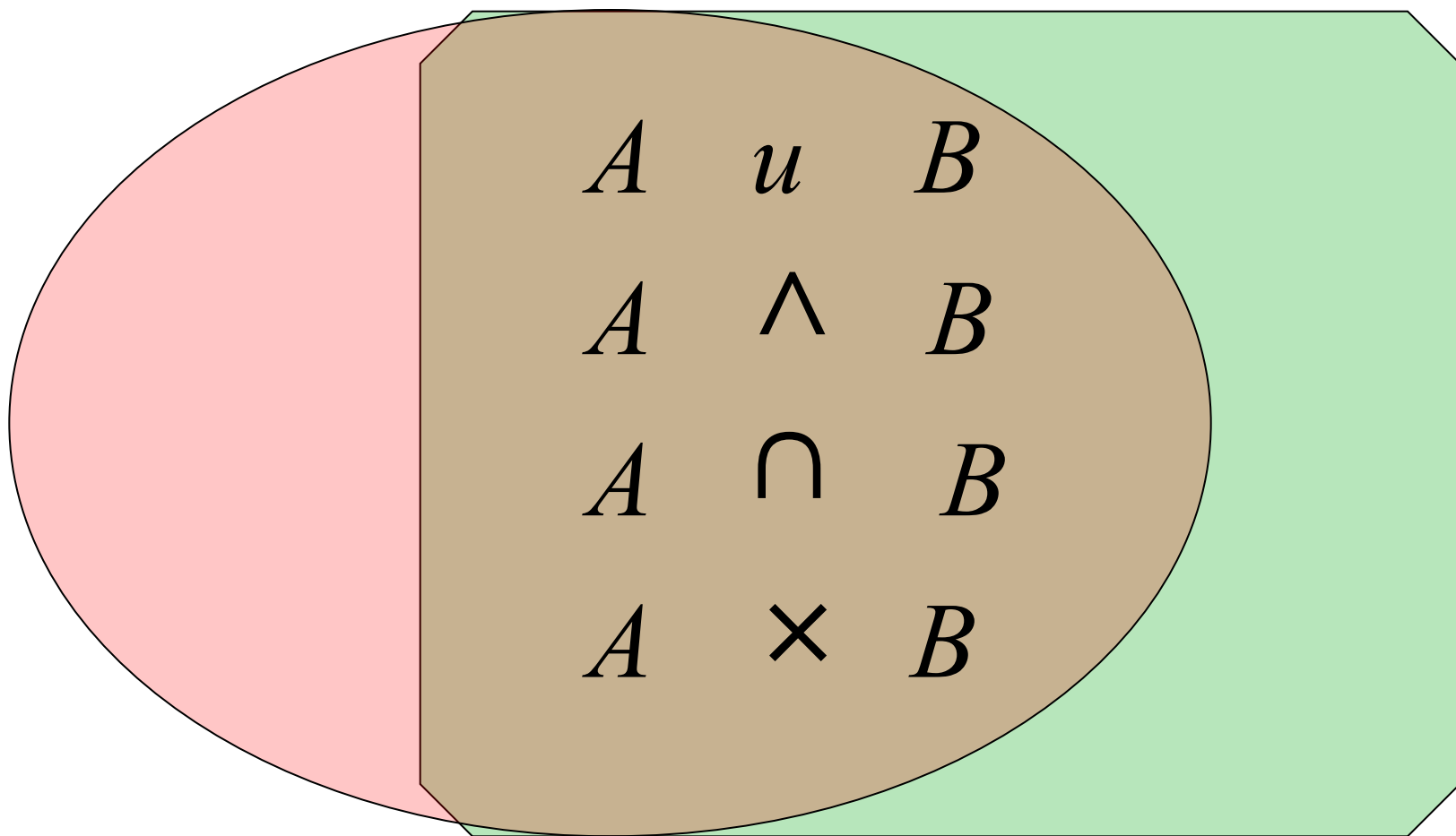


Правило произведения

Пусть некоторый предмет A может быть выбран m способами, а другой предмет B может быть выбран n способами. Тогда имеется mn возможностей выбрать предмет A и предмет B .




Правило произведения





Задача 2

В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида открыток. Сколькими способами можно купить конверт и открытку?



Решение



$$5 \cdot 4 = 20$$





Задача 3

Сколько способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?



Решение

Гласные: А, О, И, У, Э, Ю

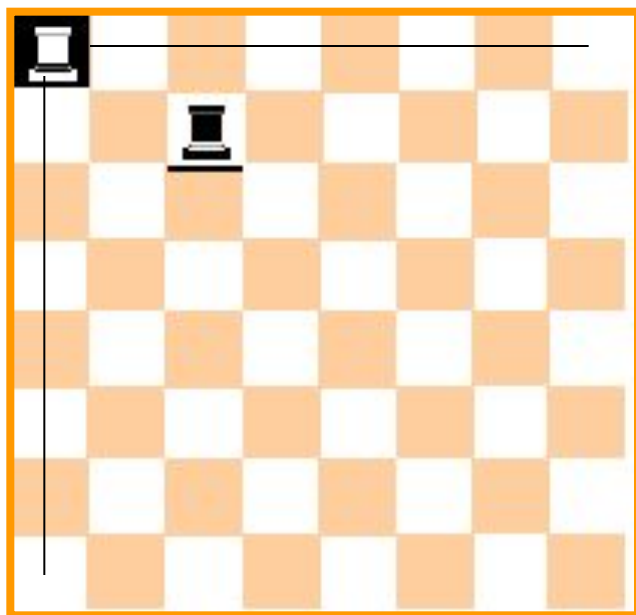
- Гласную можно выбрать двумя способами.
- Согласную — пятью способами.
- **Ответ.** $2 \cdot 5 = 10$.

Задача 4

Сколько способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?



Решение




$$64 \cdot 49 = 3136$$

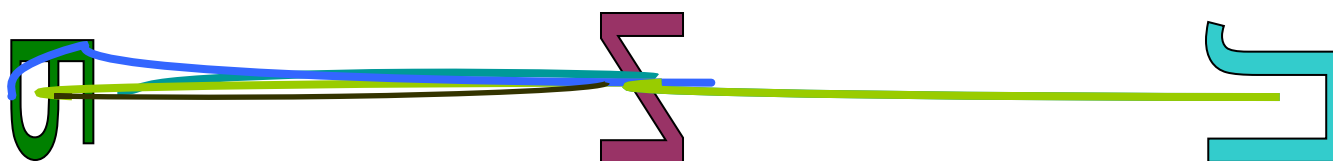


Задача 5

От Братска до Иркутска можно добраться поездом, самолётом, автобусом, теплоходом. Из Иркутска до Листвянки можно доехать на автобусе, либо на теплоходе. Сколькими способами можно проехать от Братска до Листвянки?



Решение



$$4 \cdot 2 = 8$$



Задача 6

У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Решение



$$20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500$$

Задача 9

Сколькими способами из колоды (36 карт) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?



Решение



$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

- В каждой масти по 9 карт.
- Из каждой масти выбираем по 1 карте, учитывая достоинство уже выбранной ранее карты.



Факториал

$n!$

- произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (читается n -факториал).


$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

- Замечание: $0! = 1! = 1$.
- 




Перестановки

Число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, состоящее из n элементов, называется **числом перестановок** множества и обозначается P_n .






Перестановки без
повторений

$$P_n = n!$$


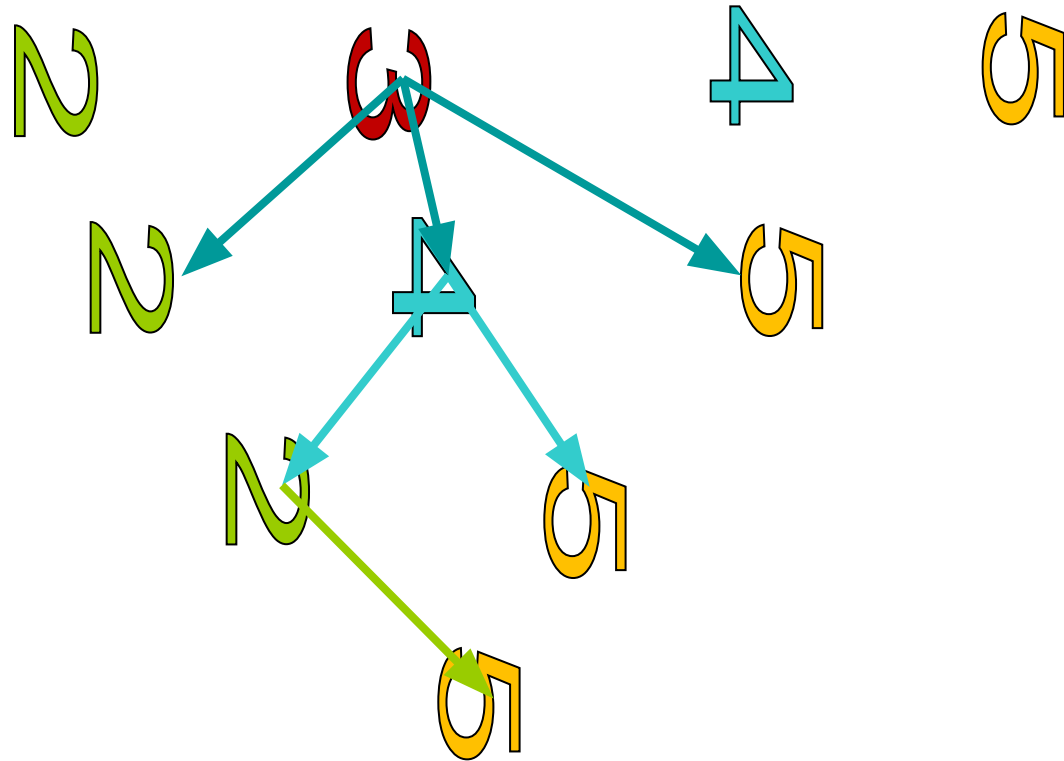


Задача 10

Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых цифры 2, 3, 4, 5 встречаются ровно по одному разу?



Решение




$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$



Задача 11

Сколько трёхзначных чисел можно получить из цифр 1,2,3, если цифры в числе не повторяются?



Решение

Сотни	1		2		3	
Десятки	2	3	1	3	1	2
Единицы	3	2	3	1	2	1


$$P = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$



Перестановки с повторениями

Пусть имеются предметы k различных типов.

Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k -го типа?



Перестановки с повторениями


$$P_{n_1; \dots; n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$



Задача 12

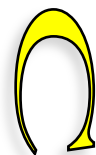
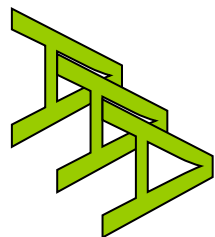
Сколько способами можно переставить буквы слова «ананас», так, чтобы получались разные «слова»? Смысл «слов» значения не имеет.



Решение

«Ананас» - 6:

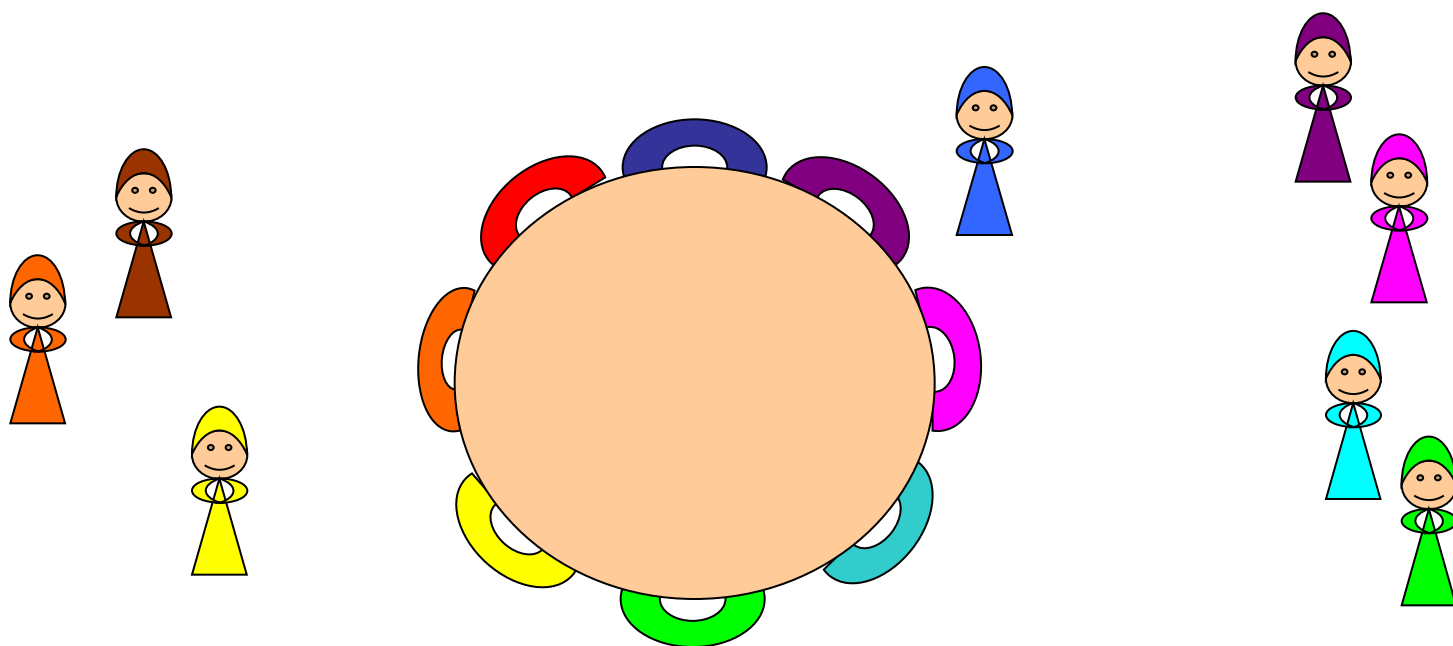
а – 3; н – 2; с – 1.



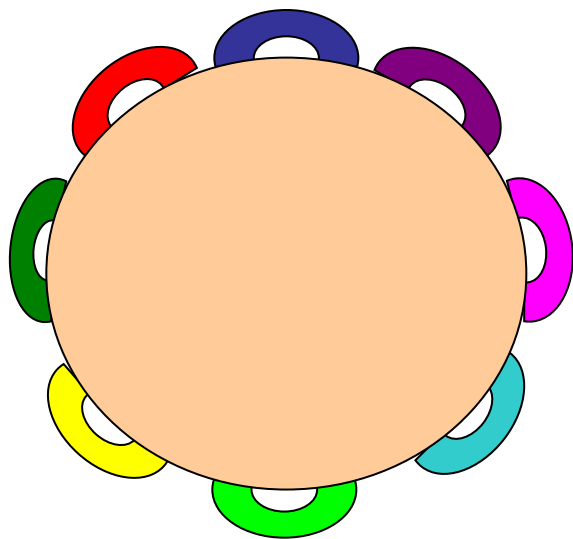
$$P_{3;2;1} = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

Задача 13

К Маше пришли 7 подружек. Сколькими способами можно рассадить 8 человек за столом?



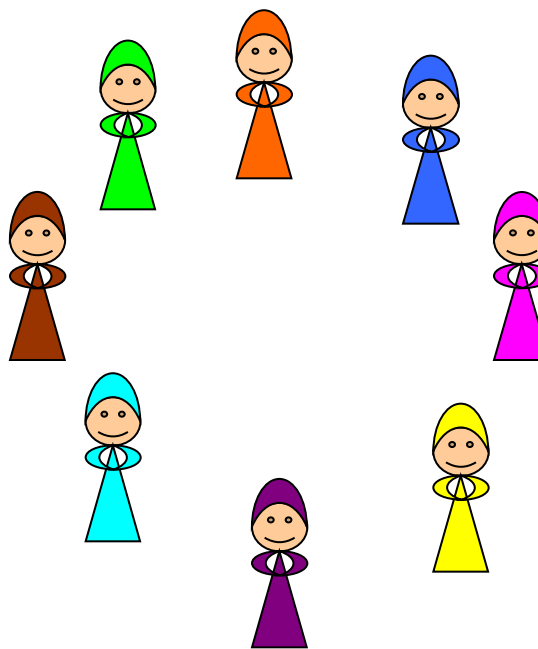
Решение



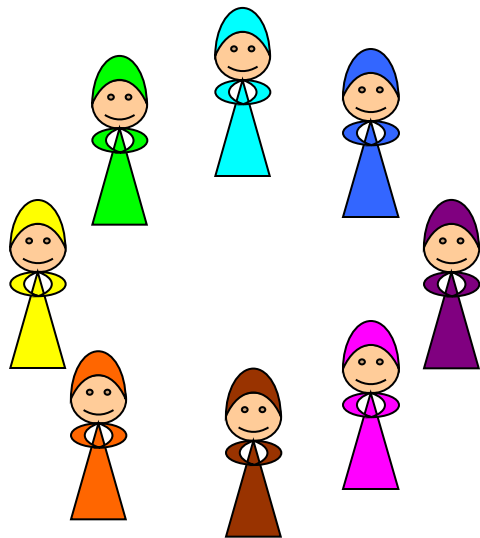
$$\begin{aligned} P_8 &= 8! = \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 40320 \end{aligned}$$

Задача 14

8 девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?



Решение



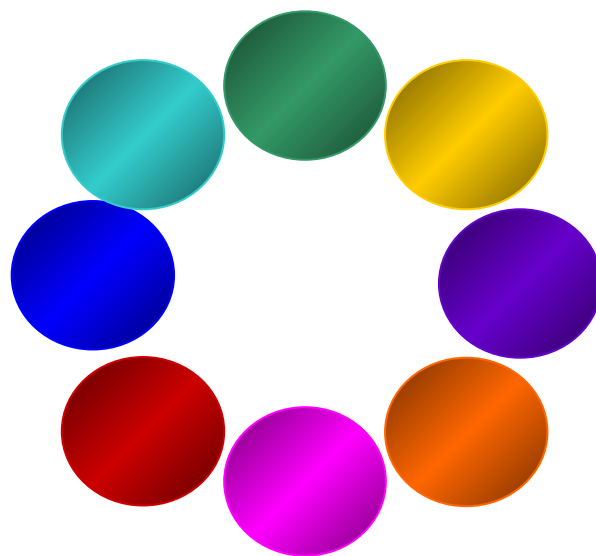
Девушки могут перемещаться по кругу.

Число перестановок уменьшается в 8 раз.

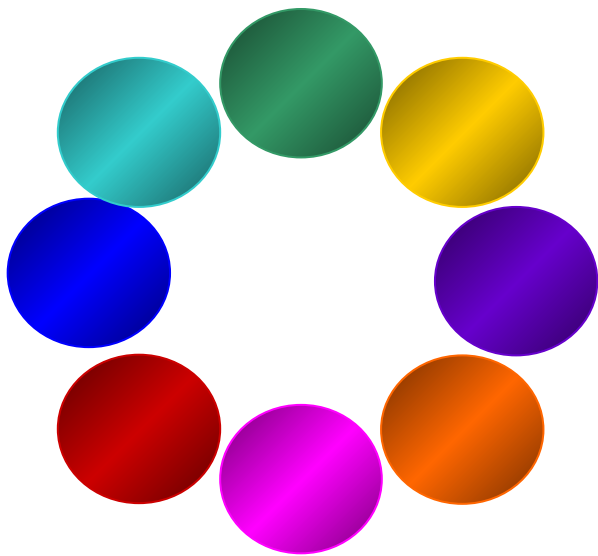
Ответ: **7!**

Задача 15

Сколько ожерелий можно составить из 8 различных бусин?



Решение




- Ожерелье можно вращать.
- Его можно и перевернуть.
- Число перестановок уменьшается ещё вдвое.

Ответ: $7!/2$



Размещения

Число упорядоченных k элементных подмножеств множества из n элементов называется **числом размещений** из n элементов по k и обозначается A_n^k





Размещения

Размещения без повторений

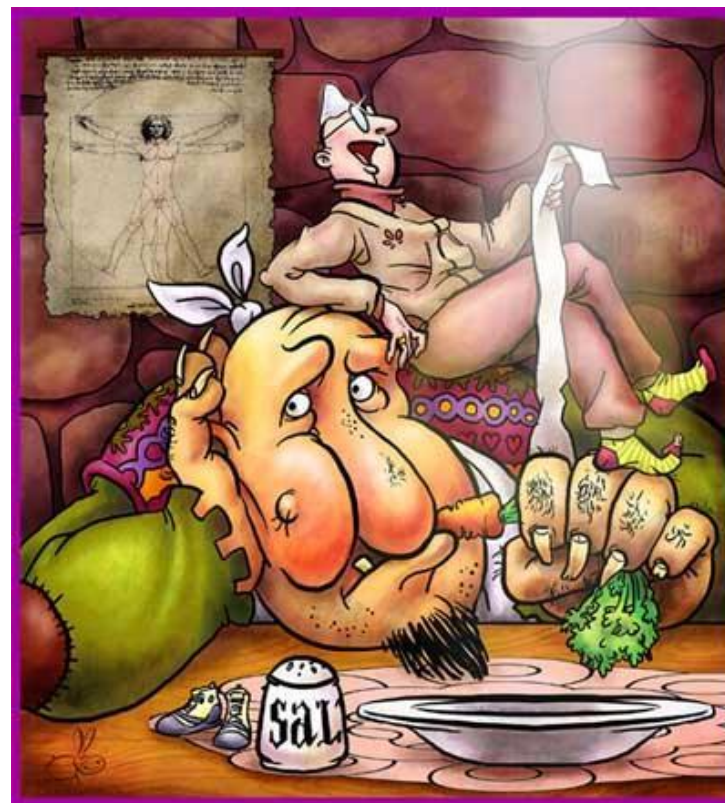
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

Размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Задача

У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?



Решение

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13800$$





Задача

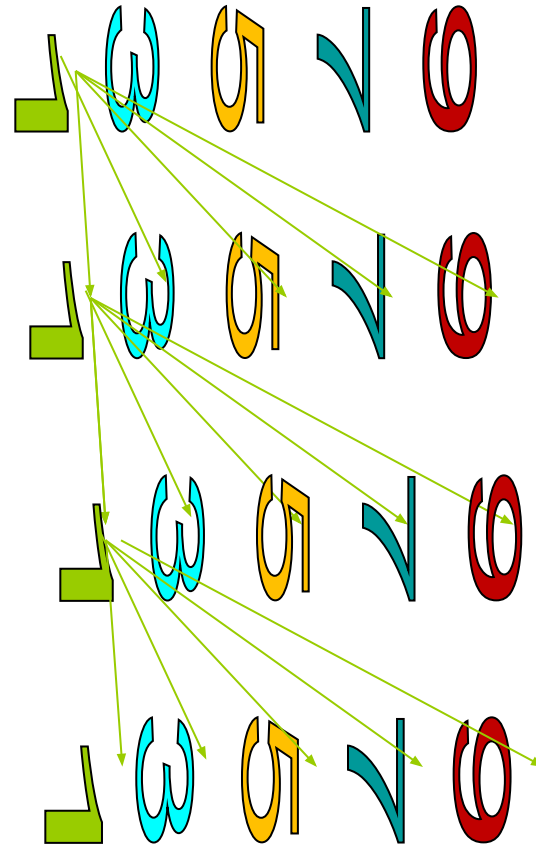
Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?



Решение

- Однозначных нечётных чисел ровно 5.
- К каждому однозначному нечётному числу вторая нечетная цифра может быть дописана 5 различными способами.
- Далее – по аналогии:


$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$





Задача

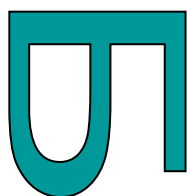
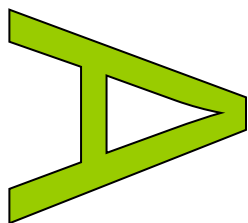
Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.





Решение


$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$$





Сочетания

Если из n элементов составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** без повторений (с повторениями) из n элементов по m .



Сочетания

Сочетания без повторений

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{A_n^m}{P_m} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$


Сочетания с повторениями

$$\begin{aligned} \overline{C}_n^m &= C_{n+m-1}^m = \\ &= \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \end{aligned}$$



Задача.

В городе проводится первенство по футболу. Сколько в нем состоится матчей, если участвуют 12 команд?





Решение.

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$


$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$





Задача.


В группе 10 стрелков, из них 6 снайперов.
Для выполнения боевой задачи нужно
отобрать 5 стрелков, причем снайперов
должно быть не меньше 4. Сколькими
способами это можно сделать?





Решение

Не меньше 4 – это значит, что снайперов должно быть либо 4, либо 5. 4 снайпера из 6 можно выбрать C_6^4 способами, остальных стрелков выбираем из оставшихся 4 стрелков $(10-6) C_4^1$ способами. Проводим аналогичные рассуждения, когда в группе снайперов 5.

$$C_6^4 \cdot C_4^1 + C_6^5 \cdot C_4^0 = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 66$$




Задача.

В классе 24 ученика, из них 8 отличников.
Нужно выбрать 12 человек так, чтобы среди них было хотя бы 5 отличников. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 901628





Свойства сочетаний

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$$

Решение


$$C_x^2 = \frac{x!}{2(x-2)!} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ \frac{x^2 - x}{2} = 153 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18, \\ y = 8. \end{cases}$$




Треугольник Паскаля

- Треугольник Паскаля является одной из наиболее известных и изящных числовых схем во всей математике.
 - Блез Паскаль, французский математик и философ, посвятил ей специальный "Трактат об арифметическом треугольнике".
- 



Треугольник Паскаля


- Эта треугольная таблица была известна задолго до 1665 года - даты выхода в свет трактата.
 - В 1529 году треугольник Паскаля был воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанного астрономом Петром Апианом.
- 

- Изображен треугольник на иллюстрации книги "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году.
- Омар Хайям, бывший философом, поэтом, математиком, знал о существовании треугольника в 1110 году, в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.





Построение треугольника Паскаля

- Треугольник Паскаля - это бесконечная числовая таблица "треугольной формы", в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке.
 - Таблица обладает симметрией относительно оси, проходящей через его вершину.
- 


Построение

										Строки
Числа										0
натуральные				1						1
треугольные			1							2
		1		3						3
			1	4						4
	1		5	10						5
		1	6	15						6



Свойства строк


Сумма чисел n -й строки Паскаля равна 2^n (потому что при переходе от каждой строки к следующей сумма членов удваивается, а для нулевой строки она равна $2^0 = 1$)





Свойства строк


Все строки треугольника Паскаля симметричны (потому что при переходе от каждой строки к следующей свойство симметричности сохраняется, а нулевая строка симметрична).





Свойства строк

Каждый член строки треугольника Паскаля с номером n тогда и только тогда делится на t , когда t - простое число, а n - степень этого простого числа



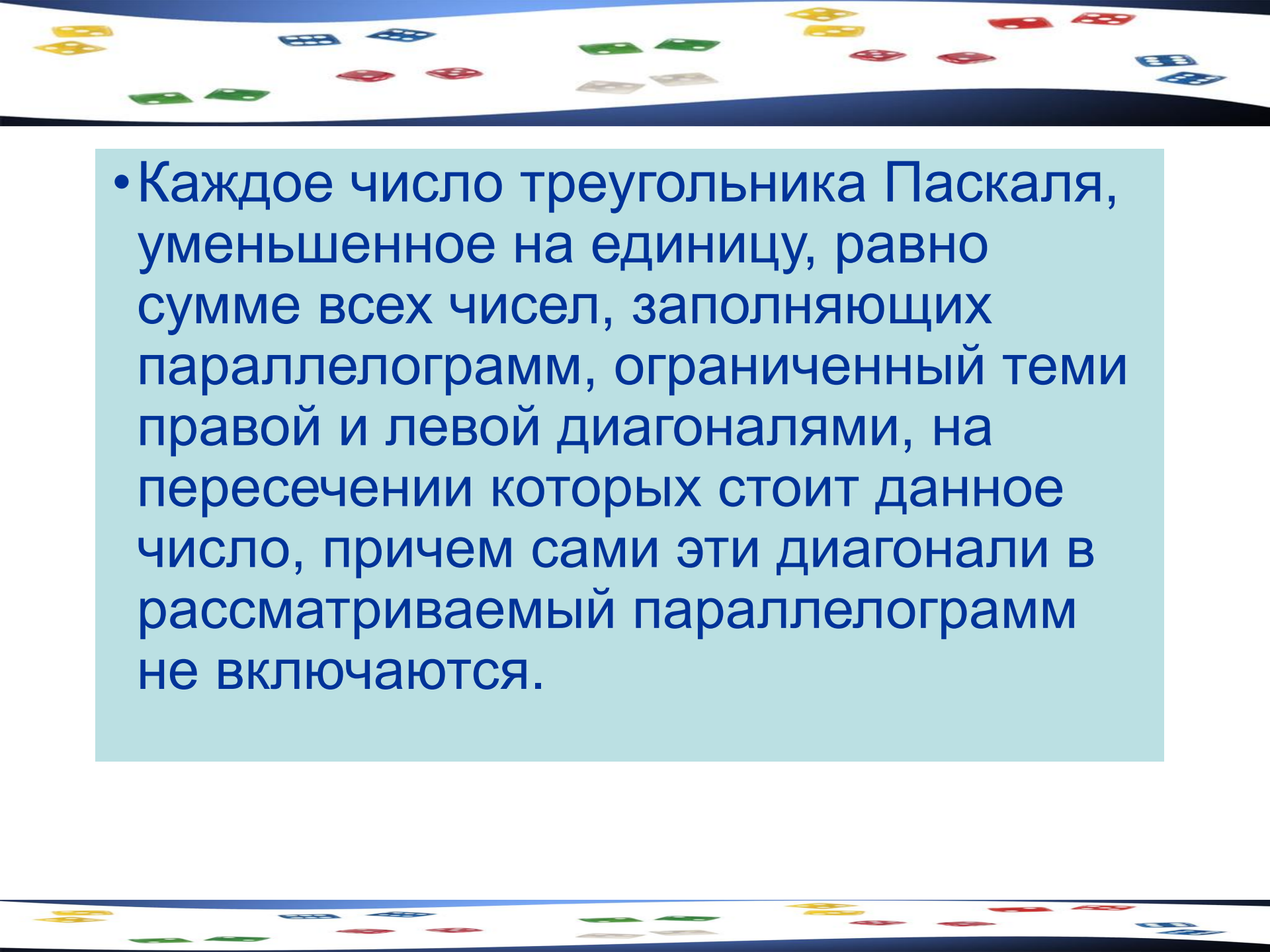


Нахождение элемента треугольника

Каждое число в треугольнике Паскаля можно определить тремя способами:

- C_n^k , где n - номер строки, k - номер элемента в строке;
- оно равно сумме чисел предыдущей диагонали, начиная со стороны треугольника и кончая числом, стоящим над данным.



- 
- Каждое число треугольника Паскаля, уменьшенное на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число, причем сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются.