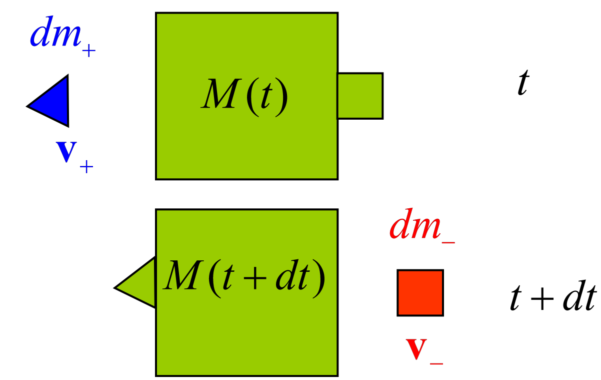
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ЛЕКЦИЯ 5:

ДИНАМИКА ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

1. Изменение количества движения тела переменной массы

Под **телом переменной массы** понимается тело, масса которого изменяется вследствие процесса отделения от него или присоединения к нему материальных точек



$$\mathbf{Q}_\Sigma(t) = M(t)\mathbf{V}(t) + \mathbf{v}_+ dm_+$$

$$\mathbf{Q}_\Sigma(t+dt) = M(t+dt)\mathbf{V}(t+dt) + \mathbf{v}_- dm_-$$

$$\underbrace{\mathbf{F}^e = \frac{d\mathbf{Q}_\Sigma}{dt}}_{\text{Теорема об изменении кол. движ.}} = \frac{d}{dt}\underbrace{(M\mathbf{V})}_{\mathbf{Q}} + \mathbf{v}_- \frac{dm_-}{dt} - \mathbf{v}_+ \frac{dm_+}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e - \mathbf{v}_- \frac{dm_-}{dt} + \mathbf{v}_+ \frac{dm_+}{dt}}$$

Теорема об изменении количества движения тела переменной массы

2. Уравнение Мещерского

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e - \mathbf{v}_- \frac{dm_-}{dt} + \mathbf{v}_+ \frac{dm_+}{dt} \qquad \mathbf{Q} = m\mathbf{v}$$

$$m\mathbf{w} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} = \mathbf{F}^e - \mathbf{v}_- \frac{dm_-}{dt} + \mathbf{v}_+ \frac{dm_+}{dt} \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{dm_+}{dt} - \frac{dm_-}{dt}$$

$$\boxed{m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e - (\mathbf{v}_- - \mathbf{v})\frac{dm_-}{dt} + (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v})\frac{dm_+}{dt}}$$

Уравнение Мещерского

$$\boxed{m\mathbf{w}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{F}^e +} \qquad \mathbf{\Phi} = -(\mathbf{v}_- - \mathbf{v})\frac{dm_-}{dt} + (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v})\frac{dm_+}{dt}$$

$\longleftarrow$ Реактивная сила

Наибольший технический интерес (ракеты) представляет отделение частиц

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e - (\mathbf{v}_- - \mathbf{v})\frac{dm_-}{dt} = \mathbf{F}^e + (\mathbf{v}_- - \mathbf{v})\frac{dm}{dt} = \mathbf{F}^e + \overbrace{\mathbf{v}_{\text{отн}} \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{<0}}^{\mathbf{\Phi}}$$

$\mathbf{\Phi}$ направлена в сторону, противоположную $\mathbf{v}_{\text{отн}}$

3. Задача Циолковского

В пренебрежении всеми внешними силами (гравитация, сопротивление атмосферы) движение ракеты описывается уравнением

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$$

$$dv = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{m}$$

$$v = -v_{\text{отн}}\ln m + C = v_{\text{отн}}\ln\frac{m_0}{m}$$

m_0 - начальная масса ракеты

m_* - масса ракеты без топлива

z - число Циолковского

Формула Циолковского

$$\boxed{v_{\max} = v_{\text{отн}}\ln z \qquad z = \frac{m_0}{m_*}}$$

4. Задача Циолковского: оценки

$$\boxed{v_{max} = v_{отн} \ln z \qquad\qquad z = \frac{m_0}{m_*}}$$

$$v_{отн} \approx 2500 \frac{\text{м}}{\text{с}} \qquad\qquad v_{max} = 8000 \frac{\text{м}}{\text{с}} + 1000 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 9000 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

первая космическая скорость

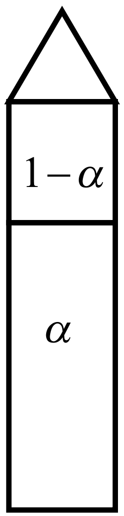
потери на гравитацию, сопротивление,…=10-15%

$$z = \exp(v_{max} / v_{отн}) = \exp\left(9000/2500\right) = \exp(3.6) = 42.5$$

масса топлива должна составлять 98% начальной массы ракеты

<u>Вывод</u> : получение космических скоростей с помощью *одноступенчатой* ракеты в настоящее время вряд ли возможно

5. Двухступенчатая ракета



1-й этап: выгорание 1-й ступени

$$\left(\frac{v_{max}}{v_{отн}}\right)_{I} = \ln \frac{\text{начальная масса}}{\text{масса в конце 1 этапа}} = \ln \frac{m \quad + m^{1} + m^{2}}{m_{пг} + m_{*}^{1} + m_{0}^{2}}$$

Обозначения:
- $m_{пг}$ - масса полезного груза
- m_{0}^{i} - начальная масса i-ой ступени
- m_{*}^{i} - масса i-ой ступени без топлива

2-й этап: выгорание 2-й ступени

$$\left(\frac{v_{max}}{v_{отн}}\right)_{II} = \left(\frac{v_{max}}{v_{отн}}\right)_{I} + \ln \frac{\text{начальная масса на 2 этапе}}{\text{масса в конце 2 этапа}} = \ln \frac{m \quad + m^{1} + m^{2}}{m_{пг} + m_{*}^{1} + m_{0}^{2}} + \ln \frac{m \quad + m^{2}}{m_{пг} + m_{*}^{2}}$$

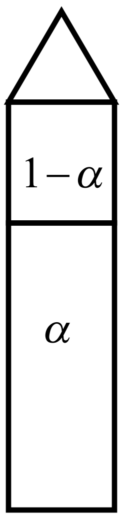
$$\boxed{\left(\frac{v_{max}}{v_{отн}}\right)_{II} = V(\alpha, M, z) = \ln \frac{1+M}{1+(1-\alpha)M + \alpha z^{-1} M} + \ln \frac{1+(1-\alpha)M}{1+(1-\alpha)z^{-1}M}}$$

$$z = \frac{m_0^1}{m_*^1} = \frac{m_0^2}{m_*^2}$$

$$M = \frac{m_0^1 + m_0^2}{m_{пг}} = \frac{\text{масса бесполезного груза}}{\text{масса полезного груза}}$$

$$\alpha = \frac{m_0^1}{m_0^1 + m_0^2} \qquad 1-\alpha = \frac{m_0^2}{m_0^1 + m_0^2}$$

6. Двухступенчатая ракета: как распределить массу по ступеням



<u>Оптимизация распределения масс по ступеням</u> $V(\alpha, M, z) \xrightarrow{\alpha} \max$

$$V(\alpha,M,z)=\ln\frac{1+M}{1+(1-\alpha)M+\alpha z^{-1}M}+\ln\frac{1+(1-\alpha)M}{1+(1-\alpha)z^{-1}M}$$

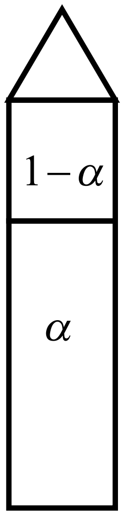
$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}=-\frac{\left(z^{-1}-1\right)M}{1+(1-\alpha)M+\alpha z^{-1}M}-\frac{M}{1+(1-\alpha)M}+\frac{z^{-1}M}{1+(1-\alpha)z^{-1}M}$$

$$=-\frac{\left(z^{-1}-1\right)M}{1+(1-\alpha)M+\alpha z^{-1}M}+\frac{\left(z^{-1}-1\right)M}{\left(1+(1-\alpha)M\right)\left(1+(1-\alpha)z^{-1}M\right)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}=0 \quad \Rightarrow -\left(\cancel{1}+\cancel{(1-\alpha)M}+\underline{\alpha z^{-1}M}\right)+\underbrace{\left(1+(1-\alpha)M\right)\left(1+(1-\alpha)z^{-1}M\right)}_{\cancel{1}+\underline{(1-\alpha)z^{-1}M}+\cancel{(1-\alpha)M}+(1-\alpha)^2 z^{-1}M^2}=0$$

$$(1-\alpha)^2 M+1-2\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=1-\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}\approx 1-\frac{1}{\sqrt{M}} \qquad M \gg 1$$

7. Двухступенчатая ракета: каков выигрыш?



$$\alpha_{\text{opt}} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\left(\frac{v_{\max}}{v_{\text{отн}}}\right)_{\text{II}} = V(\alpha_{\text{opt}}, M, z) = \ln\frac{1+M}{1+(1-\alpha_{\text{opt}})M+\alpha_{\text{opt}}z^{-1}M} + \ln\frac{1+(1-\alpha_{\text{opt}})M}{1+(1-\alpha_{\text{opt}})z^{-1}M}$$

$$\approx \ln\frac{M}{1+\sqrt{M}+z^{-1}M} + \ln\frac{1+\sqrt{M}}{1+z^{-1}\sqrt{M}} \approx 2\ln\frac{\sqrt{M}}{1+z^{-1}\sqrt{M}} \approx 2\ln z \qquad \sqrt{M} \gg z$$

Оптимум характеризуется тем, что приращение скоростей на обоих этапах полета одинаково

<u>Оценка</u> $\qquad z = \exp(v_{\max}/2v_{\text{отн}}) = \exp(1.8) = \boxed{6.5}$

Для одноступенчатой ракеты

$$\frac{v_{\max}}{v_{\text{отн}}} = \ln\frac{m_0+m^1+m^2}{m_{\text{пг}}+m_*^1+m_*^2} = \ln\frac{1+M}{1+z^{-1}M} \approx \ln z \qquad z = \exp(v_{\max}/v_{\text{отн}}) = \exp(3.6) = \boxed{42.5}$$

8. Задача о ракете в поле силы тяжести

Ракета движется вертикально вверх в поле силы тяжести с постоянным ускорением $(k-1)g$. Найти высоту подьема.

k -к-т перегрузки

1-й этап : вплоть до времени выгорания топлива

$$m(k-1)g = -mg - v_{\text{отн}}\dot{m} \qquad kg = -v_{\text{отн}}\frac{\dot{m}}{m} \qquad kgt = v_{\text{отн}}\ln\frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m}{m_0} = \exp\left(-\frac{kg}{v}t\right)$$

Топливо должно расходоваться по экспоненциальному закону

$$t_{\text{fin}} = \frac{v_{\text{отн}}}{kg}\ln z \qquad v_{\text{fin}} = \frac{k-1}{k}v \quad \ln z \qquad h_{\text{fin}} = \frac{k-1}{k^2}\frac{v_{\text{отн}}^2\ln^2 z}{2g}$$

2-й этап : свободный полет

$$h_{\text{II}} = \frac{v_{\text{fin}}^2}{2g} = \frac{(k-1)^2}{k^2}\frac{v_{\text{отн}}^2\ln^2 z}{2g}$$

$$h_{\Sigma} = h_{\text{fin}} + h_{\text{II}} = \frac{k-1}{k}\cdot H_{\max} \qquad H_{\max} = \frac{v_{\text{отн}}^2\ln^2 z}{2g}$$

9. Задача о ракете в поле силы тяжести

$$\boxed{h_{\Sigma} = h_{\text{fin}} + h_{\text{II}} = \frac{k-1}{k} \cdot H_{\max} \qquad H_{\max} = \frac{v_{\text{отн}}^2 \ln^2 z}{2g}}$$

Наилучшая стратегия: выбрать все топливо как можно быстрее

$$k = \infty \quad \Rightarrow \quad h_{\Sigma} = H_{\max}$$ Мгновенное сгорание топлива

При ограничении перегрузки неизбежен проигрыш в высоте