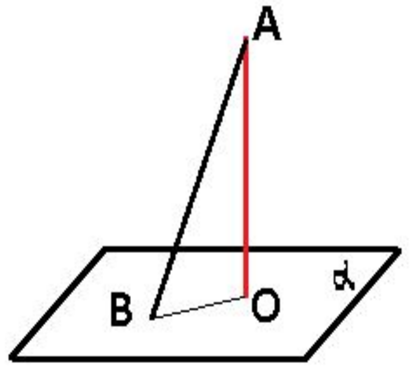
Перпендикуляр и наклонная

- **Перпендикуляром опущенным из данной точки на плоскость, называется отрезок, лежащий на прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости, соединяющий данную точку с точкой плоскости.**
- **Конец этого отрезка, лежащий на плоскости, называют основанием перпендикуляра.**

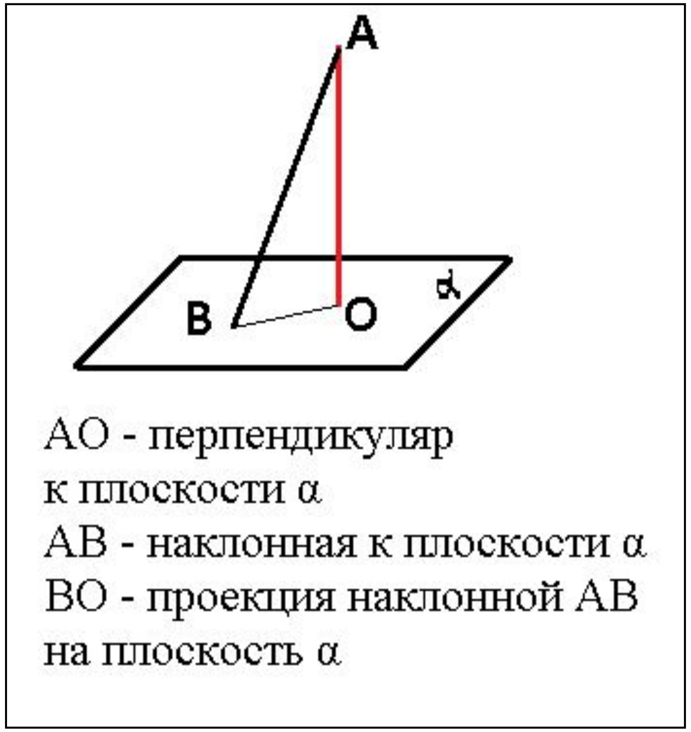


AO - перпендикуляр к плоскости α
AB - наклонная к плоскости α
BO - проекция наклонной AB на плоскость α

Наклонная, **проведенная из данной точки к плоскости, -** любой отрезок, соединяющей данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Перпендикуляр и наклонная

- Конец отрезка, лежащий на плоскости, называют **основанием наклонной.**
- Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной.**

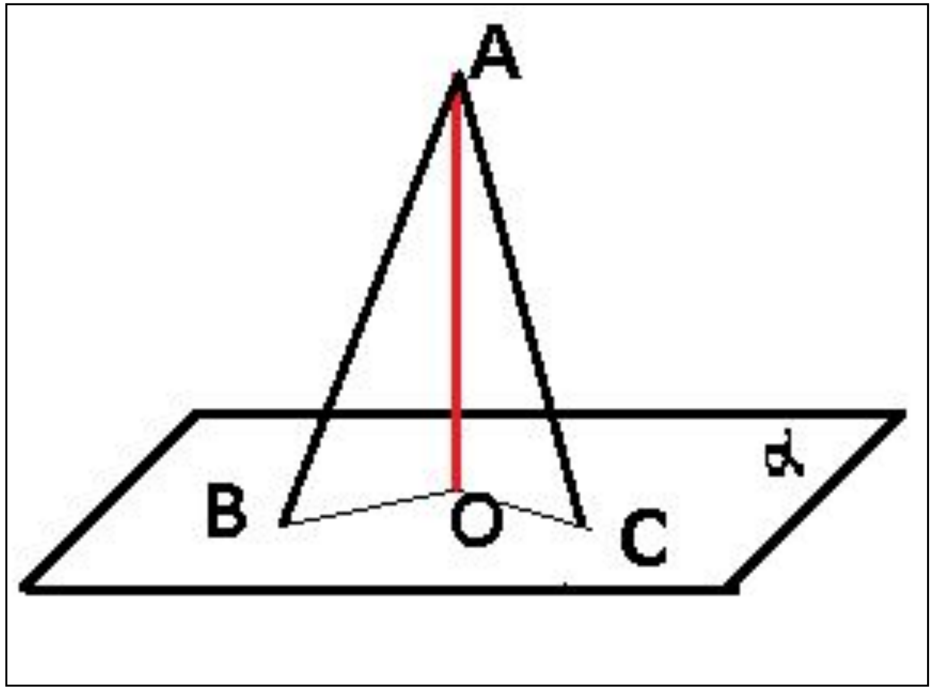


- **<u>Свойства:</u>**

1 Перпендикуляр короче наклонной, проведенной из одной точки $AO<AB$.
2. Из данной точки, не лежащей на плоскости, можно провести **только один перпендикуляр** к плоскости и бесконечное множество наклонных.

3. Если из одной точки к одной плоскости проведены перпендикуляр и две наклонные, то:

- равные наклонные имеют равные проекции (если AB=AC, то BO=CO);

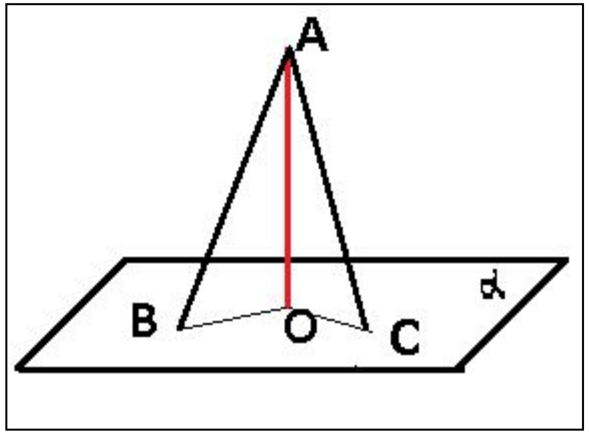


Если проекции наклонных равны, то сами наклонные равны (если BO= CO, то AB=AC);

- Большая наклонная имеет большую проекцию (если AB>AC, то BO>CO);
- Из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию (если BO>CO, то AB>AC).

Перпендикуляр и наклонная.

- **Расстоянием** от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.



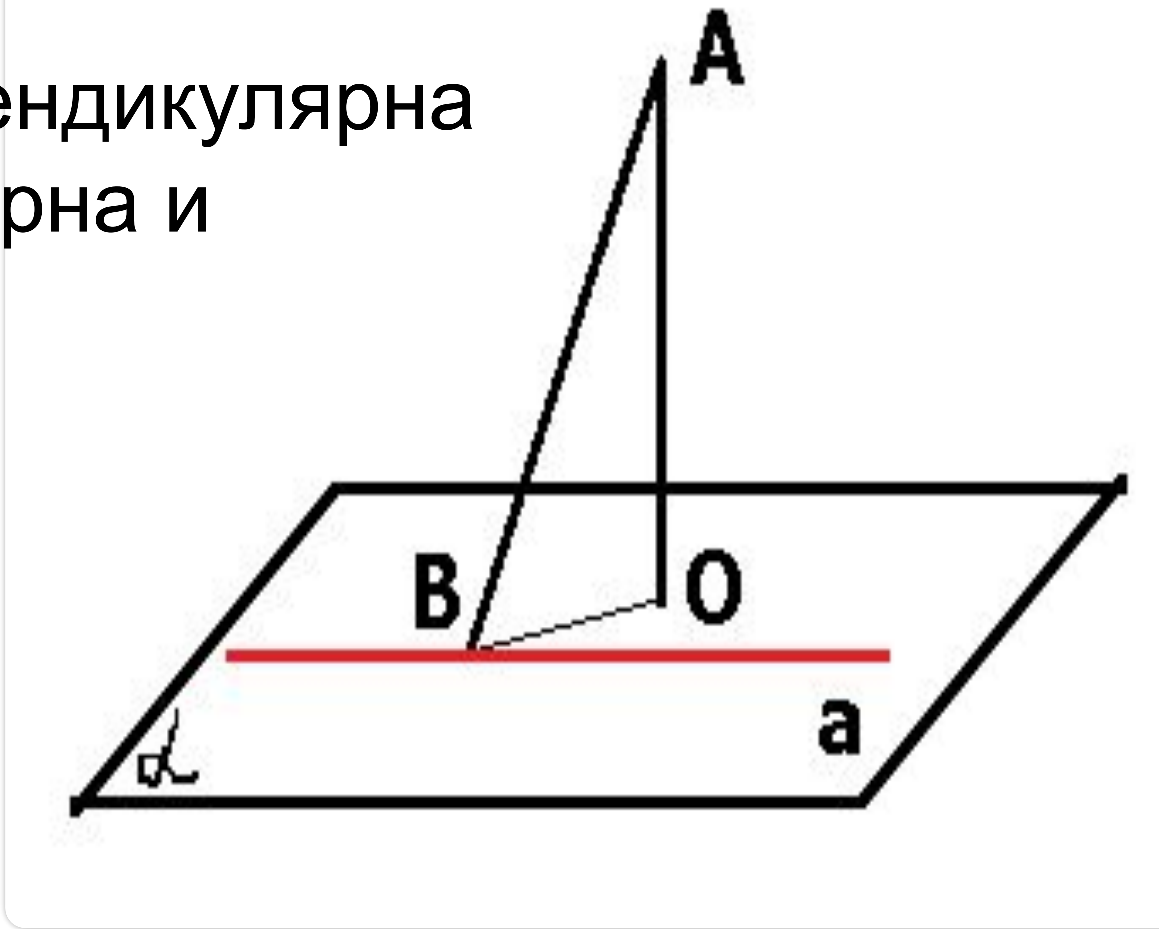
АО – расстояние от точки А до плоскости α.

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной (если а ⊥ ВО, то а ⊥ АВ).

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной

(если а ⊥ АВ, то ⊥ ВО).



Теорема о трех перпендикулярах

Доказательство:

1)AB- перпендикуляр, AC- наклонная, $d \in \alpha,\ C \in d$

2) Проводим CA´∥AB. $CA' \perp \alpha$

(по свойству перпендикулярных прямой и плоскости)

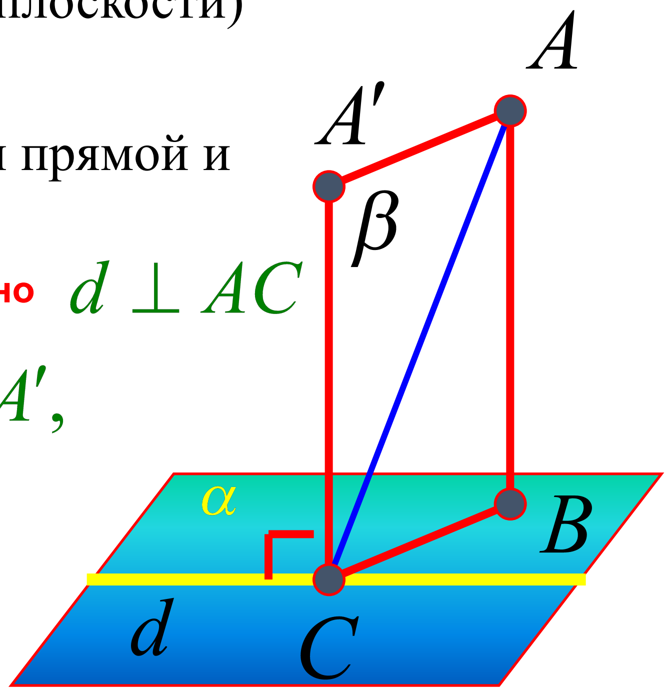
3) AB и A´C определяют β

4) $d \perp CA'$(признак перпендикулярности прямой и плоскости)

5) Если $d \perp CB$, то $d \perp \beta$, следовательно $d \perp AC$

6)Аналогично, если $d \perp CA$ и $d \perp CA'$,

$d \perp \beta$, следовательно $d \perp BC$



Задача

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой ***равноудалена*** *от сторон треугольника.*

Решение:

1)A,B,C- точки касания сторон треугольника с окружностью,

O- центр окружности, S- точка на перпендикуляре

2) Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника,

то по теореме о трех перпендикулярах: SA- перпендикуляр к этой стороне

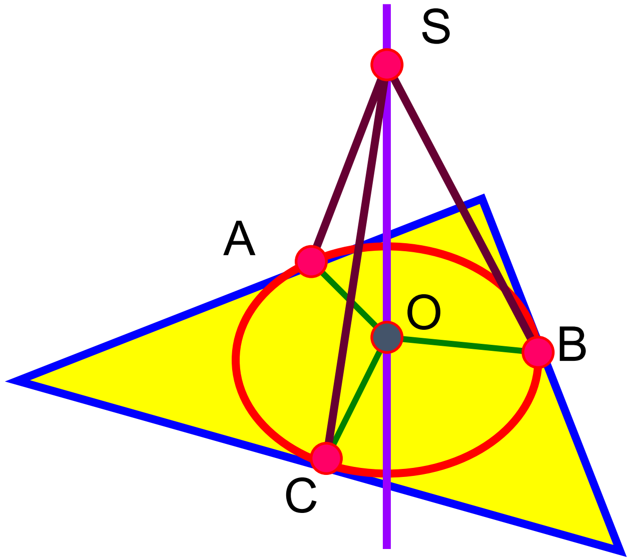
3)По теореме Пифагора:

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

где r-радиус вписанной окружности

4) $$SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$$

5) $$SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$$



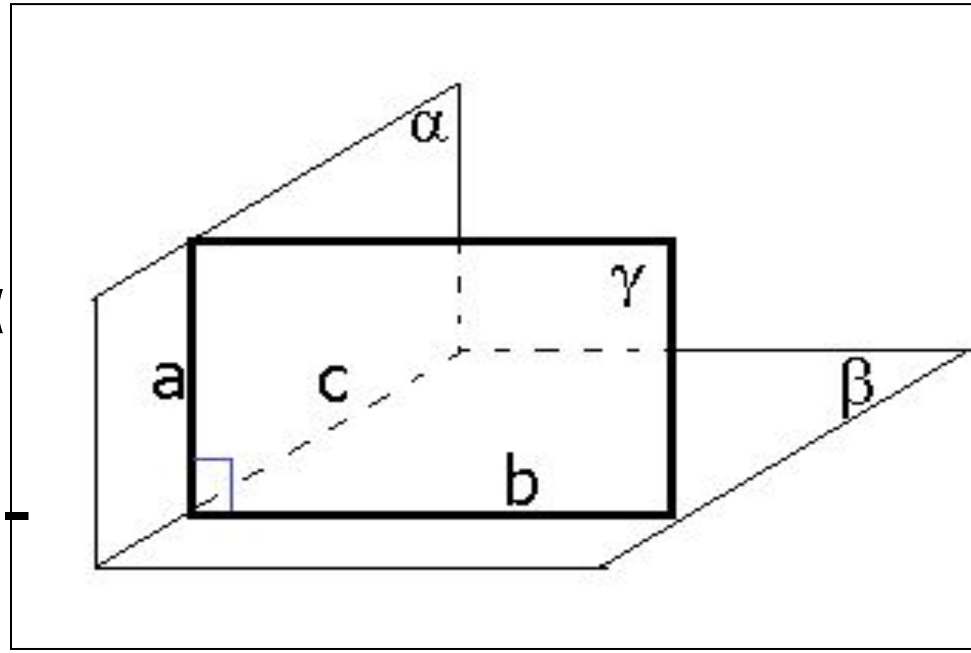
Т.е. расстояния от S до сторон треугольника ***<u>равны</u>***

α

Перпендикулярность двух плоскостей

Перпендикулярные плоскости – две пересекающиеся плоскости, для которых выполняется условие, что третья плоскость, перпендикулярная линии их пересечения, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Плоскости α и β перпендику-лярны (α ⊥β), если плоскость Y ⊥ c, Y пересека-ет α и β по взаимноперпен-дикулярным прямым a и b,
(a ⊥ b).

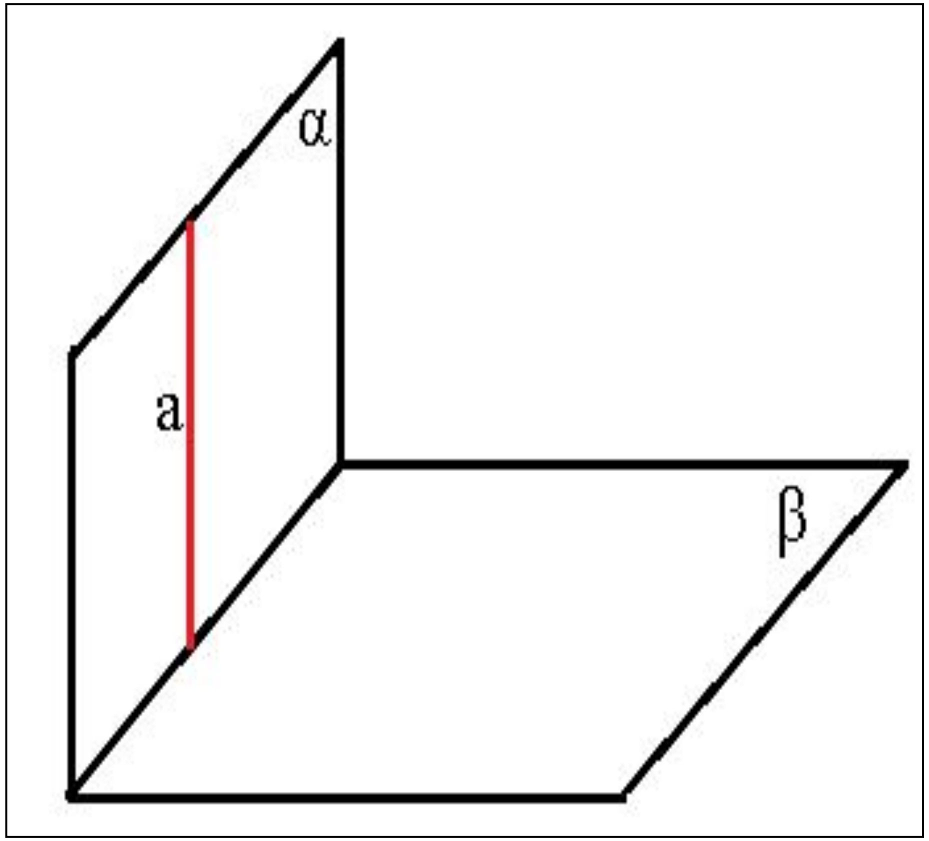


α

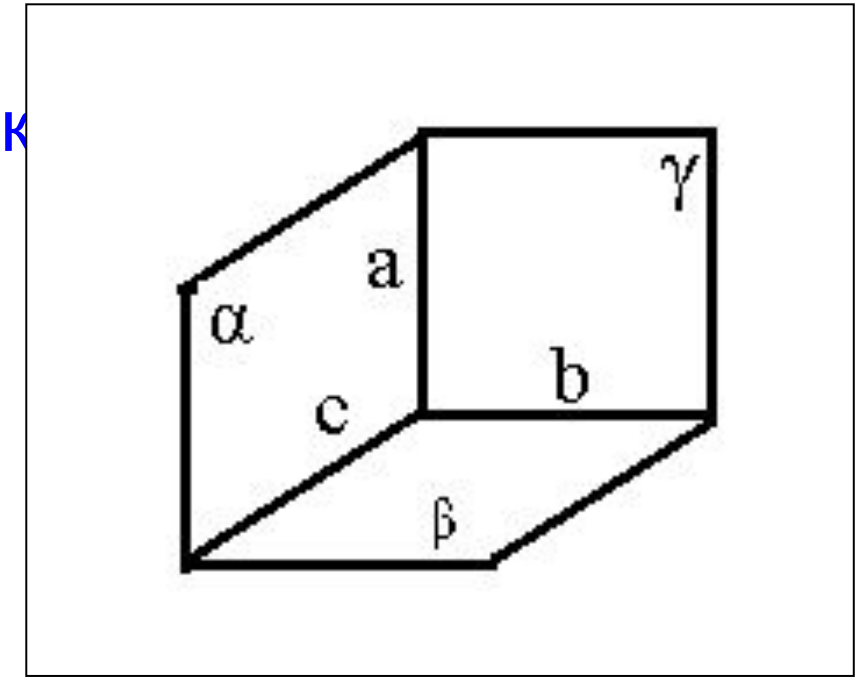
Признак перпендикулярности плоскостей

Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны

(если $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$).

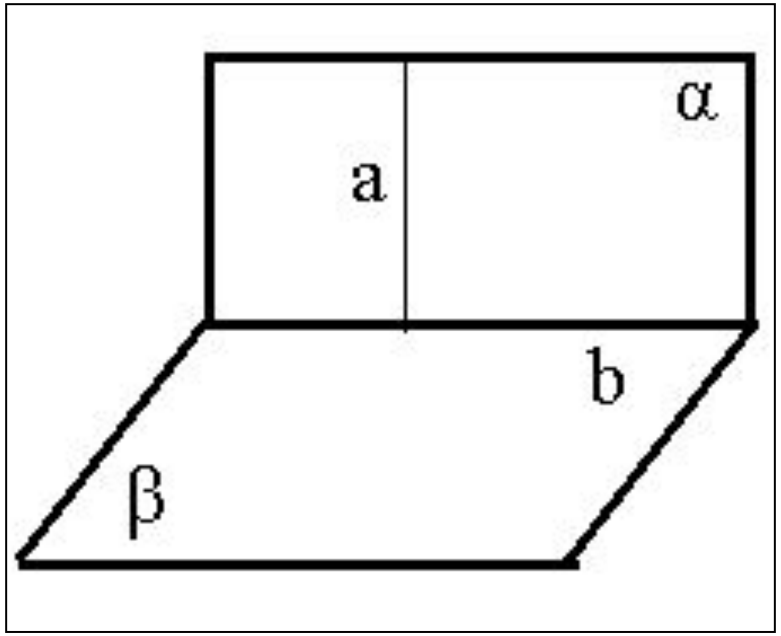


Свойства перпендикулярных плоск



1.Любая плоскость, перпендикулярная прямой пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

(если $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap Y = a$, $\gamma \cap \beta = b$ и $\gamma \perp c$, то $a \perp b$)



2. Если прямая лежащая в одной из

двух перпендикулярных плоскостей,

перпендикулярна прямой их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

(если $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ и $a \perp b$,

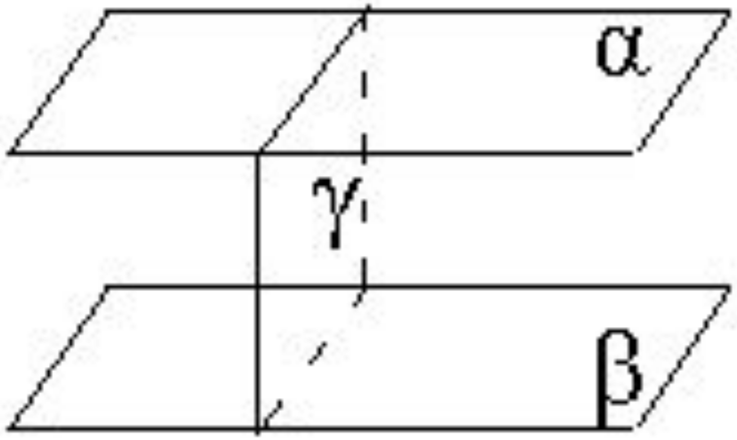
то $a \perp \beta$)

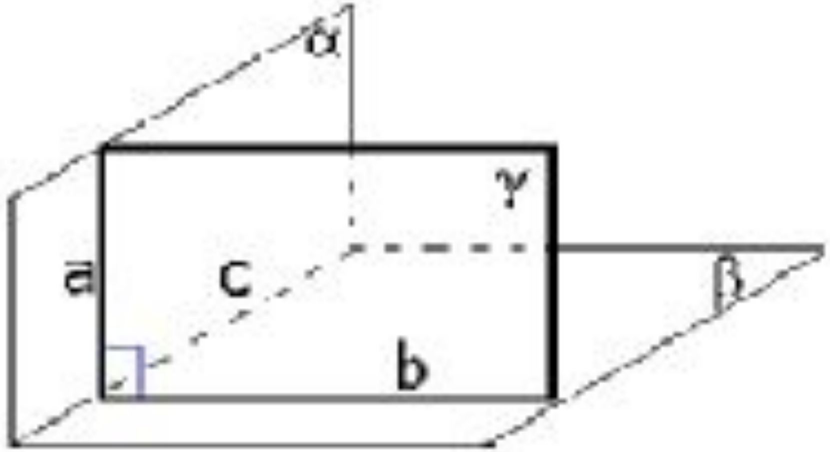
Свойства перпендикулярных пл

3. Через любую точку прост-ранства можно провести

плоскость, перпендикулярную данной плоскости

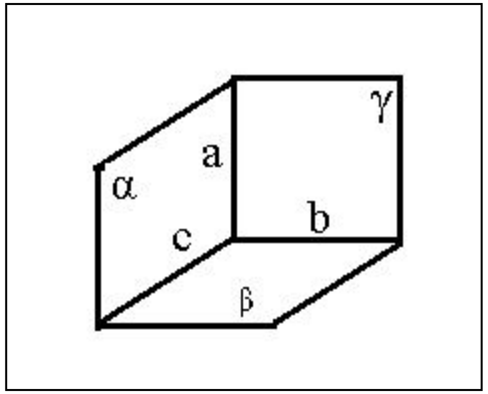
4 Две плоскости, перпендику-лярные третьей плоскости, или параллельны, или пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости.





Свойства перпендикулярных плоскостей

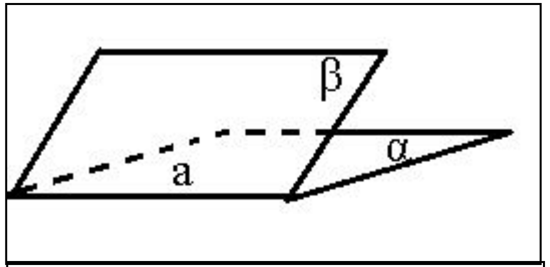
5. Три попарно перпендику-лярные плоскости пересе-каются по трем перпенди-кулярным прямым (если $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$, $\gamma \perp \alpha$, То $a \perp b$, $b \perp c$, $a \perp c$)



6 .Через данную прямую некоторой плоскости можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

Двугранные углы.

- ***Двугранный угол*** *– фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, не принадлежащими одной плоскости.*
- *Полуплоскости называются* ***гранями****, а прямая, их ограничиваю-щая, -* ***ребром*** *двугранного угла.*

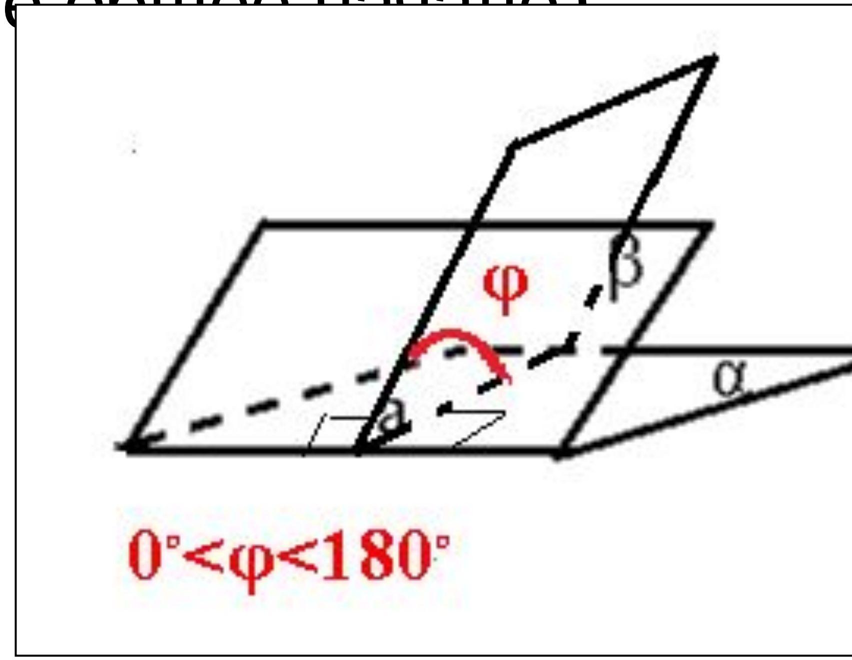


α и β – грани двугранного угла

а – ребро двугранного угла

Двугранные углы.

Линейный угол двугранного угла – угол, являющийся разрезом этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру (угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, лежащими на гранях двугранного угла и имеющими на ребре общее начало).



Мера двугранного угла – мера соответствующего ему линейного угла.

Мера двугранного угла находится в пределах от 0 до 180 градусов.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых *называют отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.*

Утверждение: две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми
называется длина их
общего перпендикуляра

Проверь себя

- Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
- Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
- Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- Если плоскость перпендикулярна одной из двух …. прямых , то она ,,,, другой прямой.
- Две прямые, перпендикулярные одной плоскости ,,,,,,
- Что такое перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость?
- Расстояние от точки до плоскости – это …
- Что такое наклонная? Что такое проекция наклонной?
- Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
- Какие плоскости называются перпендикулярными?
- Признак перпендикулярности плоскостей.
- **Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?**