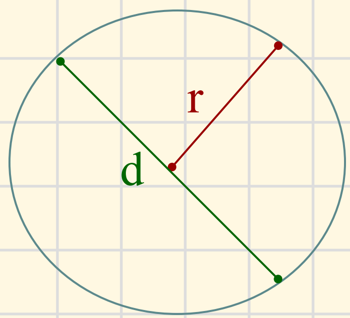
СФЕРА
и
шар

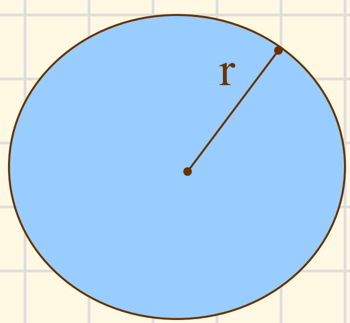
Геометрия 11 класс

Окружность и круг



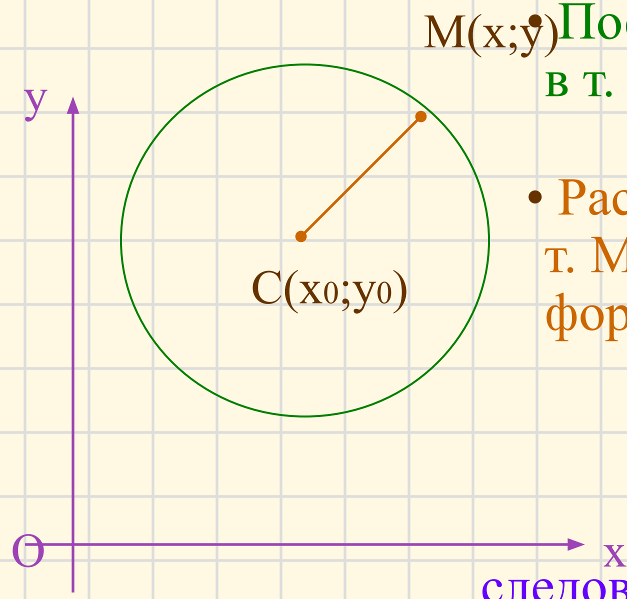
- **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии r от данной точки.

- r – радиус;
- d – диаметр



- Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

Уравнение окружности



- Зададим прямоугольную систему координат *Oxy*
- Построим окружность с центром в т. С и радиусом r
- Расстояние от произвольной т. М (х;у) до т.С вычисляется по формуле:
- $MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

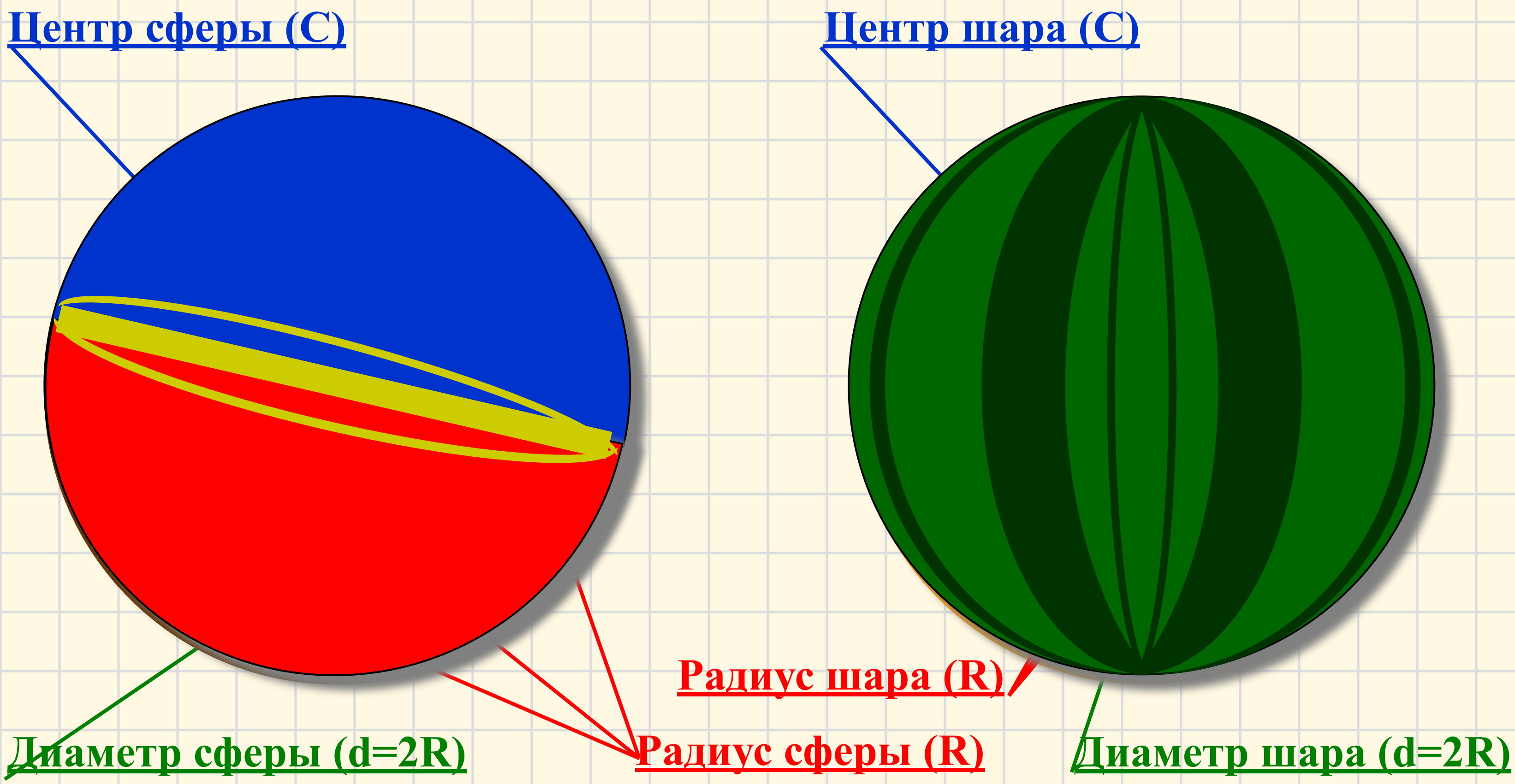
$MC = r$, или $MC^2 = r^2$

следовательно уравнение окружности имеет вид:

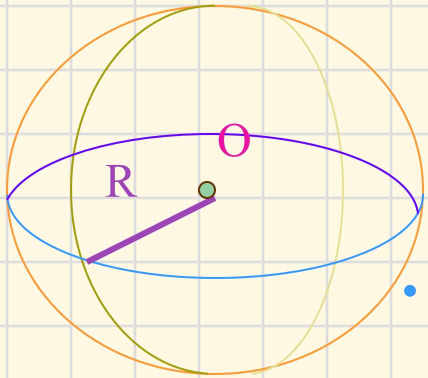
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Сфера – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии (R) от данной точки (С).

Шар – это тело, ограниченное сферой.

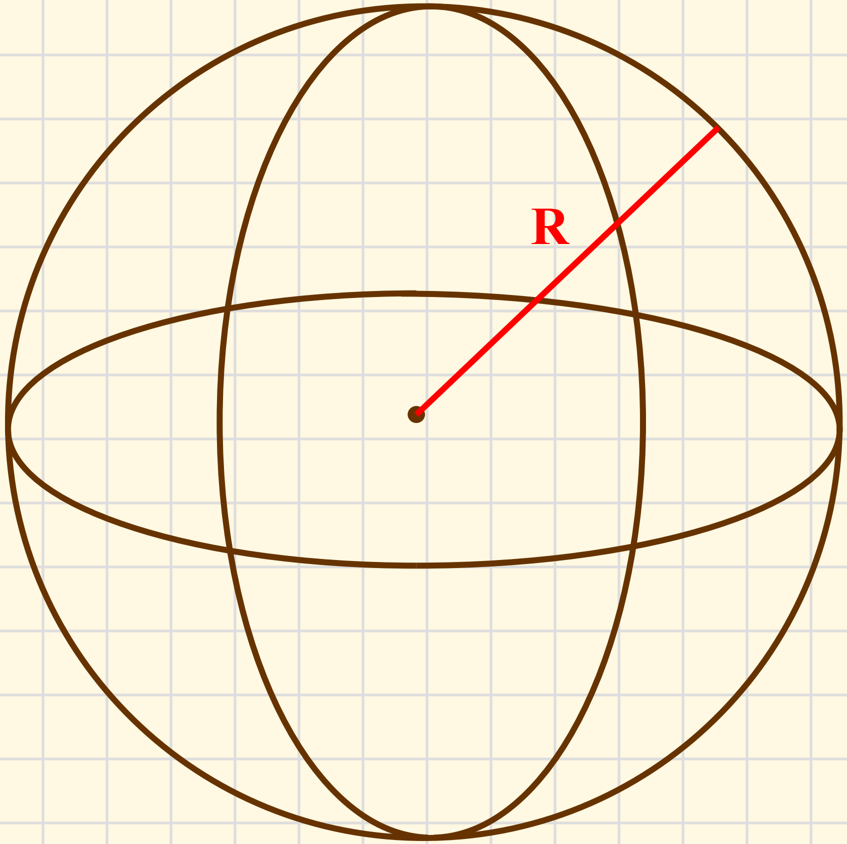


Как изобразить сферу?



- 1. Отметить центр сферы (т.О)
- 2. Начертить окружность с центром в т.О
- 3. Изобразить видимую вертикальную дугу (меридиан)
- 4. Изобразить невидимую вертикальную дугу
- 5. Изобразить видимую горизонтальную дугу (параллель)
- 6. Изобразить невидимую горизонтальную дугу
- 7. Провести радиус сферы R

Площадь сферы

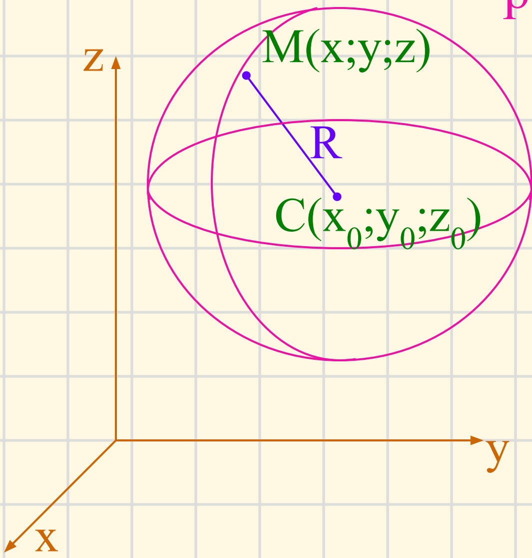


$$S_{сферы} = 4ПR^2$$

Уравнение сферы

- Зададим прямоугольную систему координат *Oxyz*

- Построим сферу с центром в т. C и радиусом R



$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

- $MC = R$, или $MC^2 = R^2$

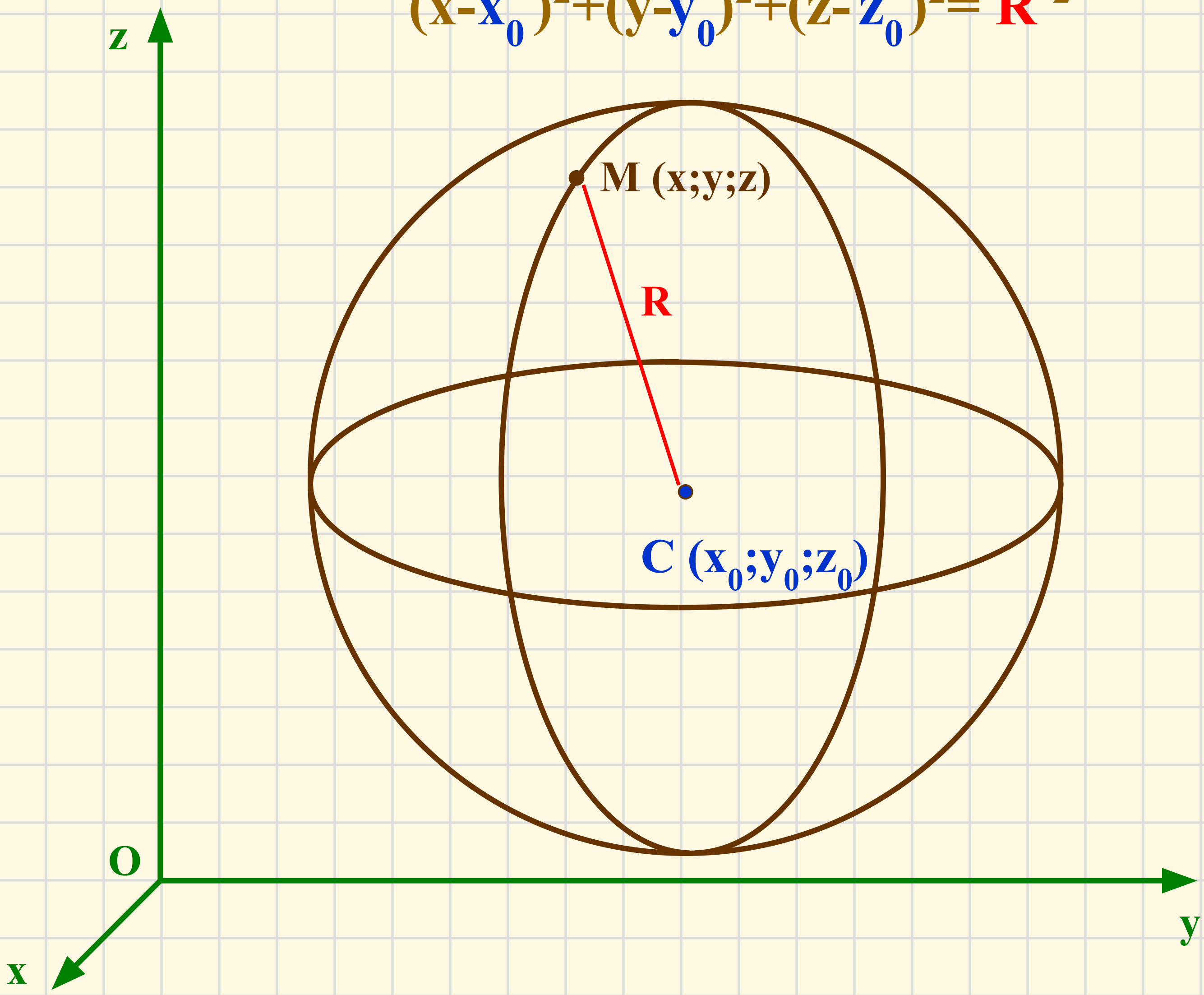
следовательно уравнение

сферы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

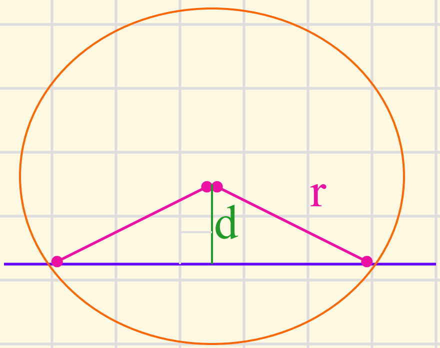
Уравнение сферы

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

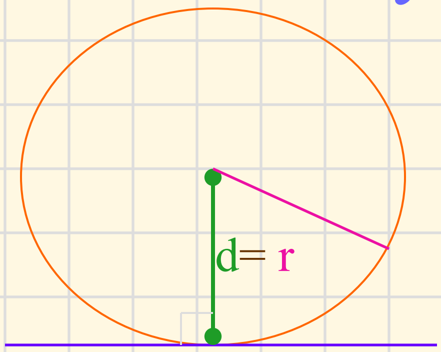


Взаимное расположение окружности и прямой

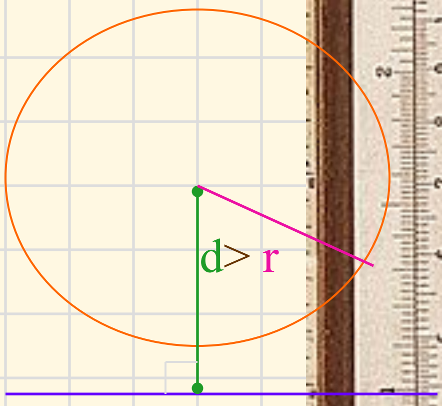
Возможны 3 случая



Если d < r, то прямая и окружность имеют 2 общие точки.



Если d = r, то прямая и окружность имеют 1 общую точку.

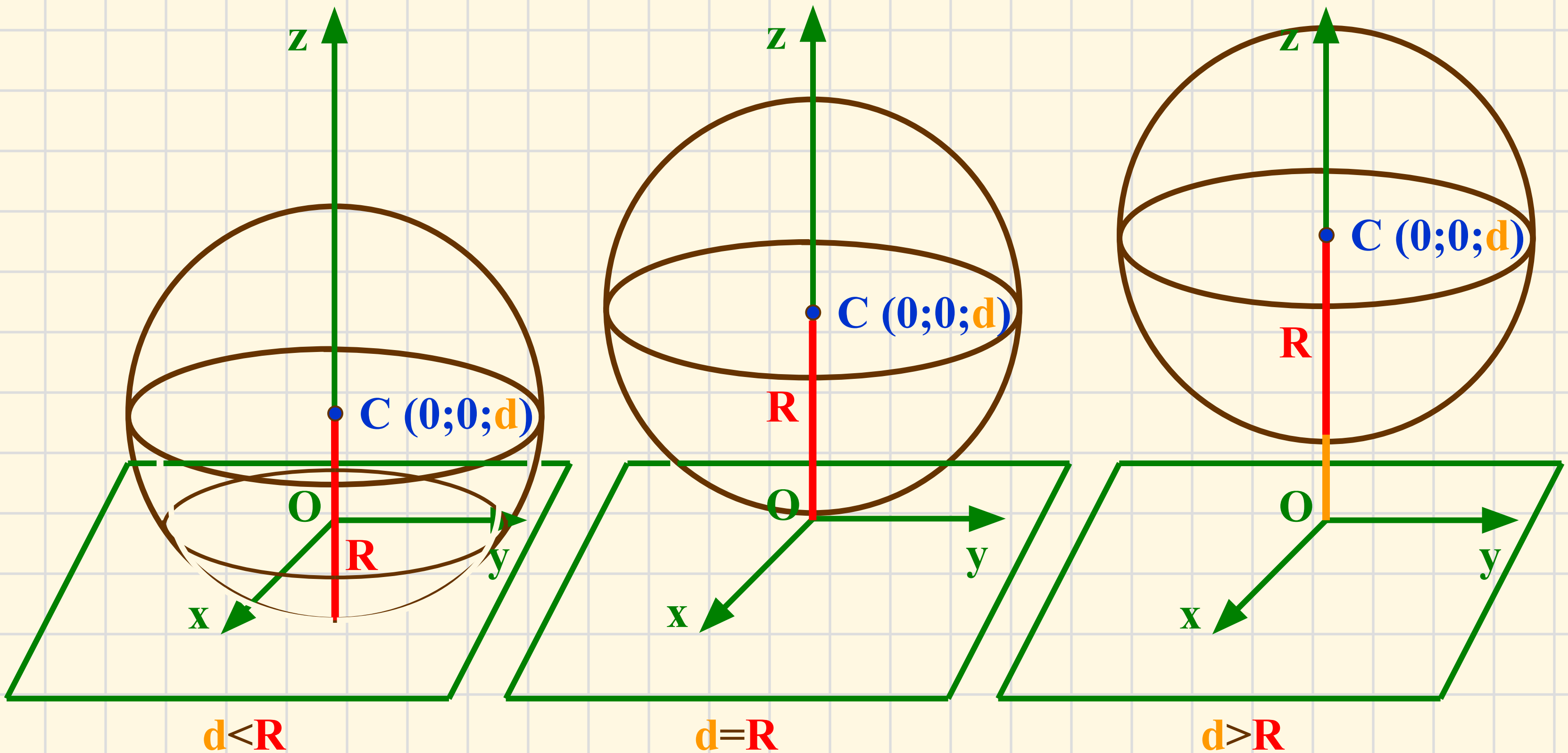


Если d > r, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Взаимное расположение сферы и плоскости

d – расстояние от центра сферы до плоскости

R – радиус сферы



Задача 1.

Зная координаты центра С(2;-3;0), и радиус сферы R=5, записать уравнение сферы.

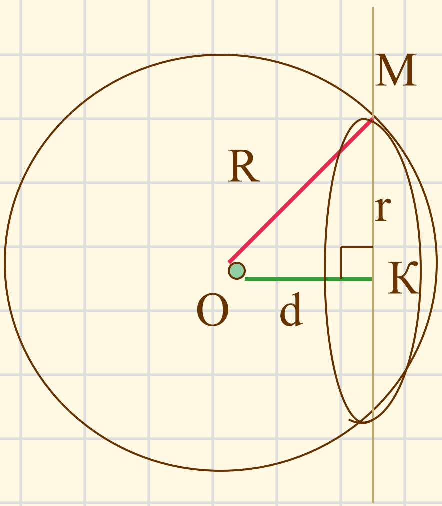
- Решение

так, как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2=R^2$, а координаты центра данной сферы С(2;-3;0) и радиус R=5, то уравнение данной сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Задача 2.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:

Шар с центром в т.O

R=41 дм

α - секущая плоскость

d = 9 дм

Найти: $r_{сеч} = ?$

Решение:

Рассмотрим ΔOMK – прямоугольный

OM = 41 дм; OK = 9 дм; MK = r, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

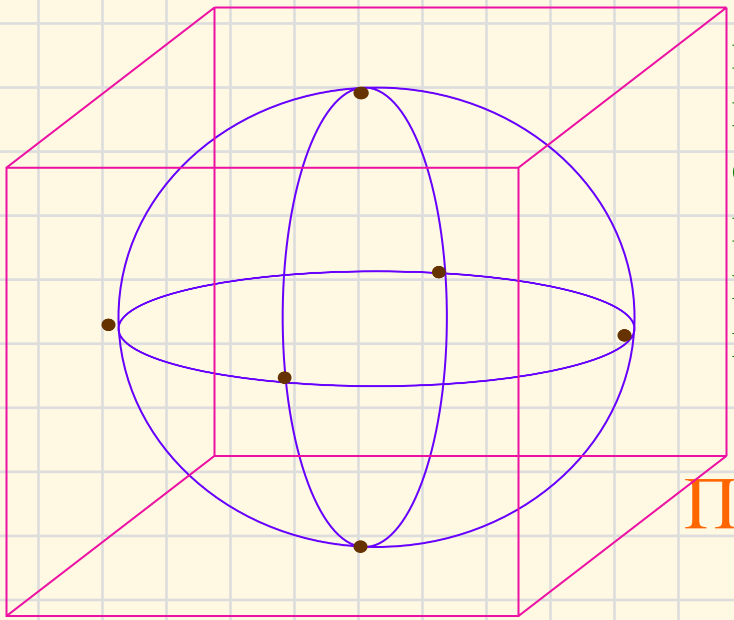
по теореме Пифагора: $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$

отсюда $r_{сеч} = 40$ дм

Ответ: $r_{сеч} = 40$ дм

Площадь сферы

- Сферу нельзя развернуть на плоскость.
- Опишем около сферы многогранник, так чтобы сфера касалась всех его граней.
- За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани



Площадь сферы радиуса R: $S_{сф}=4\pi R^2$

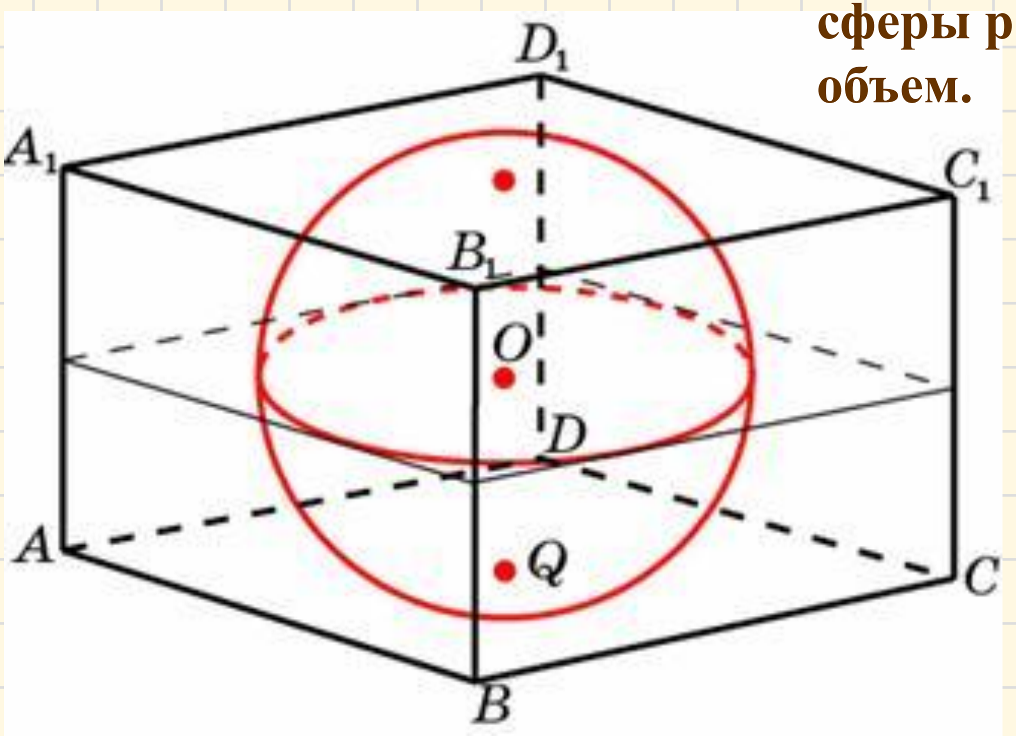
т.е.: Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большего круга

$$\frac{S_{шара}}{S_{круга}}=4$$

Готовимся к ЕГЭ

(устно)

Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объем.



Ответ: 512

Задача 3.

Найти площадь поверхности сферы, радиус которой = 6 см.

Дано:

сфера

$R = 6$ см

Найти:

$S_{сф} = ?$

Решение:

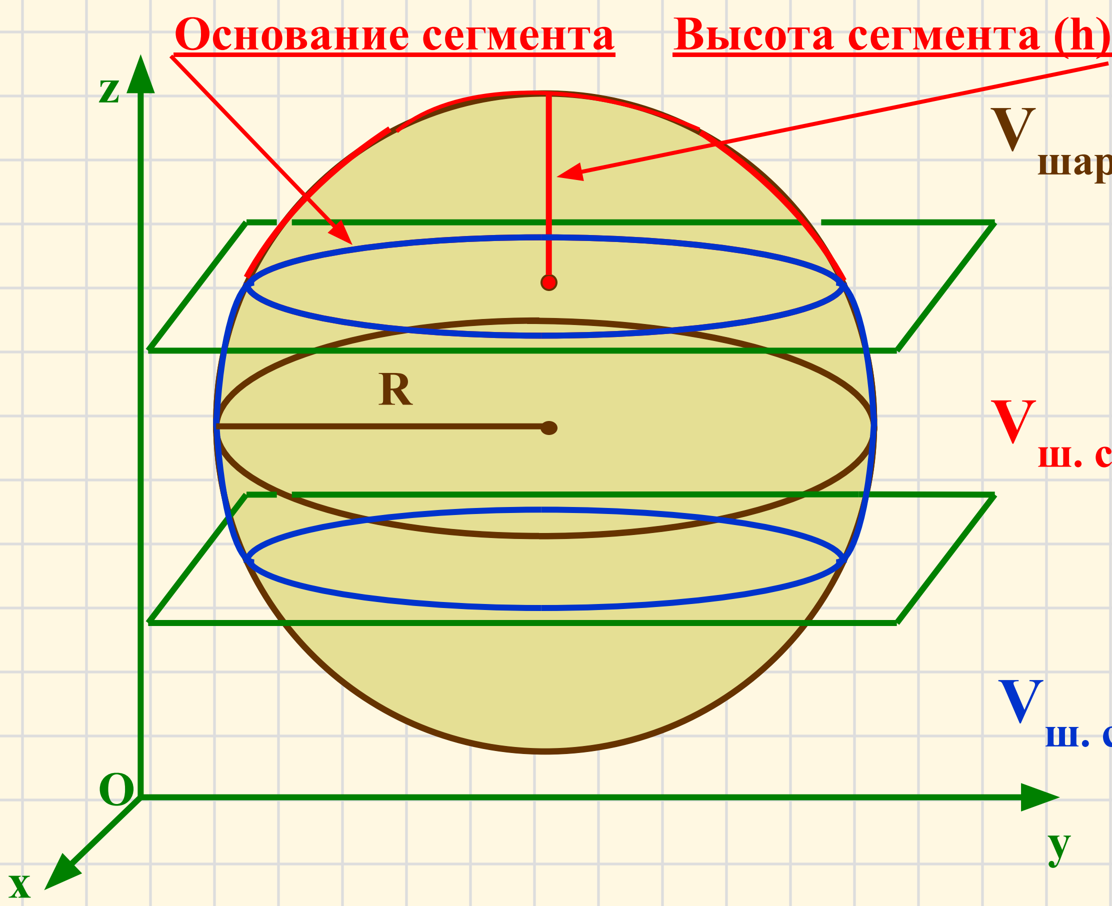
1. $S_{сф} = 4\pi R^2$
2. $S_{сф} = 4\pi\, 6^2 = 144\pi$ см^2

Ответ: $S_{сф} = 144\pi$ см^2

Объём шара, шарового сегмента и шарового слоя

Шаровой сегмент – это часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

Шаровой слой – это часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями.



$$V_{шара} = {}^{4}/_{3}\Pi R^2$$

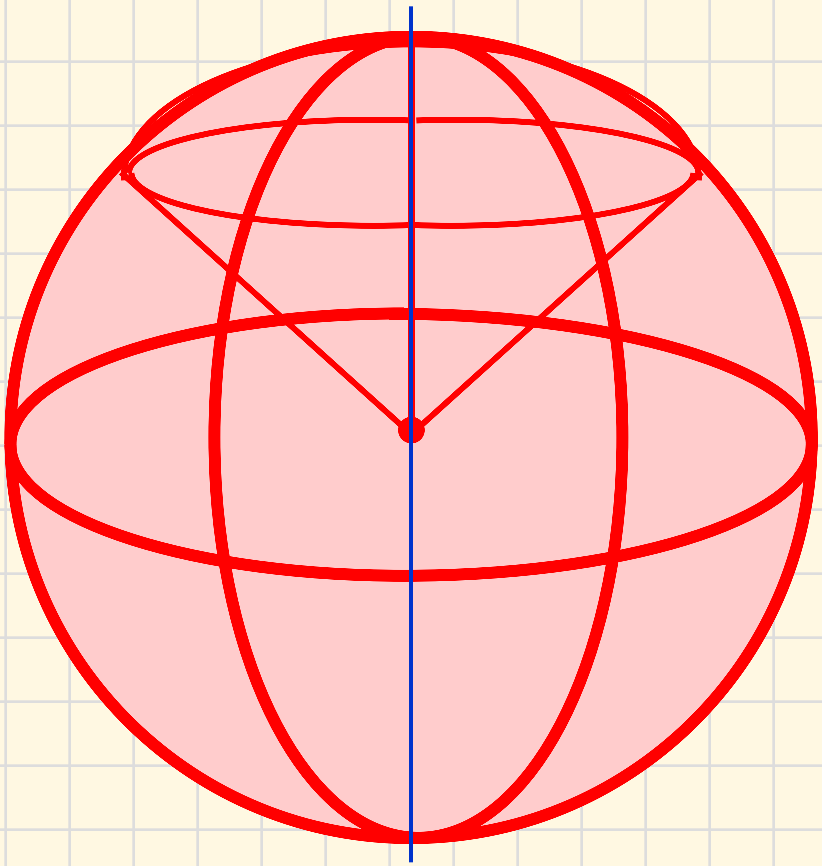
$$V_{ш.\ сегмента} = \Pi h^2(R - {}^{1}/_{3}h)$$

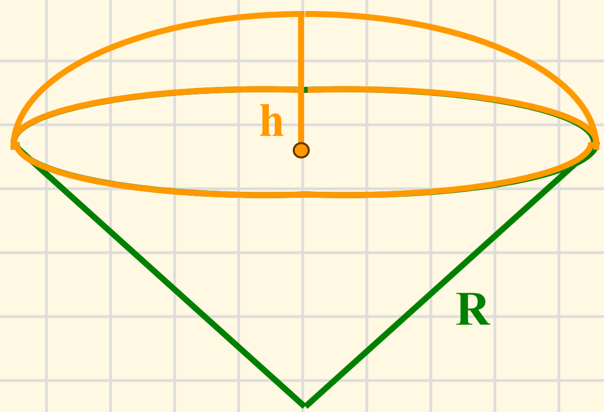
$$V_{ш.\ слоя} = V_{ш.сег.1} - V_{ш.сег.2}$$

Объём шарового сектора

Шаровой сектор – это тело, полученное вращением кругового сектора, с углом, меньшим 90º, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

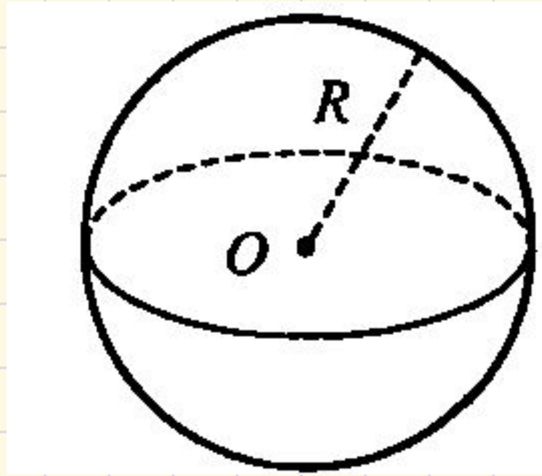
Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса.



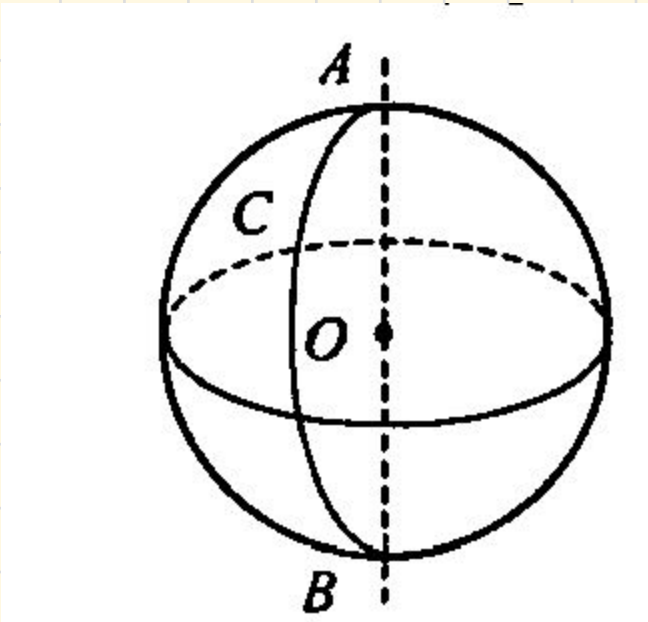


$$V_{\text{ш. сектора}} = {}^{2}/_{3}\Pi R^{2}h$$

Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы



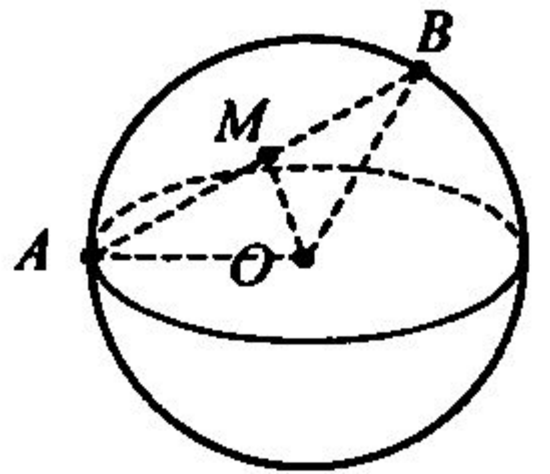
Сферой называется поверхиость, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Существует и другое определение шара:

Шаром радиуса *R* с центром в точке *O* называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки *O* на расстоянии, не превышающем *R* (включая *O*), и не содержит других точек.



№ 574 а)

Дано: A и B лежат на сфере, $R = 50$ см, $AB = 40$ см. $AM = MB$.
Найти: OM.

Так как $OM \perp AB$ (смотрите предыдущую задачу), то ΔAMO – прямоугольный. По теореме Пифагора $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $AO = R = 50$ (см),

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ (см)}. \; OM = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ (см)}.$$

№ 576 а). *Дано*: $R = 3$; $A\ (2; -4; 7)$.

Найти: уравнение сферы.

Решение: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$.

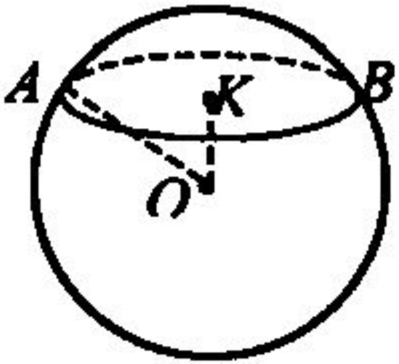
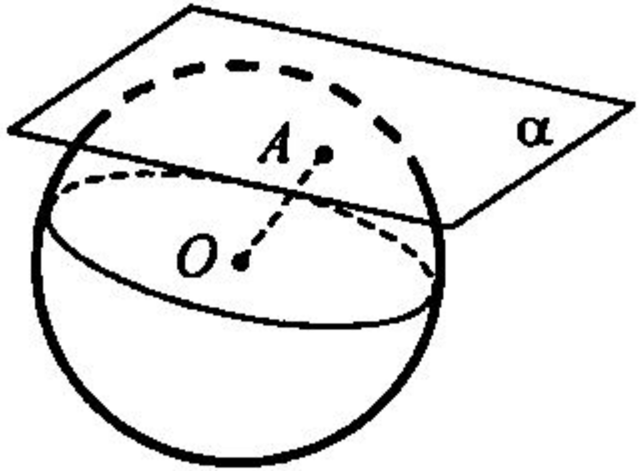


Рис. 5

Задача № 580. *Дано*: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).
Найти: $S_{сеч.}$

Решение: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{сеч.} = \pi r^2$. ΔAOK – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм). $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм^2). (*Ответ*: 1600π дм^2.)



Теорема: (свойство касательной плоскости)

Радиус сферы, проведенный в точку касання сферы и плоскостн, перпенднкулярен к касательной плоскостн.

Теорема: (признак касательной плоскости)

Если радиус сферы перпенднкулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

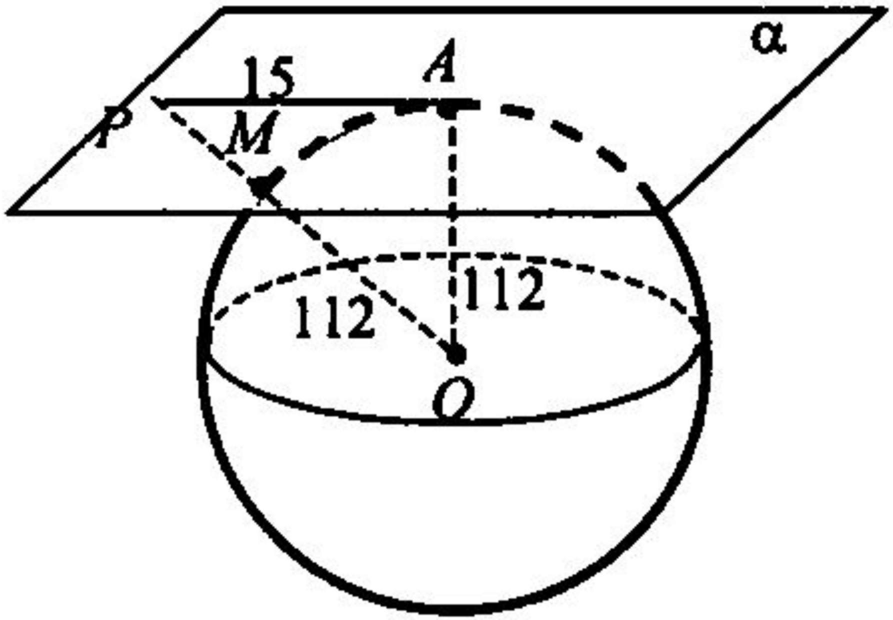


Рис. 9

Задача № 592. *Дано*: сфера с центром в точке O и радиусом R, $R = 112$ см, α – каса-

Решение: ΔOAP – прямоугольный, так как $OA = R$, α – касательная плоскость. По теореме Пифагора найдем $OP = \sqrt{112^2 + 15^2} = 13$ (см). $PM = OD - R = 113 - 112 = 1$ (см). (*Ответ*: 1 см.)

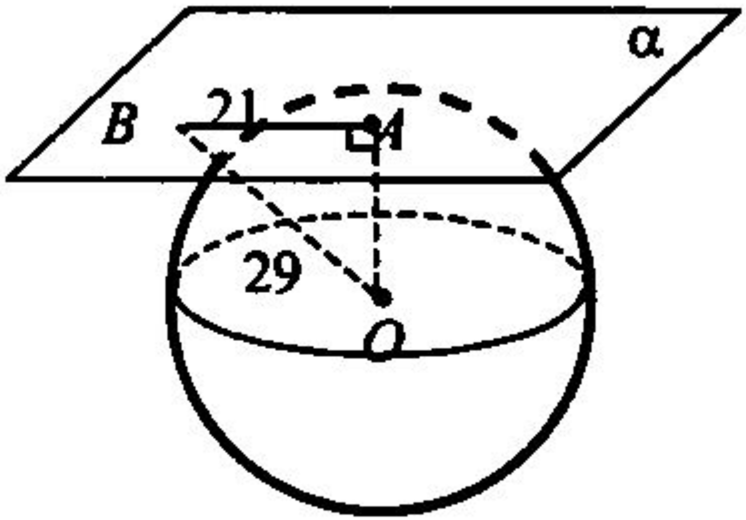


Рис. 10

Задача. **Дан шар с центром в точке O, α – касательная плоскость, точка A – точка касания, точка B лежит на плоскости α, $AB = 21$ см,**

Решение: $R = OA$, так как A – точка касания, рассмотрим прямоугольный ΔOAB (α – касательная плоскость, A – точка касания, значит $OA \perp \alpha$): по теореме Пифагора найдем $R = OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

(*Ответ*: 20 см.)

$$S = 4\pi R^2.$$

Сечение шара площадью $S = 16\pi$ см^2 находится на расстоянии 3 см от центра шара.

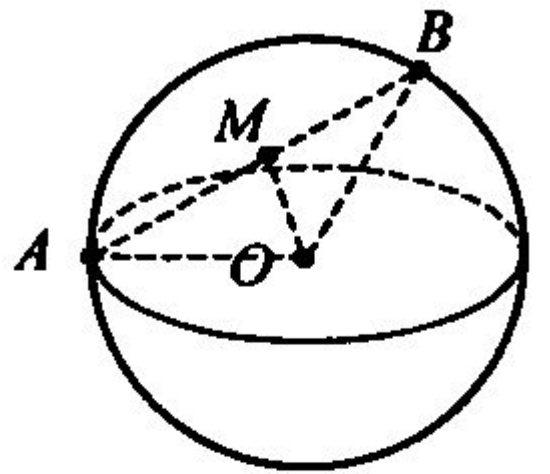
Найдите площадь его поверхности.

К сфере с $S = 64\pi$ см^2 проведена касательная плоскость. Кротчайшее расстояние от точки A, лежащей в этой плоскости, до данной сферы равно 1 см.

Найти расстояние от точки A до точки касания сферы с плоскостью.

Два взаимно перпендикулярных сечения сферы равноудалены от ее центра. При этом центр сферы находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от общей хорды этих сечений, равной 6 см.

Найдите площадь сферы.



№ 574 а)

Дано: A и B лежат на сфере, $R = 50$ см, $AB = 40$ см. $AM = MB$.
Найти: OM.

Так как $OM \perp AB$ (смотрите предыдущую задачу), то ΔAMO – прямоугольный. По теореме Пифагора $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $AO = R = 50$ (см),

$$AM = \frac{1}{2}AB = 20 \text{ (см)}. \; OM = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ (см)}.$$

№ 576 а). *Дано*: $R = 3$; $A\ (2; -4; 7)$.

Найти: уравнение сферы.

Решение: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$.

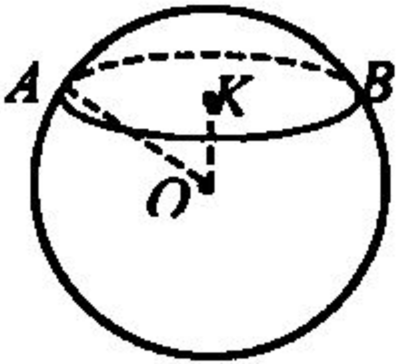
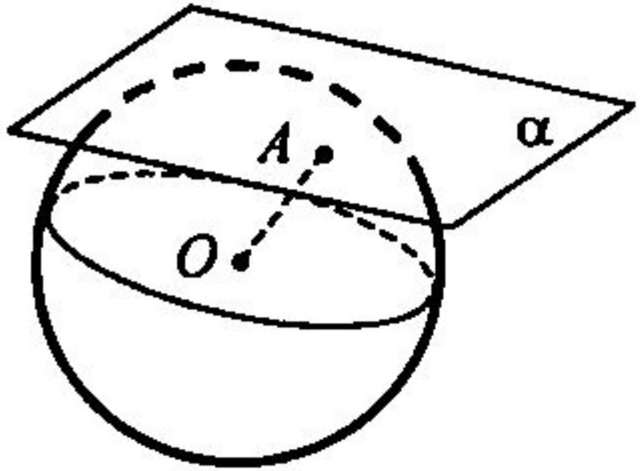


Рис. 5

Задача № 580. *Дано*: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).
Найти: $S_{\text{сеч.}}$

Решение: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2$. ΔAOK – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм). $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм^2). (*Ответ*: 1600π дм^2.)



Теорема: (свойство касательной плоскости)

Радиус сферы, проведенный в точку касання сферы и плоскостн, перпенднкулярен к касательной плоскостн.

***Теорема*:** (признак касательной плоскости)

Если радиус сферы перпенднкулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

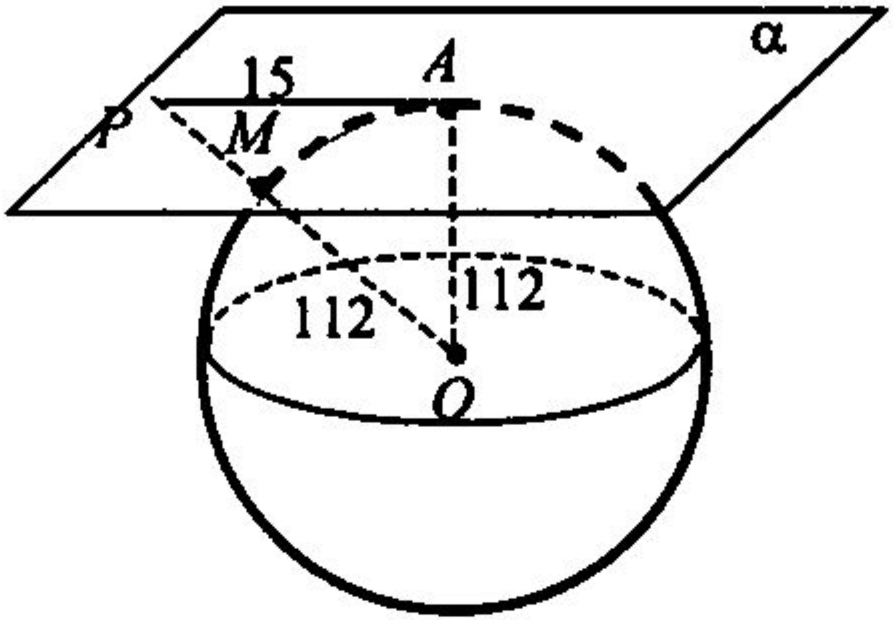


Рис. 9

Задача № 592. *Дано*: сфера с центром в точке O и радиусом R, $R = 112$ см, α – каса-

Решение: ΔOAP – прямоугольный, так как $OA = R$, α – касательная плоскость. По теореме Пифагора найдем $OP = \sqrt{112^2 + 15^2} = 13$ (см). $PM = OD - R = 113 -$ $- 112 = 1$ (см). (*Ответ*: 1 см.)

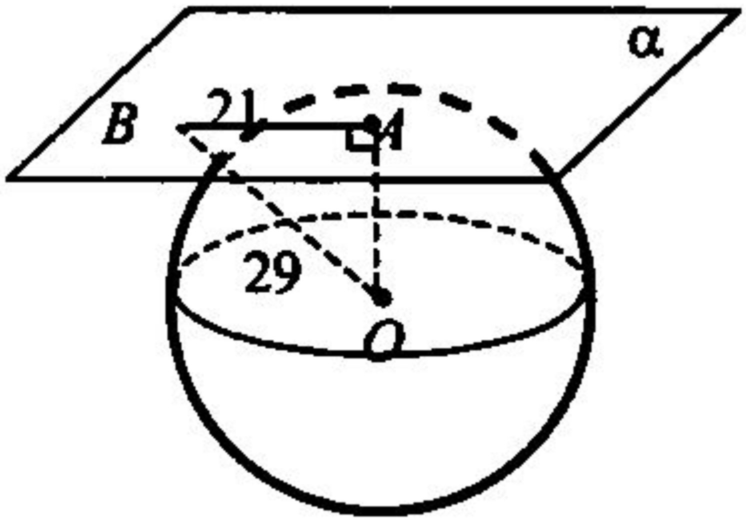


Рис. 10

Задача. Дан шар с центром в точке O, α – касательная плоскость, точка A – точка касания, точка B лежит на плоскости α, $AB = 21$ см,

Решение: $R = OA$, так как A – точка касания, рассмотрим прямоугольный ΔOAB (α – касательная плоскость, A – точка касания, значит $OA \perp \alpha$): по теореме Пифагора найдем $R = OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

(*Ответ*: 20 см.)