

СФЕРА

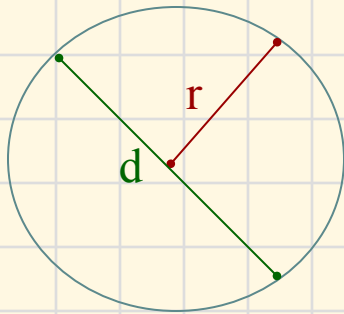
И

шар

Геометрия 11 класс

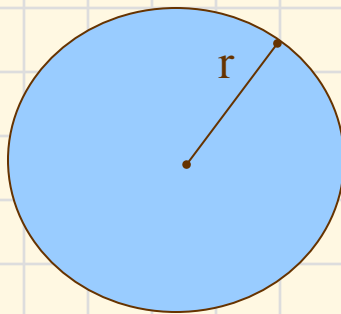


Окружность и круг



- **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии r от данной точки.

- r – радиус;
- d – диаметр

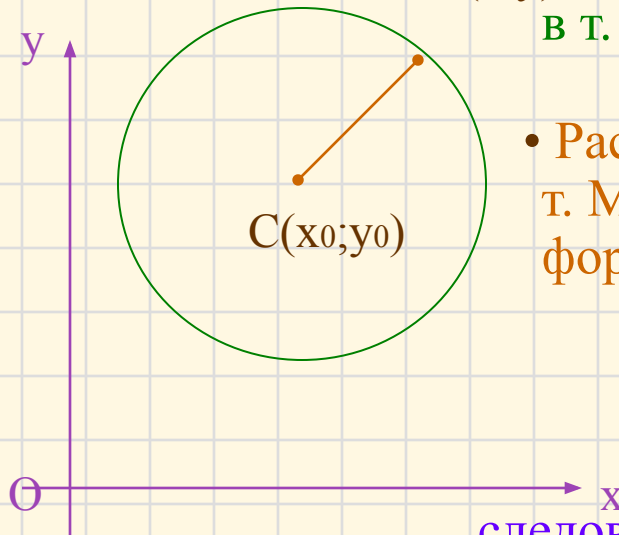


- Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Уравнение окружности

- Зададим прямоугольную систему координат Oxy

$M(x; y)$ Построим окружность с центром в т. C и радиусом r



- Расстояние от произвольной т. $M(x; y)$ до т. C вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$MC = r, \text{ или } MC^2 = r^2$$

следовательно уравнение

окружности имеет вид:

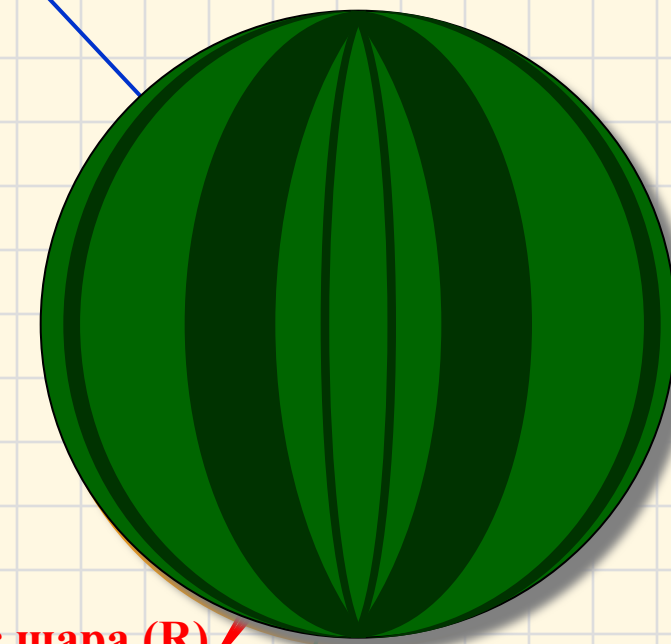
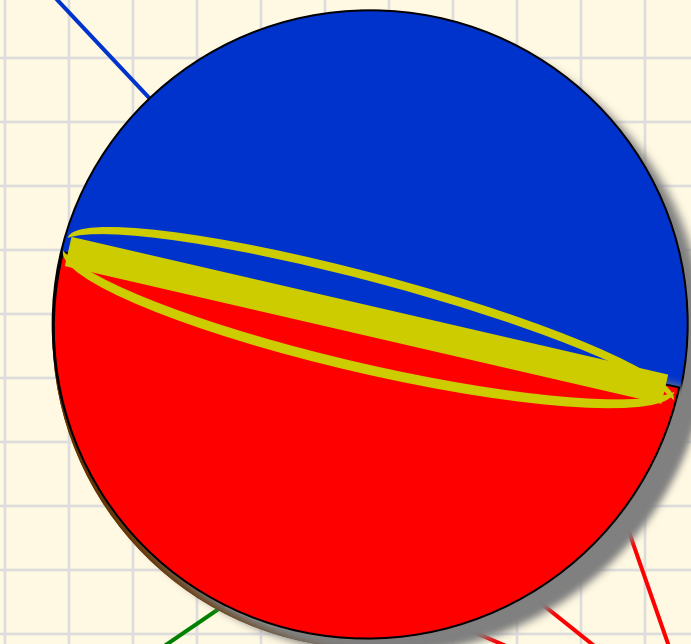
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Сфера – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на **данном расстоянии (R)** от **данной точки (C)**.

Шар – это тело, ограниченное сферой.

Центр сферы (C)

Центр шара (C)



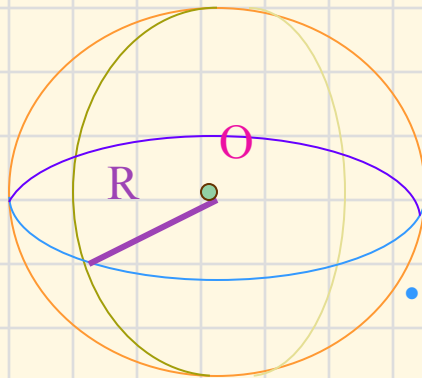
Диаметр сферы ($d=2R$)

Радиус шара (R)
Радиус сферы (R)

Диаметр шара ($d=2R$)

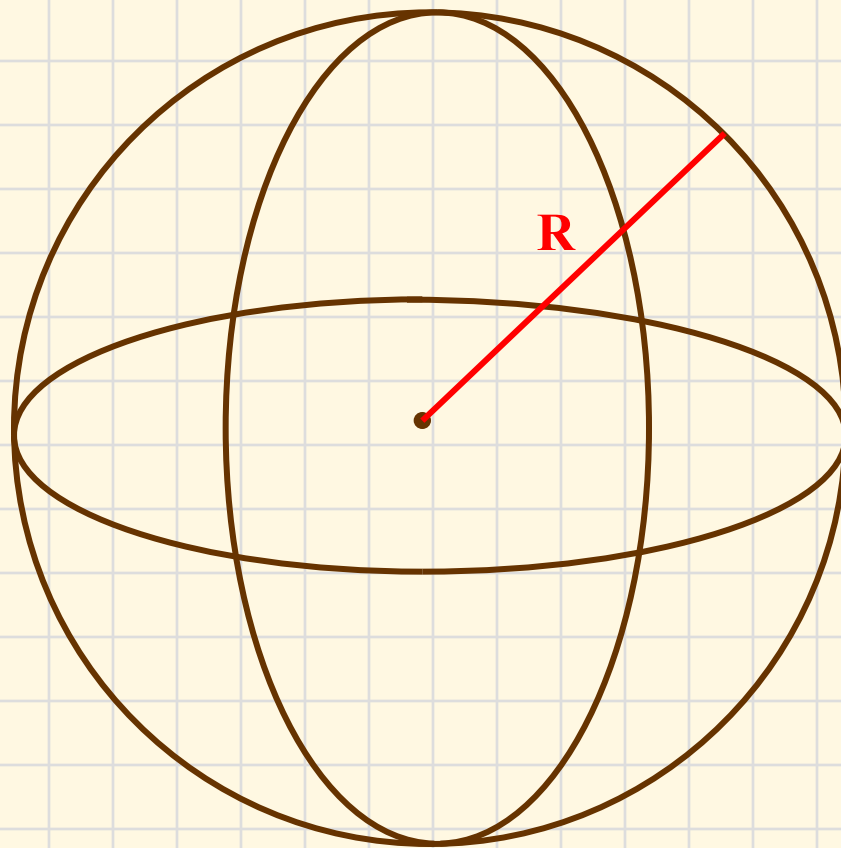


Как изобразить сферу?



- 1. Отметить центр сферы (т.О)
- 2. Начертить окружность с центром в т.О
- 3. Изобразить видимую вертикальную дугу (меридиан)
- 4. Изобразить невидимую вертикальную дугу
- 5. Изобразить видимую горизонтальную дугу (параллель)
 - 6. Изобразить невидимую горизонтальную дугу
 - 7. Провести радиус сферы R

Площадь сферы

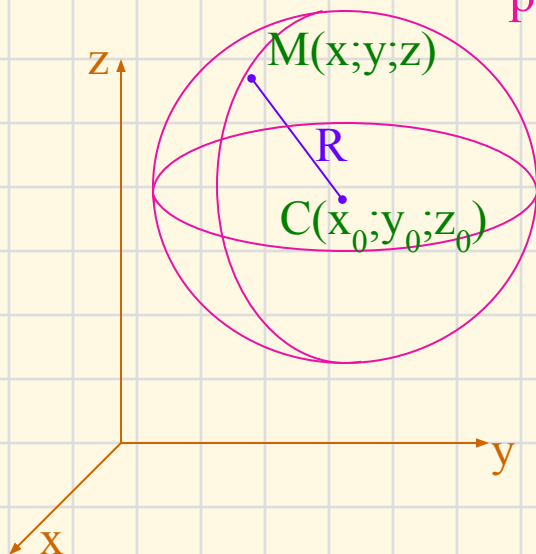


$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$

Уравнение сферы

- Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$

- Построим сферу с центром в т. C и радиусом R



$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

- $MC = R$, или $MC^2 = R^2$

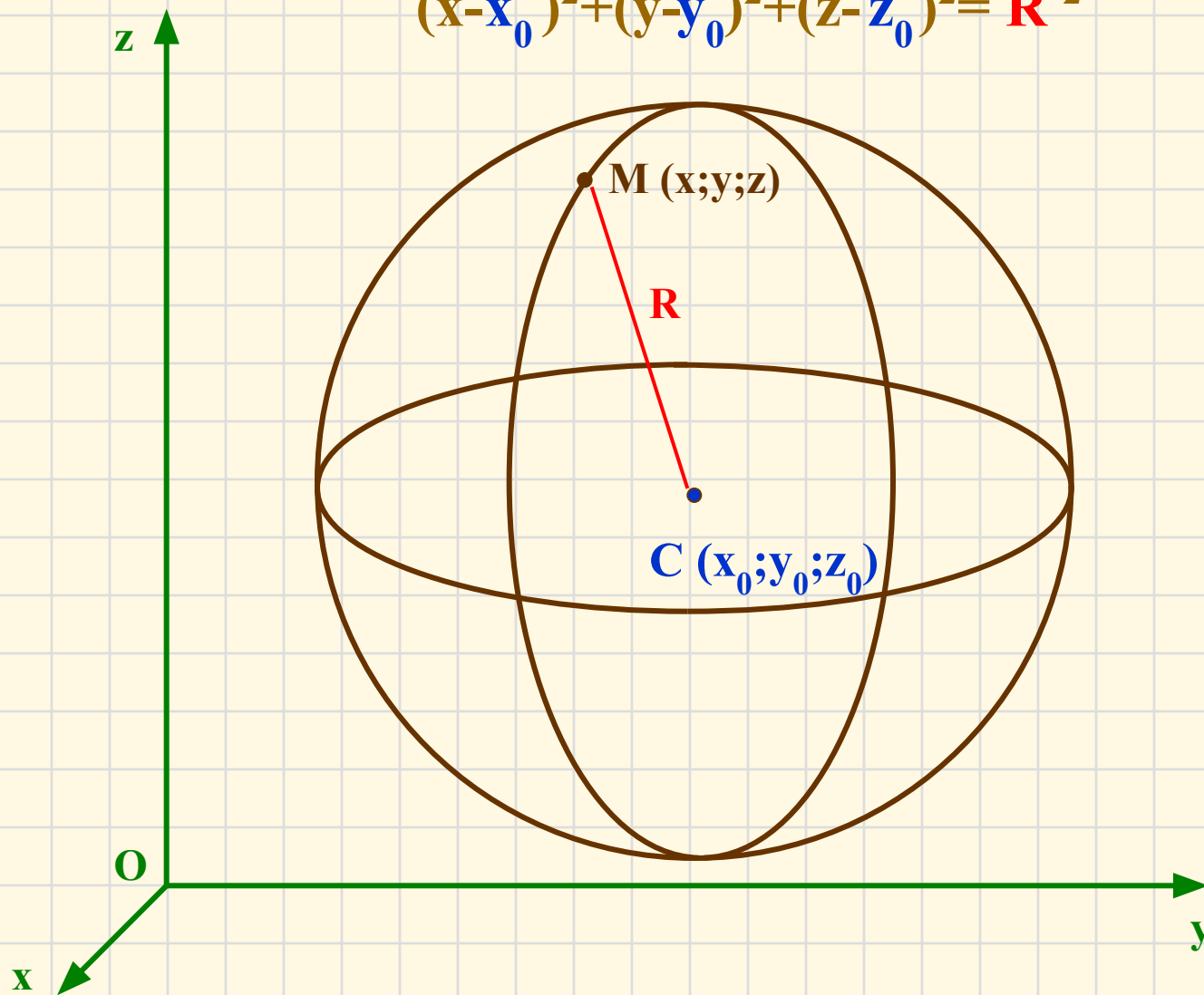
следовательно уравнение

сферы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

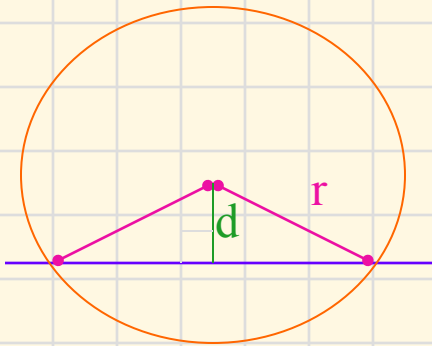
Уравнение сферы

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

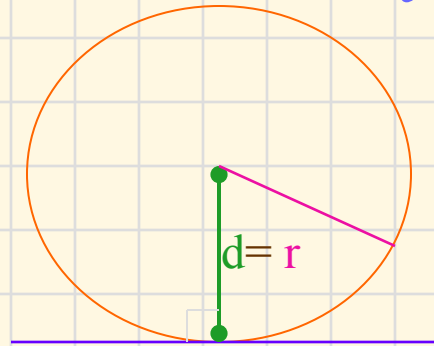


Взаимное расположение окружности и прямой

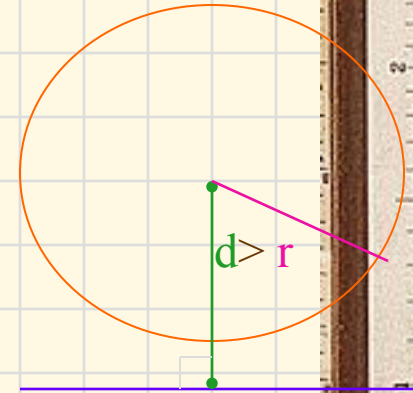
Возможны 3 случая



Если $d < r$, то прямая и окружность имеют 2 общие точки.



Если $d = r$, то прямая и окружность имеют 1 общую точку.

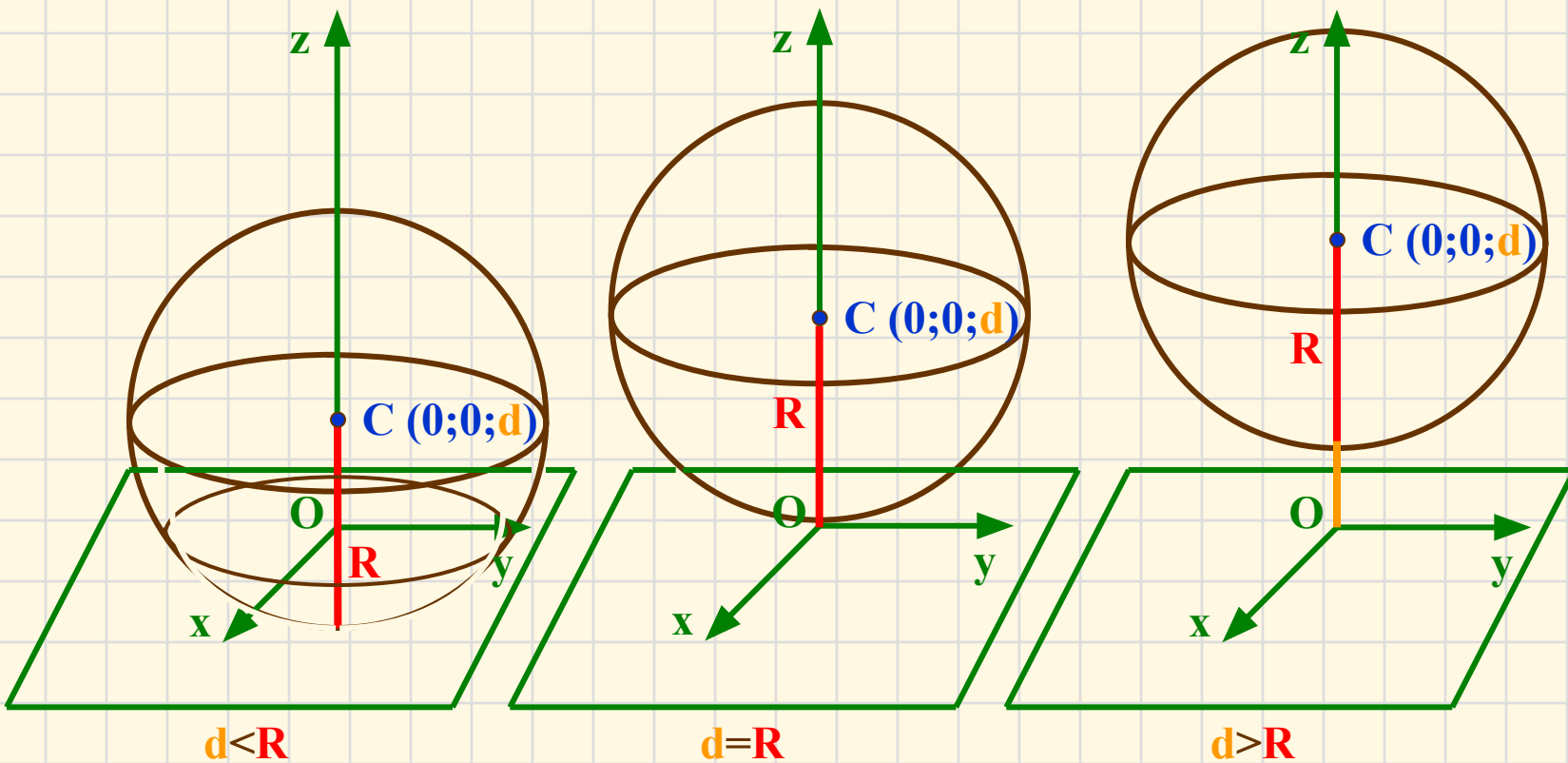


Если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Взаимное расположение сферы и плоскости

d – расстояние от центра сферы до плоскости

R – радиус сферы



Задача 1.

Зная координаты центра $C(2;-3;0)$, и радиус сферы $R=5$, записать уравнение сферы.

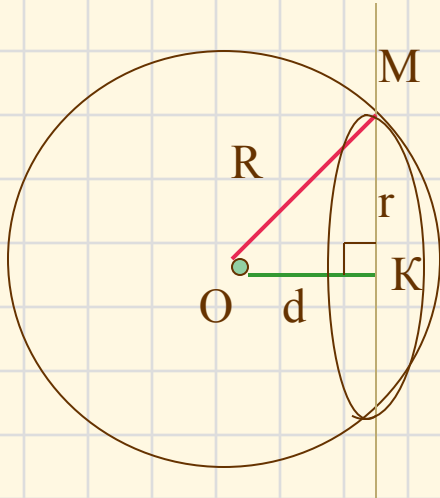
- Решение

так, как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, а координаты центра данной сферы $C(2;-3;0)$ и радиус $R=5$, то уравнение данной сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

Задача 2.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:

Шар с центром в т.О

$R=41$ дм

α - секущая плоскость

$d = 9$ дм

Найти: $r_{\text{сеч}} = ?$

Решение:

Рассмотрим $\triangle OMK$ – прямоугольный

$$OM = 41 \text{ дм}; \quad OK = 9 \text{ дм}; \quad MK = r, \quad r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

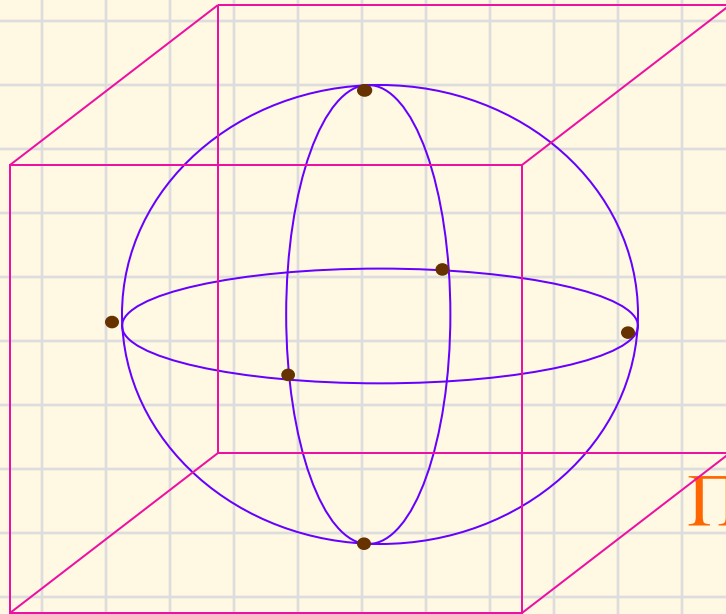
по теореме Пифагора: $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$

отсюда $r_{\text{сеч}} = 40$ дм

Ответ: $r_{\text{сеч}} = 40$ дм

Площадь сферы

- Сферу нельзя развернуть на плоскость.
- Опишем около сферы многогранник, так чтобы сфера касалась всех его граней.
- За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани



Площадь сферы радиуса

$$R: \quad S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$$

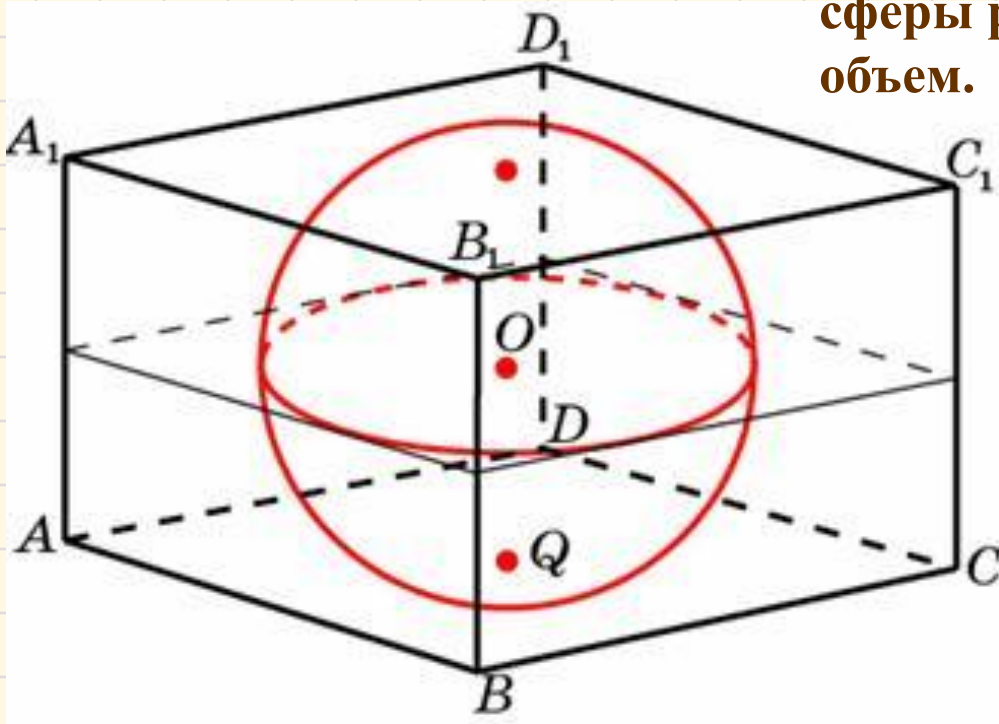
т.е.: Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большего круга

$$\frac{S_{\text{шара}}}{S_{\text{круга}}} = 4$$

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

(устно)

Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объем.



Ответ: 512

Задача 3.

Найти площадь поверхности сферы,
радиус которой = 6 см.

Дано:

сфера

$R = 6$ см

Найти:

$S_{\text{сф}} = ?$

Решение:

1. $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$

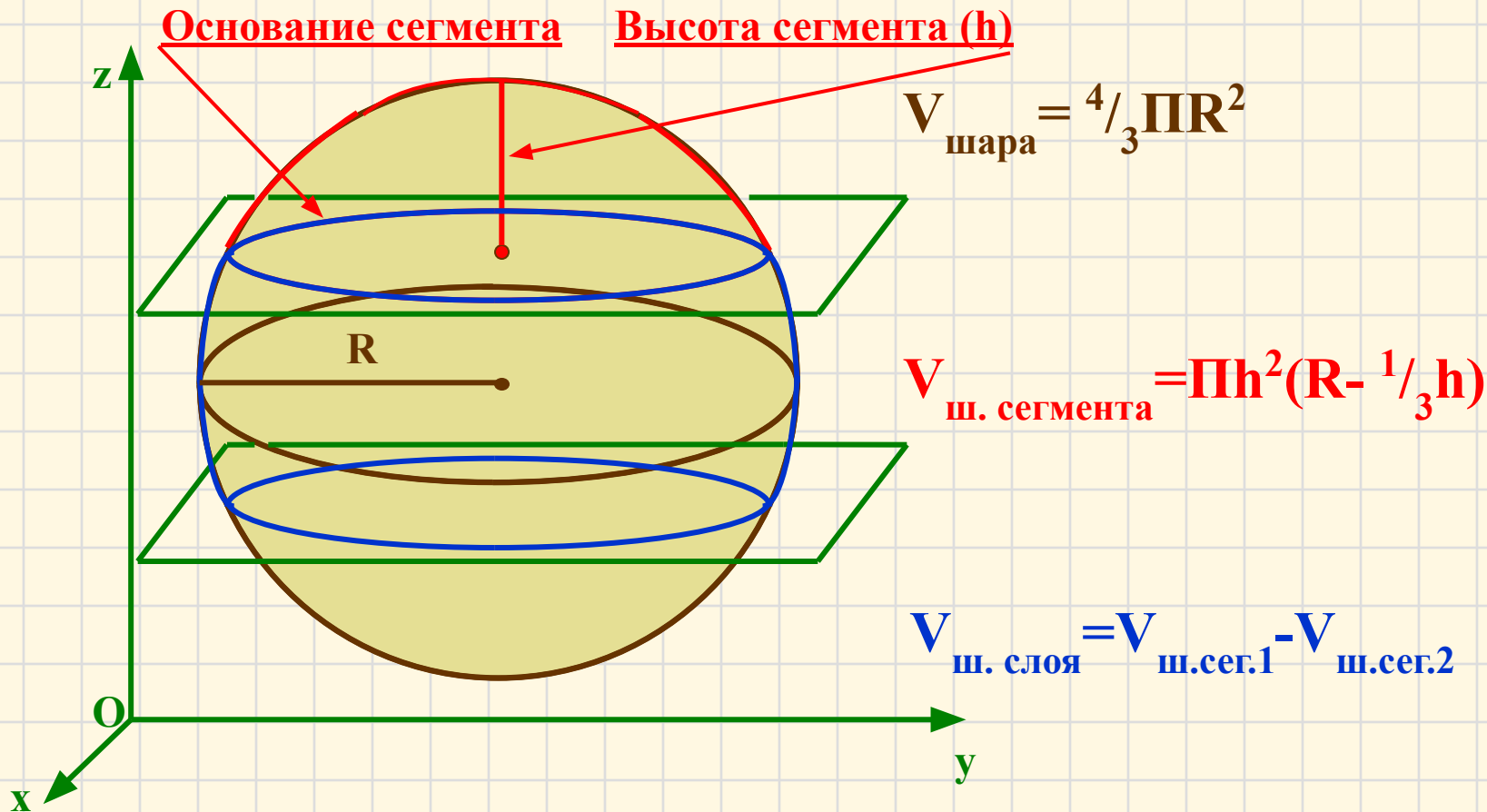
2. $S_{\text{сф}} = 4\pi 6^2 = 144\pi$ см²

Ответ: $S_{\text{сф}} = 144\pi$ см²

Объём шара, шарового сегмента и шарового слоя

Шаровой сегмент – это часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

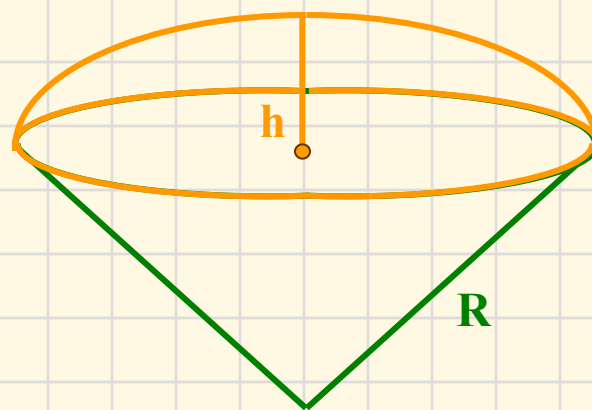
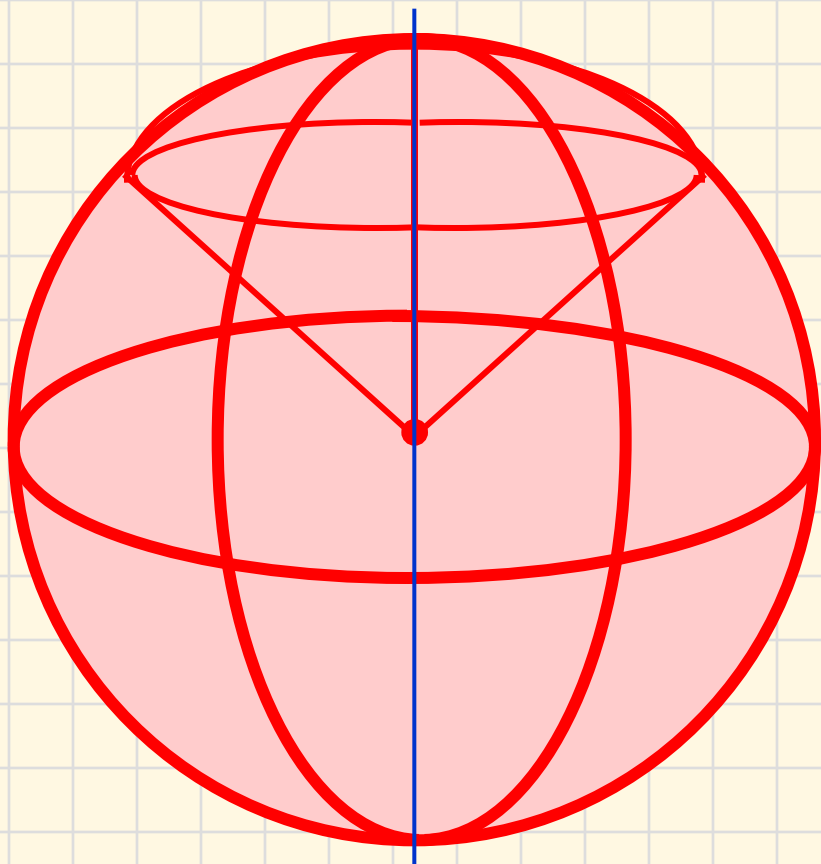
Шаровой слой – это часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями.



Объём шарового сектора

Шаровой сектор – это тело, полученное вращением **кругового сектора, с углом, меньшим 90°** , вокруг **прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов**.

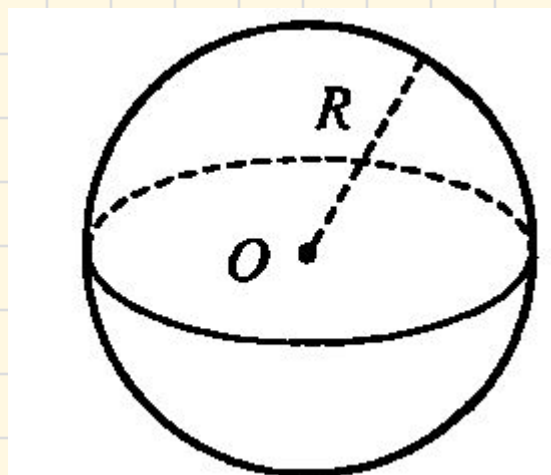
Шаровой сектор состоит из **шарового сегмента** и **конуса**.



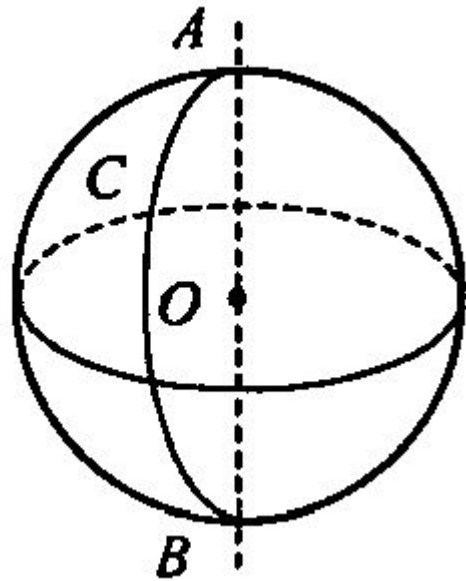
$$V_{\text{ш. сектора}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы





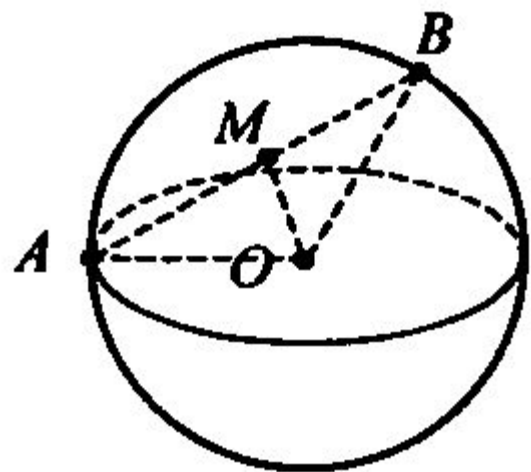
Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Существует и другое определение шара:

Шаром радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.



№ 574 а)

Дано: A и B лежат на сфере, $R = 50$ см, $AB = 40$ см. $AM = MB$.

Найти: OM .

Так как $OM \perp AB$ (смотрите предыдущую задачу), то $\triangle AMO$ – прямоугольный. По теореме Пифагора $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $AO = R = 50$ (см),

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ (см)}. OM = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ (см)}.$$

**№ 576 а). Дано: $R = 3$; $A (2; -4; 7)$.
Найти: уравнение сферы.**

Решение: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$.

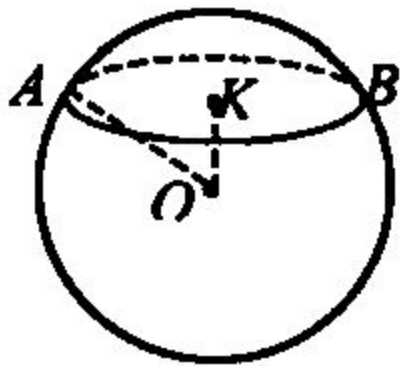
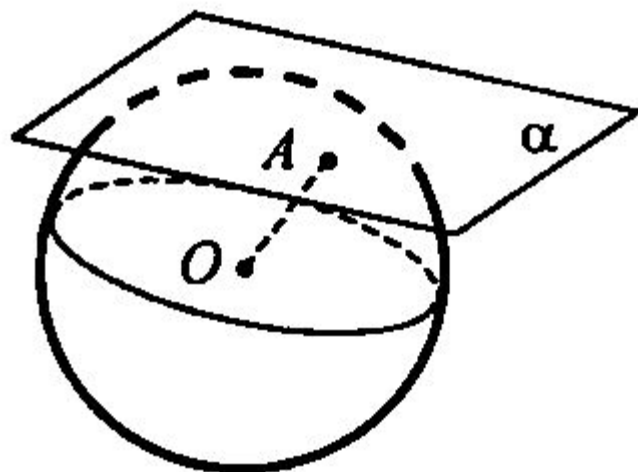


Рис. 5

Задача № 580. Дано: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).

Найти: $S_{\text{сеч.}}$

Решение: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2$. $\triangle AOK$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм).
 $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм²). (Ответ: 1600π дм².)



Теорема: (свойство касательной плоскости)

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема: (признак касательной плоскости)

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

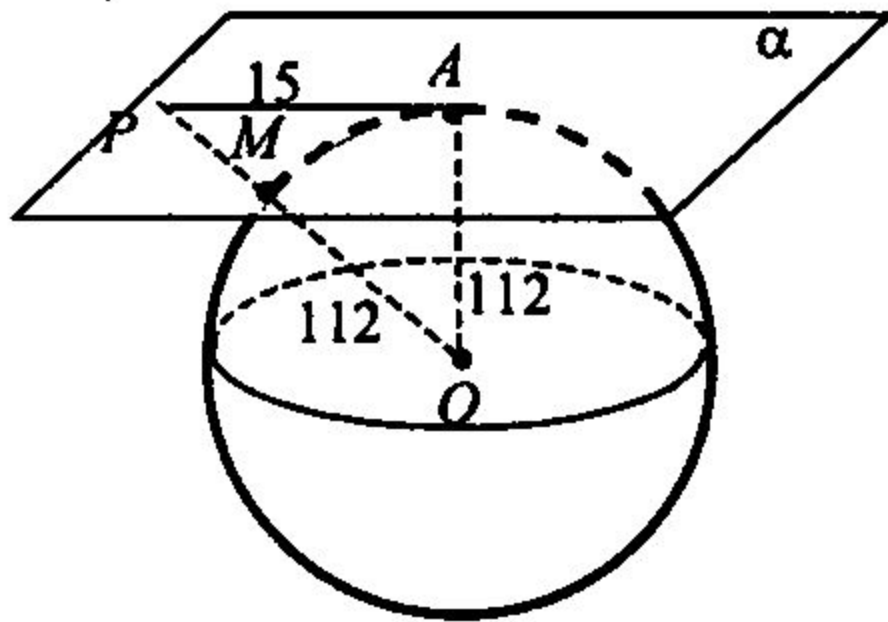


Рис. 9

Задача № 592. Дано: сфера с центром в точке O и радиусом R , $R = 112$ см, α – касательная плоскость.

Решение: $\triangle OAP$ – прямоугольный, так как $OA = R$, α – касательная плоскость. По теореме

Пифагора найдем $OP = \sqrt{112^2 + 15^2} = 13$ (см). $PM = OP - R = 13 - 112 = 1$ (см). (Ответ: 1 см.)

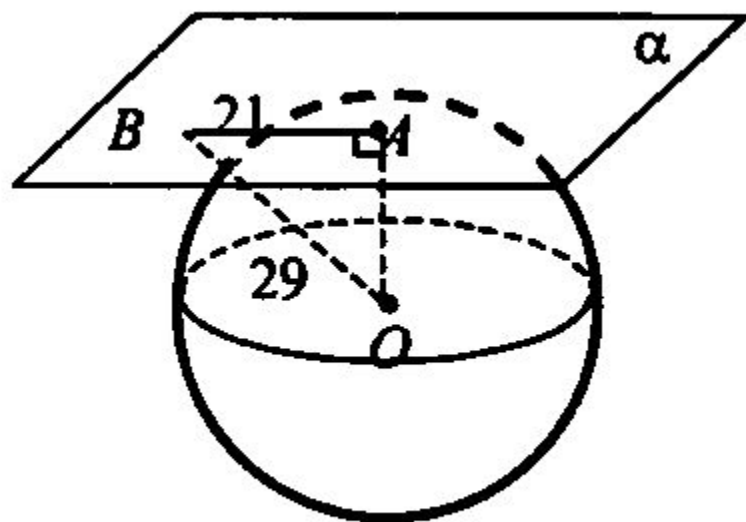


Рис. 10

Задача. Дан шар с центром в точке O , α – касательная плоскость, точка A – точка касания, точка B лежит на плоскости α , $AB = 21$ см,

Решение: $R = OA$, так как A – точка касания, рассмотрим прямоугольный $\triangle OAB$ (α – касательная плоскость, A – точка касания, значит $OA \perp \alpha$):

по теореме Пифагора найдем $R = OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

(**Ответ:** 20 см.)

$$S = 4\pi R^2.$$

Сечение шара площадью $S = 16\pi \text{ см}^2$ находится на расстоянии 3 см от центра шара.

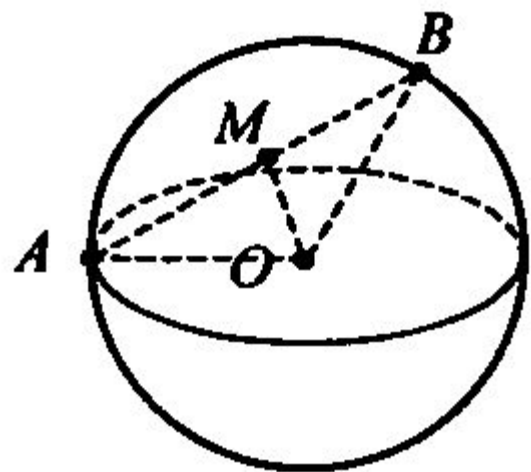
Найдите площадь его поверхности.

К сфере с $S = 64\pi \text{ см}^2$ проведена касательная плоскость. Кратчайшее расстояние от точки A , лежащей в этой плоскости, до данной сферы равно 1 см.

Найти расстояние от точки A до точки касания сферы с плоскостью.

Два взаимно перпендикулярных сечения сферы равноудалены от ее центра. При этом центр сферы находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от общей хорды этих сечений, равной 6 см.

Найдите площадь сферы.



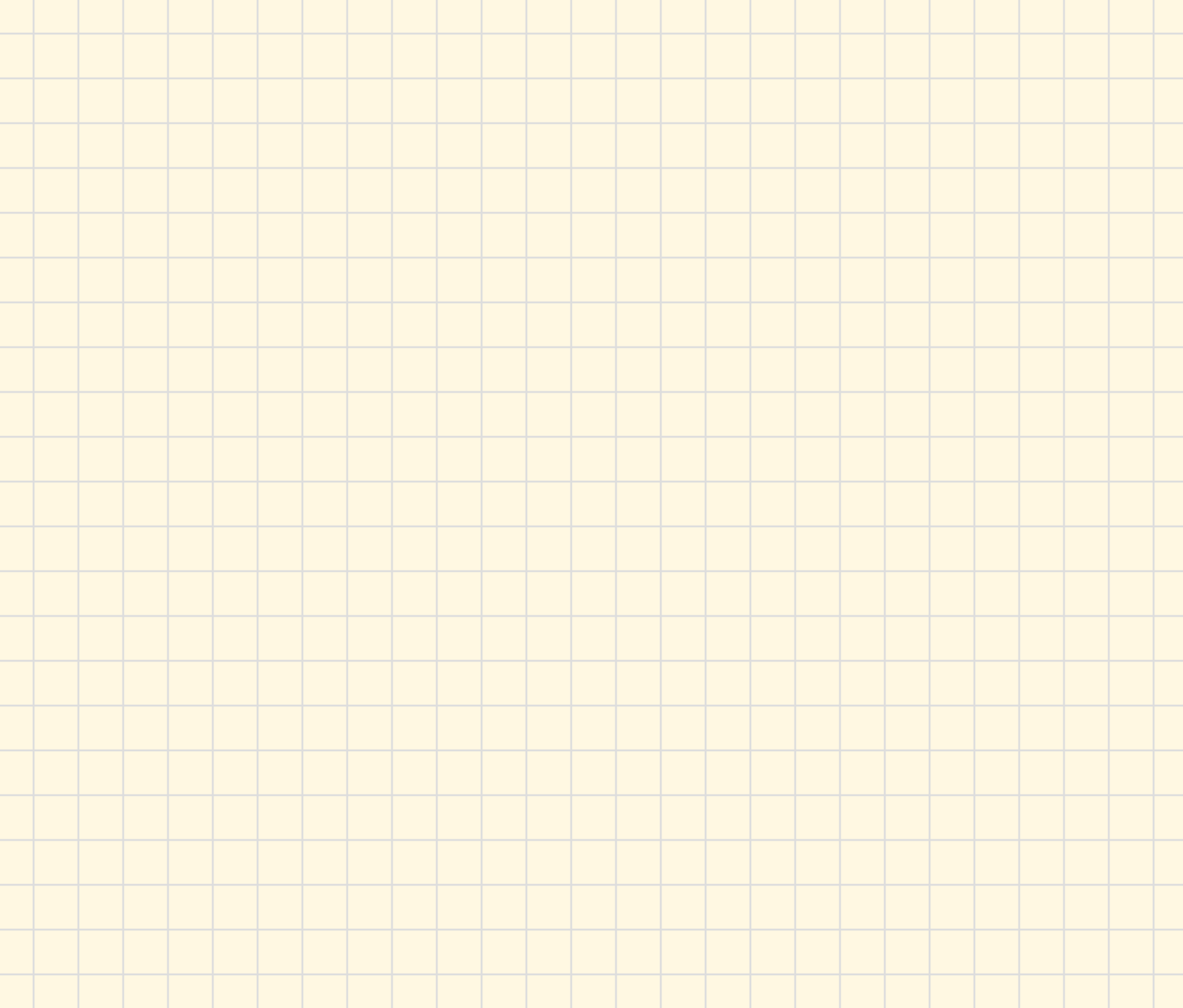
№ 574 а)

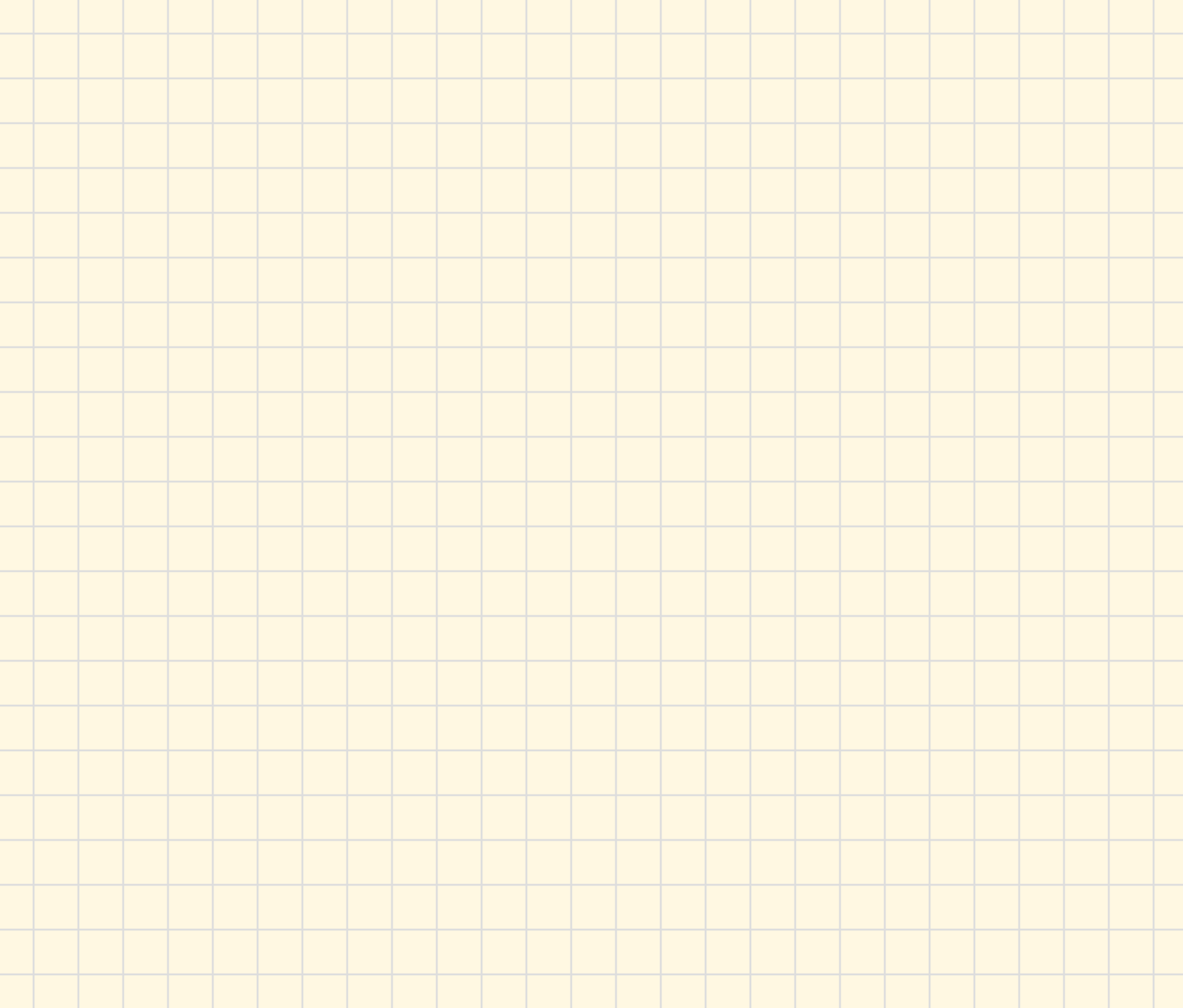
Дано: A и B лежат на сфере, $R = 50$ см, $AB = 40$ см. $AM = MB$.

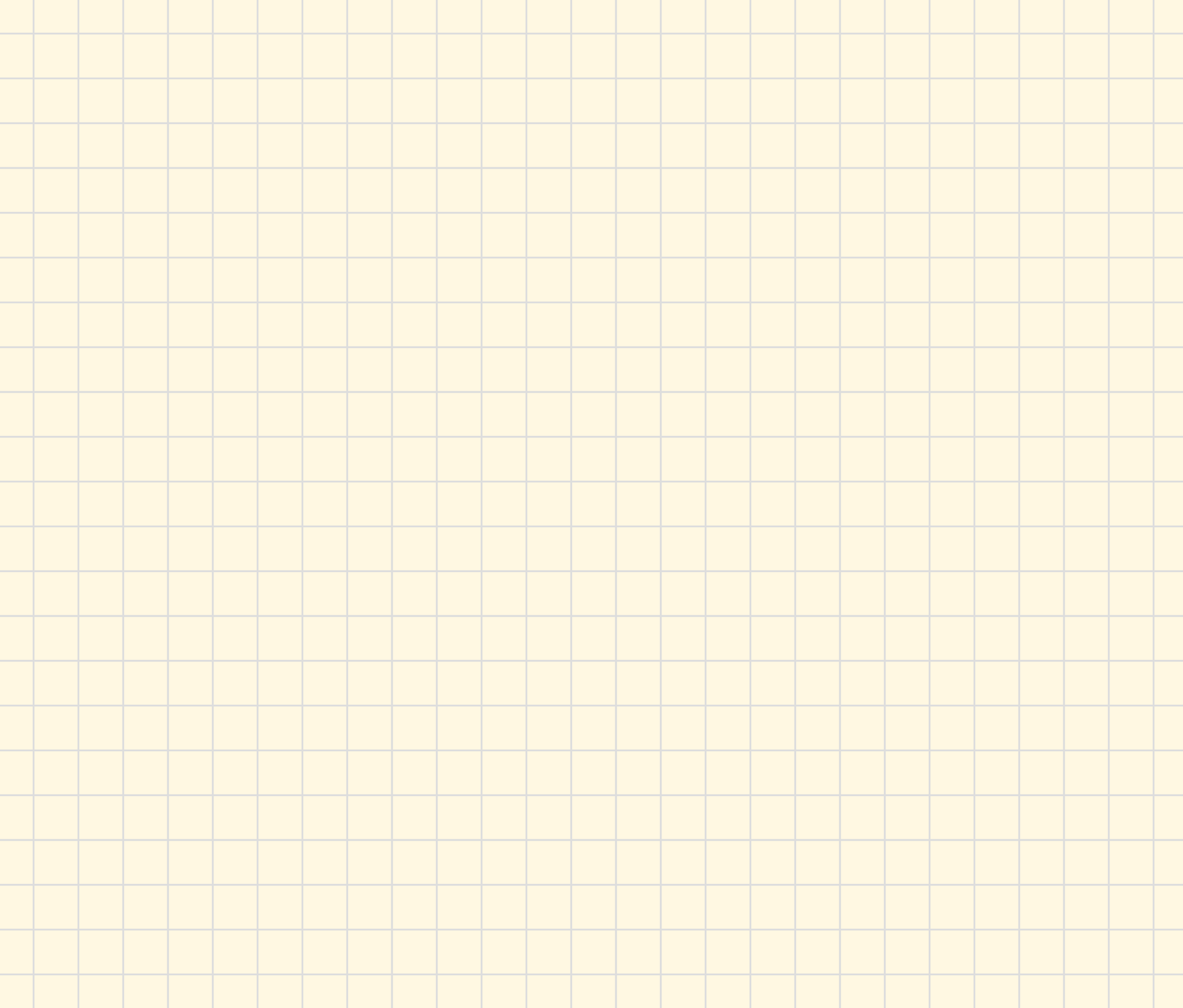
Найти: OM .

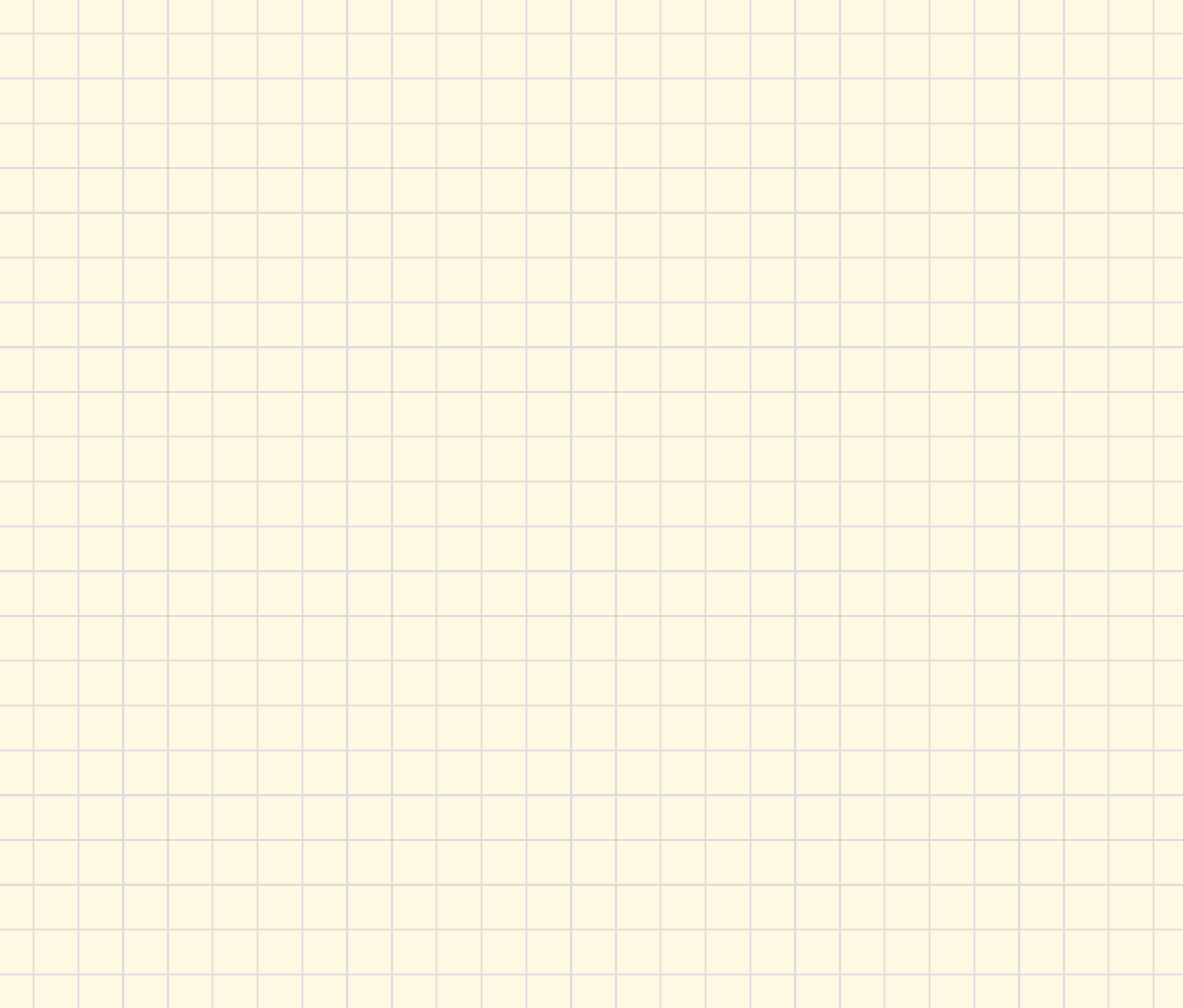
Так как $OM \perp AB$ (смотрите предыдущую задачу), то $\triangle AMO$ – прямоугольный. По теореме Пифагора $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $AO = R = 50$ (см),

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ (см)}. OM = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ (см)}.$$









**№ 576 а). Дано: $R = 3$; $A (2; -4; 7)$.
Найти: уравнение сферы.**

Решение: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$.

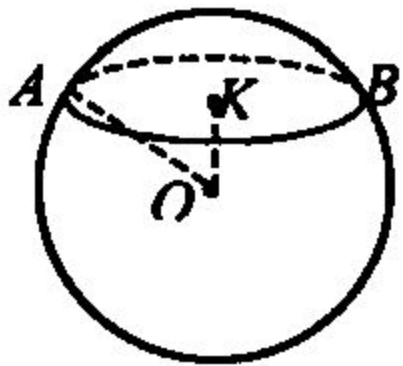
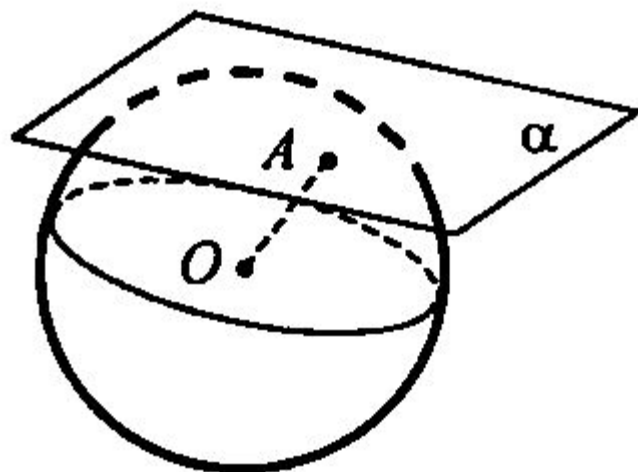


Рис. 5

Задача № 580. Дано: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).

Найти: $S_{\text{сеч.}}$

Решение: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2$. $\triangle AOK$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм).
 $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм²). (Ответ: 1600π дм².)



Теорема: (свойство касательной плоскости)

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема: (признак касательной плоскости)

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

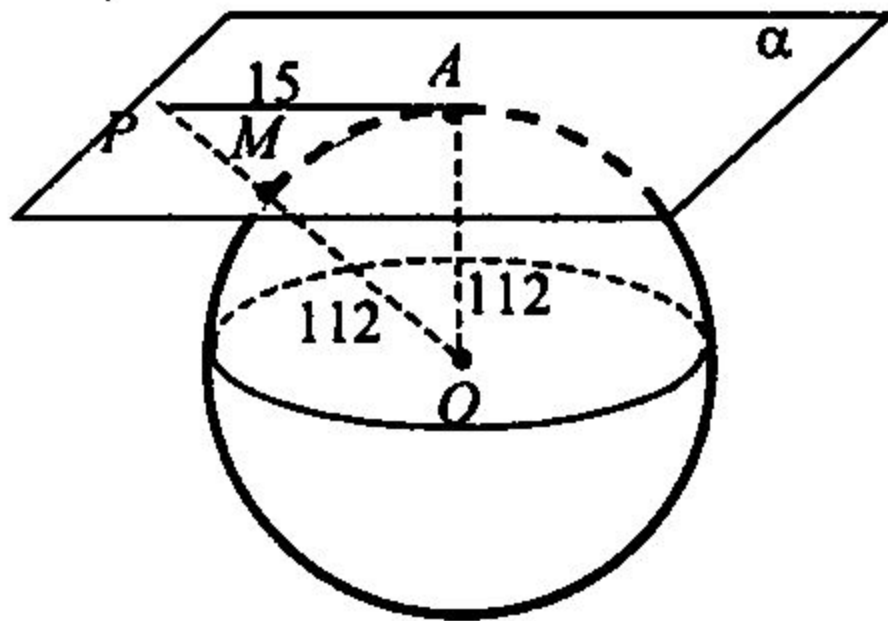


Рис. 9

Задача № 592. Дано: сфера с центром в точке O и радиусом R , $R = 112$ см, α – касательная плоскость.

Решение: $\triangle OAP$ – прямоугольный, так как $OA = R$, α – касательная плоскость. По теореме

Пифагора найдем $OP = \sqrt{112^2 + 15^2} = 113$ (см). $PM = OP - R = 113 - 112 = 1$ (см). (Ответ: 1 см.)

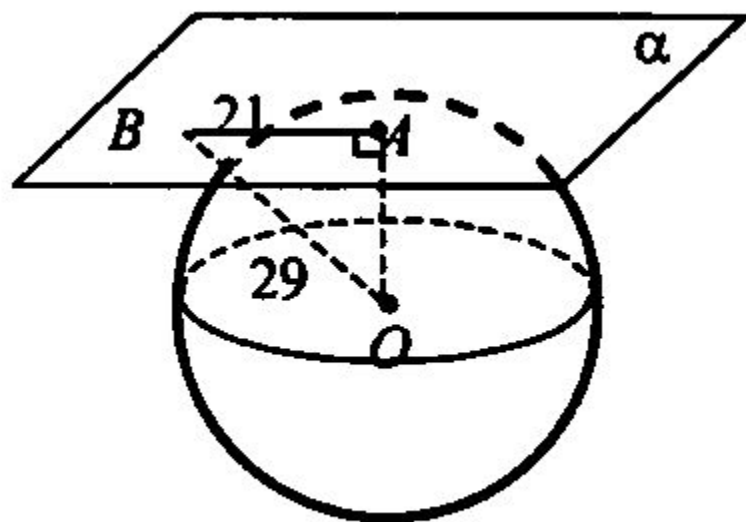


Рис. 10

Задача. Дан шар с центром в точке O , α – касательная плоскость, точка A – точка касания, точка B лежит на плоскости α , $AB = 21$ см,

Решение: $R = OA$, так как A – точка касания, рассмотрим прямоугольный $\triangle OAB$ (α – касательная плоскость, A – точка касания, значит $OA \perp \alpha$):

по теореме Пифагора найдем $R = OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

(**Ответ:** 20 см.)

