Особенности подготовки учащихся к итоговой аттестации в форме ОГЭ. Приёмы решения геометрических задач

Логвиненко Т.П.
МОУ «Герасимовская СОШ»

Трудности решения геометрических задач

- Неалгоритмичность задач
- Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов
- Нужно решить довольно много задач, чтобы научиться их решать.

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

- Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (определения, аксиомы, теоремы, базовые задачи)
- Знание основных методов и приёмов решения задач
- Умение комбинировать методы и приёмы решения задач
- Наличие опыта решения задач

Причины ошибок в решении геометрических задач

- Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем
- Неумение их применять
- Невнимательное чтение условия и вопроса задания
- Вычислительные ошибки
- Нарушения логики в рассуждениях
- Принятие ошибочных гипотез
- Недостатки в работе с рисунком

Специфические особенности методов решения геометрических задач

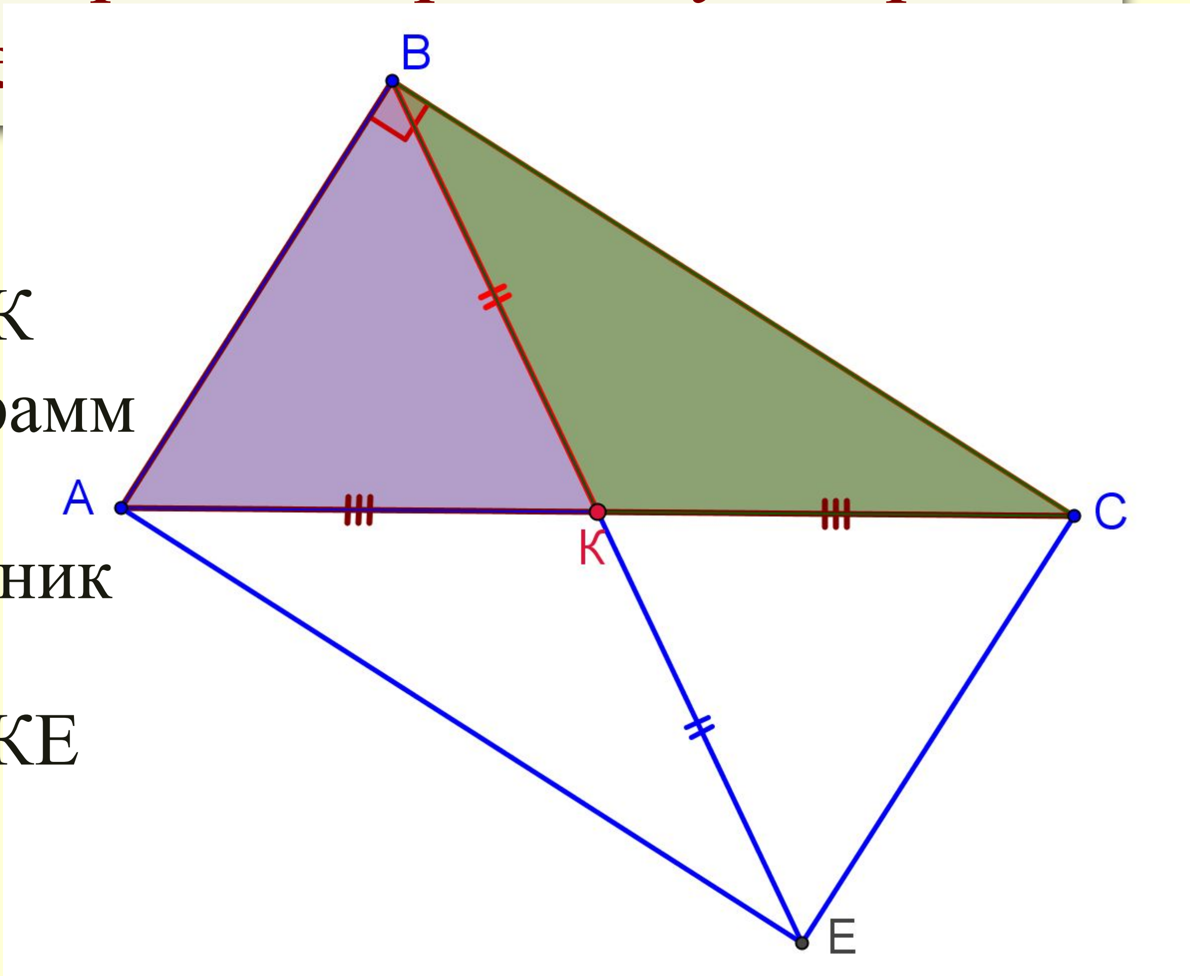
- **Большое разнообразие**
- **Взаимозаменяемость**
- **Трудность формального описания**
- **Отсутствие чётких границ применения (в отличие от алгебры)**
- **Использованию комбинаций методов и приёмов.**

Некоторые методы решения геометрических задач второй части ОГЭ

- **Применение ключевых задач**
- **Метод вспомогательных построений**
- **Переход к равновеликим фигурам**
- **Метод площадей**

Метод решения: Удвоение медианы

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипоте



Удвоим медиану ВК, продлив ее за точку К

АВСЕ – параллелограмм (по признаку)

АВСЕ – прямоугольник (т.к. $\angle$В = 90°)

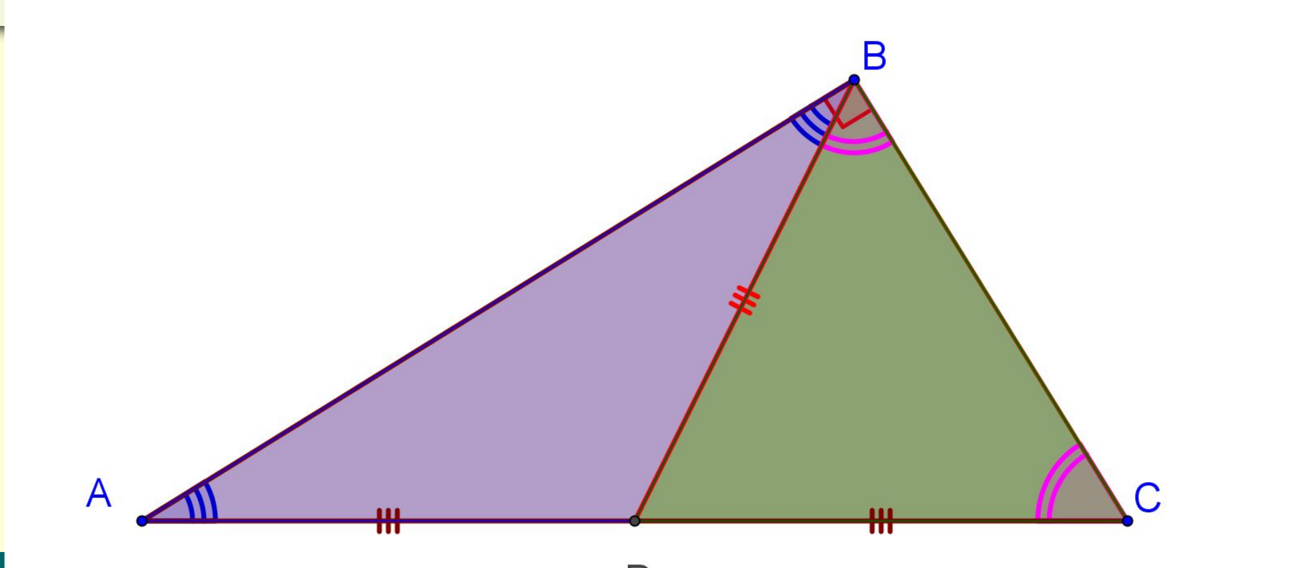
$\Rightarrow$ ВК = АС = КС = КЕ

$\Rightarrow$ ВК = ½ АС

Ключевая задача

Следствие из свойства медианы к гипотенузе. Ключевая задача

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит треугольник на два равнобедренных треугольника, основаниями которых являются катеты данного треугольника



Использование введения буквенных обозначений величин. Ключевая задача

Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

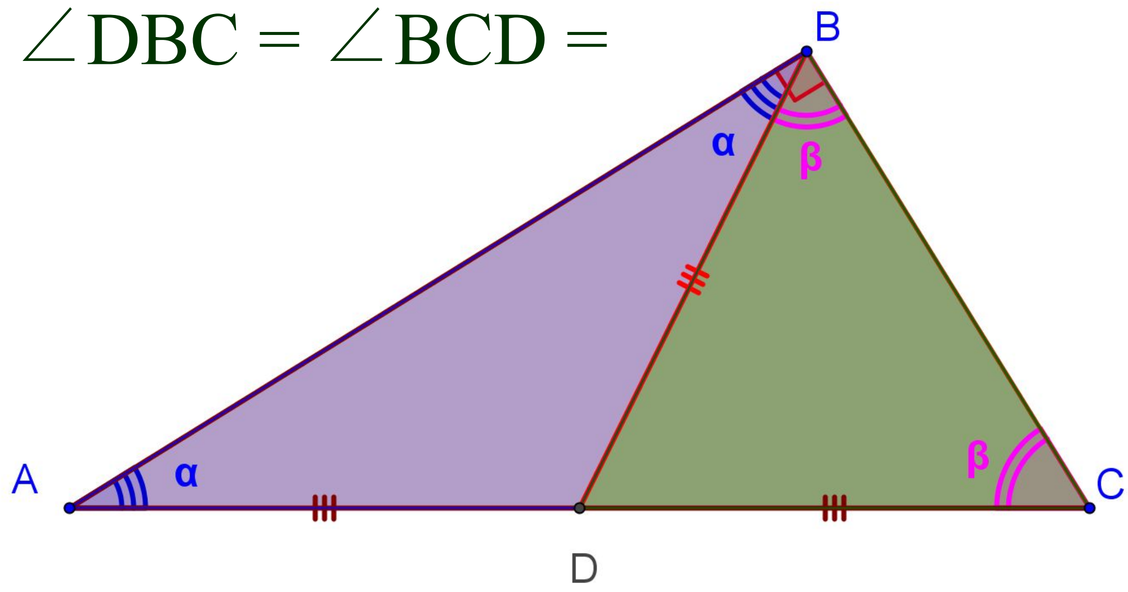
ΔABD и Δ BCD – равнобедренные

$\angle BAD = \angle ABD = \alpha$; $\angle DBC = \angle BCD = \beta$

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

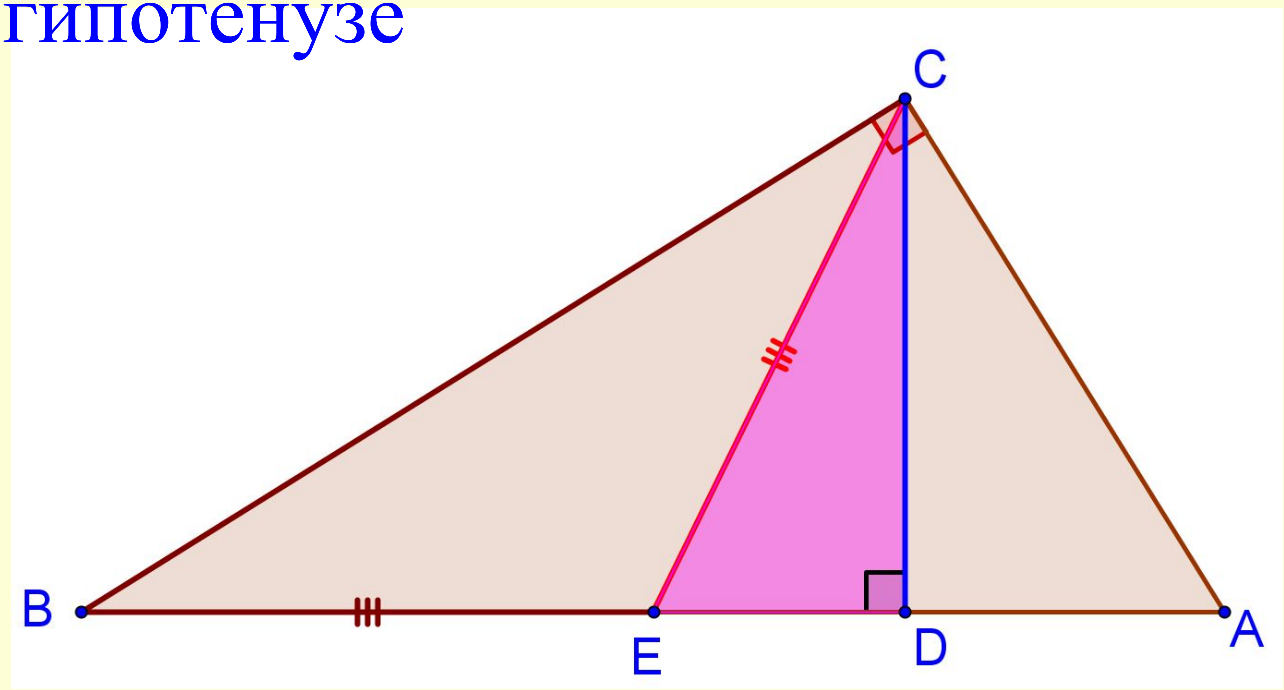
$$\alpha + \beta = 90°$$

$\angle ABC = \alpha + \beta = 90°$



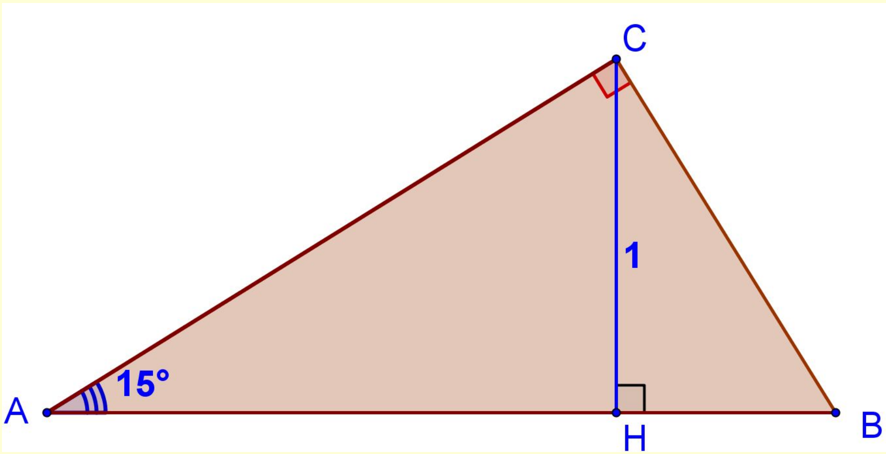
Метод вспомогательных построений

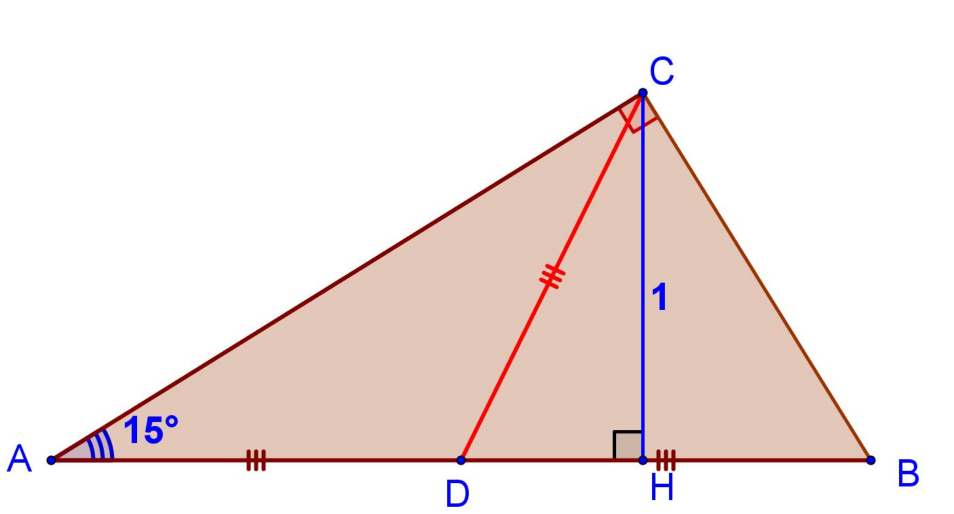
При решении некоторых задач удобно в прямоугольном треугольнике выделять треугольник, образованный медианой и высотой к гипотенузе



Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.





Проведем медиану CD к гипотенузе.

ΔACD - равнобедренный $\angle CAD = \angle ACD = 15°$

Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

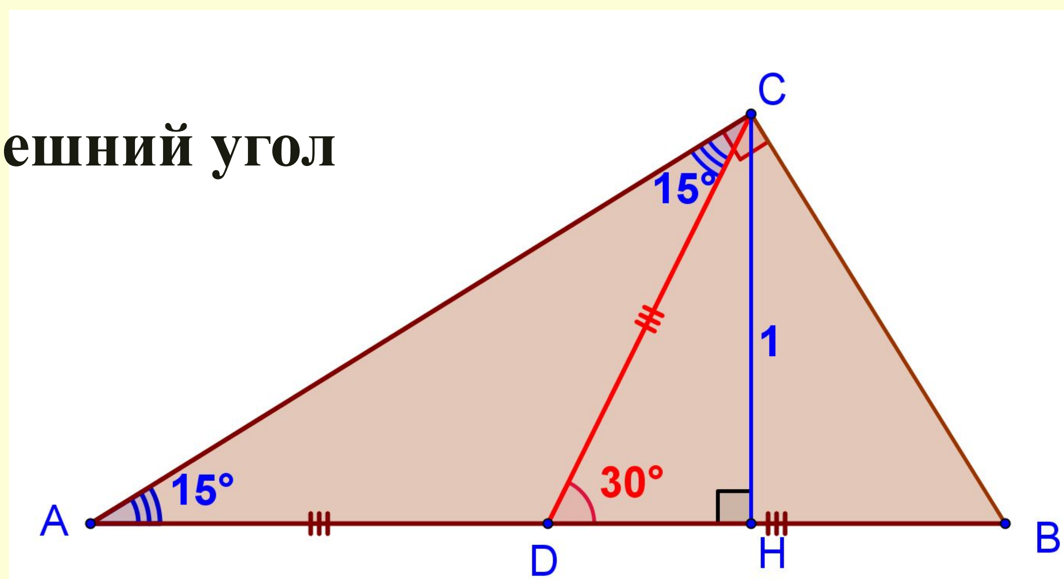
$\angle CAD = \angle ACD = 15°$

$\angle CDH = 30°$ **как внешний угол**

$CD = 2CH = 2$

$AB = 2CD = 4$

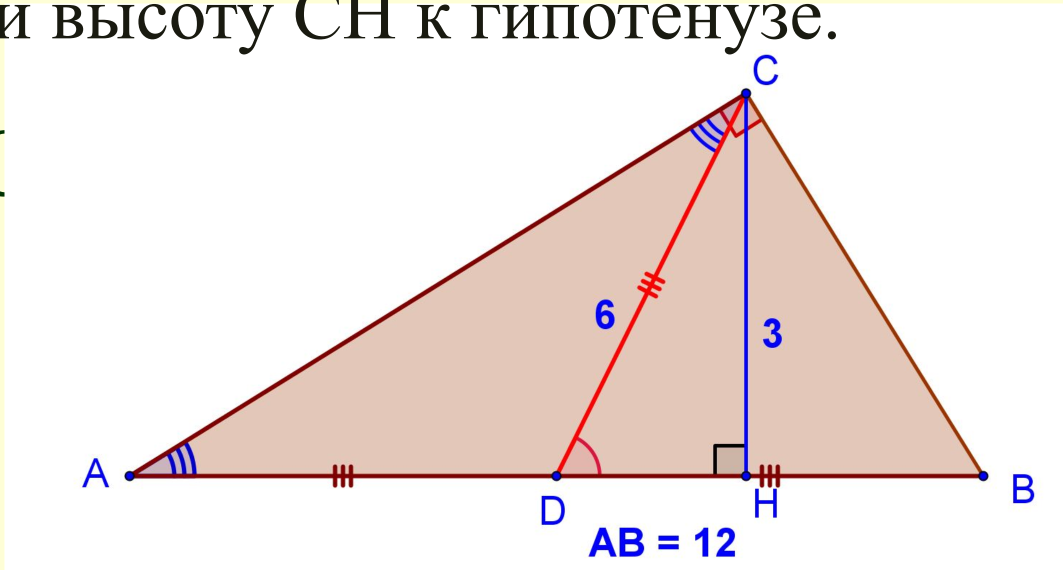
Ответ: 4



Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

Проведем медиану CD и высоту CH к гипотенузе.



$$CH = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3;$$

$\Rightarrow \angle CDH = 30°$

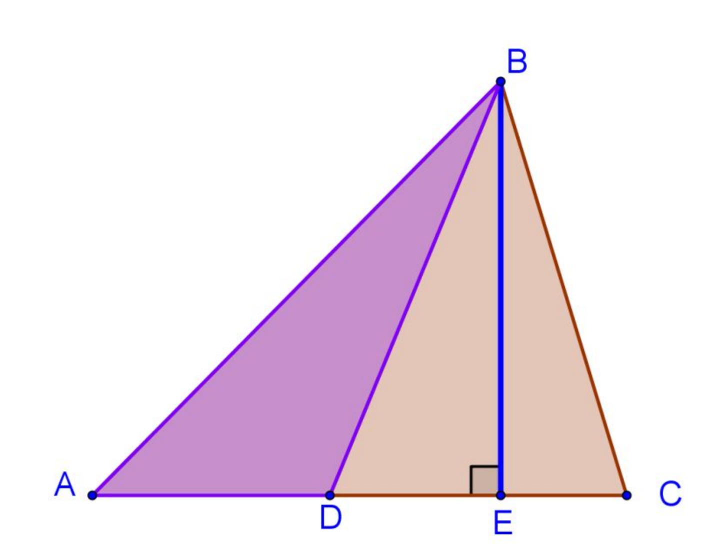
$\Rightarrow \angle CAD = \angle ACD = 15°$

$\angle CBA = 90° - 15° = 75°$

Ответ: *15°; 75°*

Свойства площади треугольника

Площади треугольников, имеющих общую высоту (равные высоты) , относятся как стороны, к которым э
высоты проведены



$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{DC}$$

2. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника

Ключевые задачи

Метод вспомогательных построений. Использование осевой симметрии

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C медиана BM равна 6, $\angle$ MBC = 15º. Найдите площадь треугольника ABC.

$S_{\Delta ABC} = 2S_{CBM}$, т.к. BM - медиана

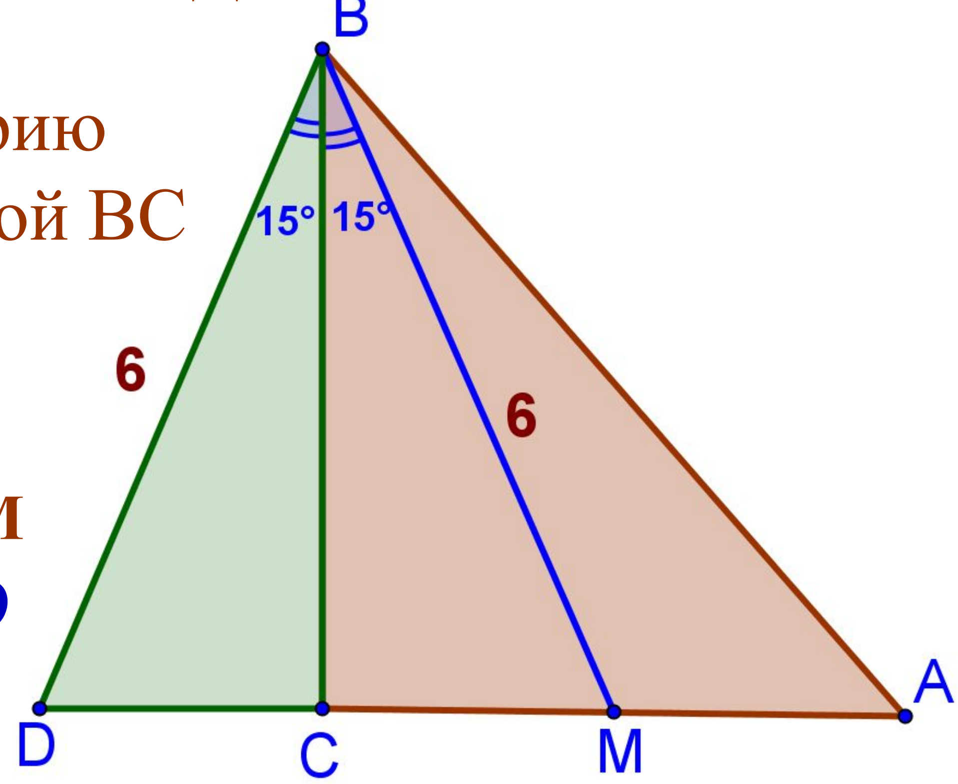
Выполним осевую симметрию ΔCBM относительно прямой BC

$S_{\Delta DBC} = S_{CBM}$

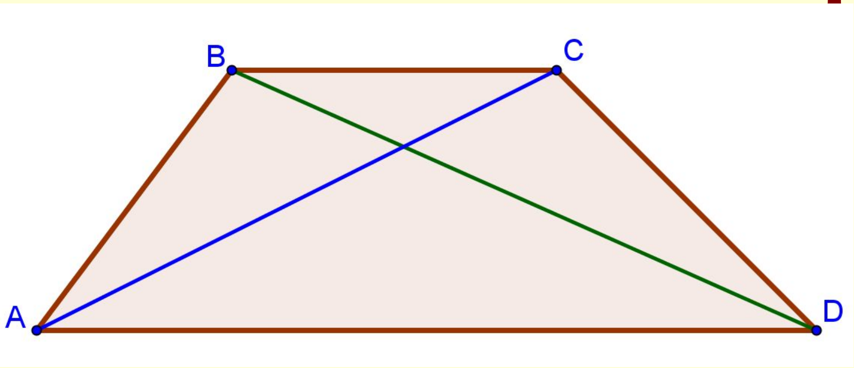
$S_{\Delta ABC} = S_{DBM} = 2S_{CBM}$

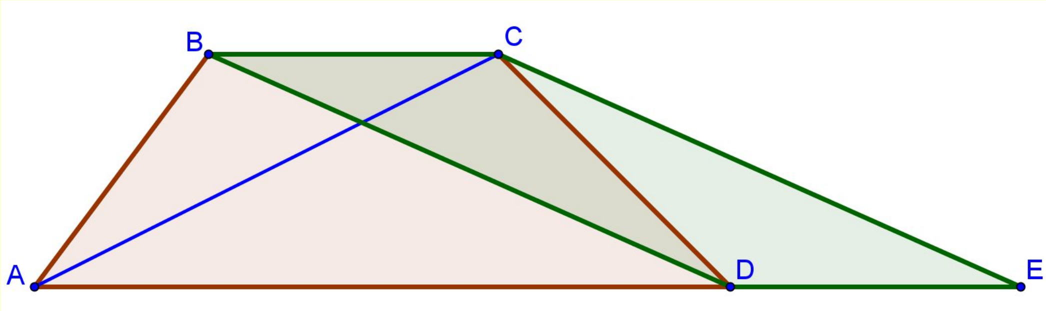
$S_{ABC} = \frac{1}{2} BM^2 \cdot \sin 30° = 9$

Ответ: 9

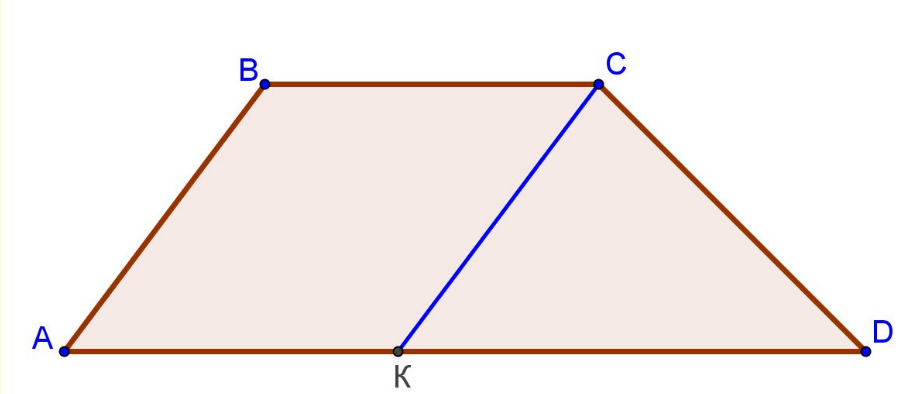


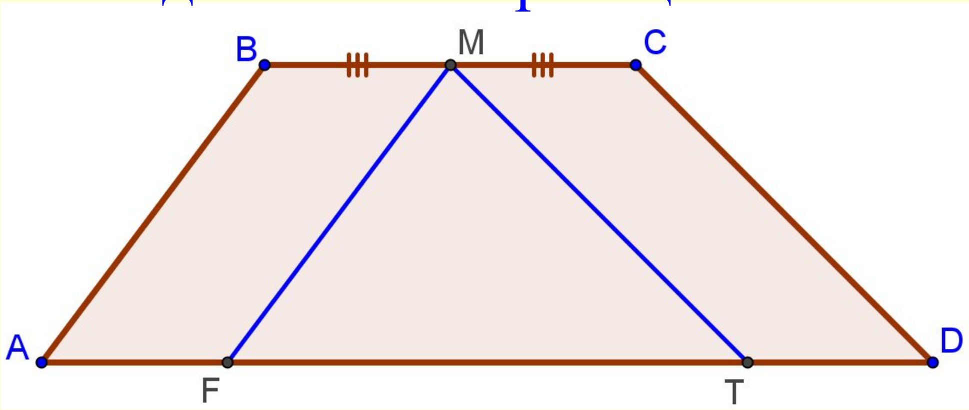
Построение вспомогательных отрезков в трапеции





Прямая, параллельная одной из диагоналей трапеции



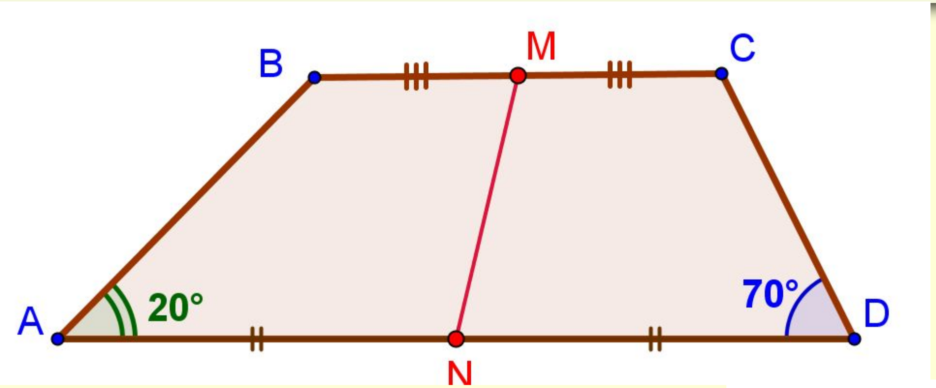


Прямая, параллельная одной из боковых сторон трапеции

Прямая, параллельная обеим боковым сторонам трапеции

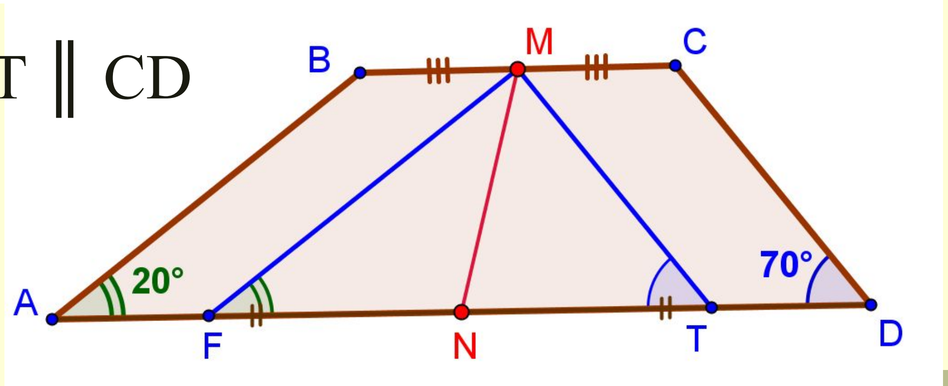
Медиана прямоугольного треугольника к гипотенузе

В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA=70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.



AD – большее основание

Построим $MF \parallel AB$, $MT \parallel CD$



Применение свойства медианы к гипотенузе

В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA=70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.

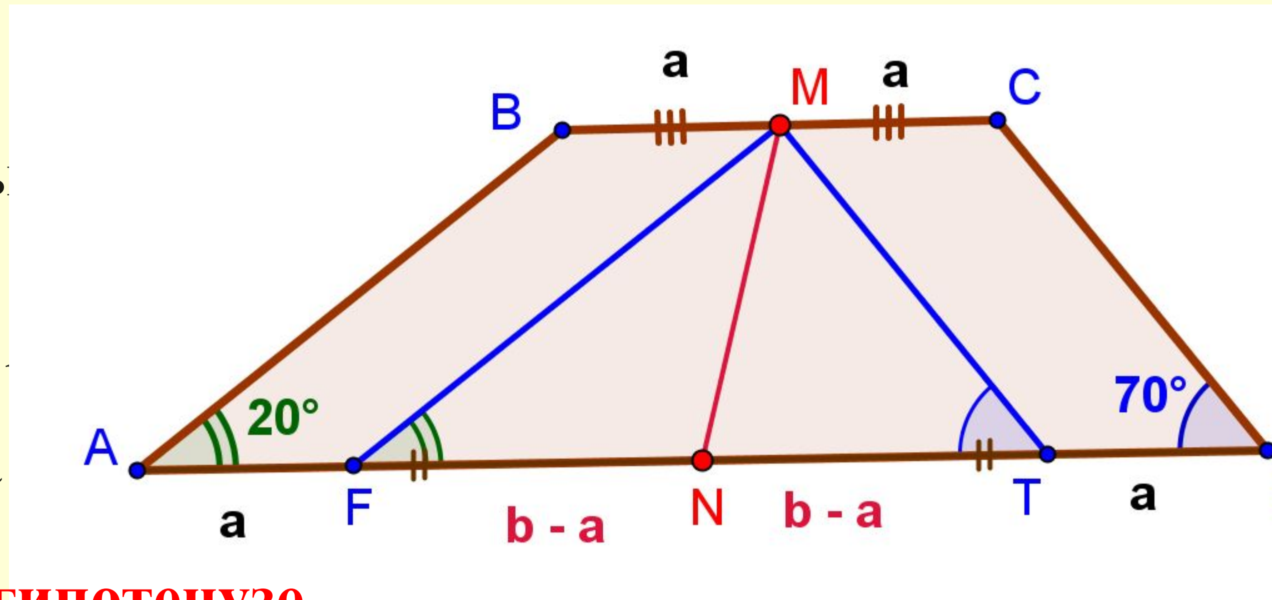
$\angle FMT$ - прямой

ΔFMT - прямоуголь

MN- медиана?

Обозначим AN = NB = b

AD = 2b, BM = MC = a

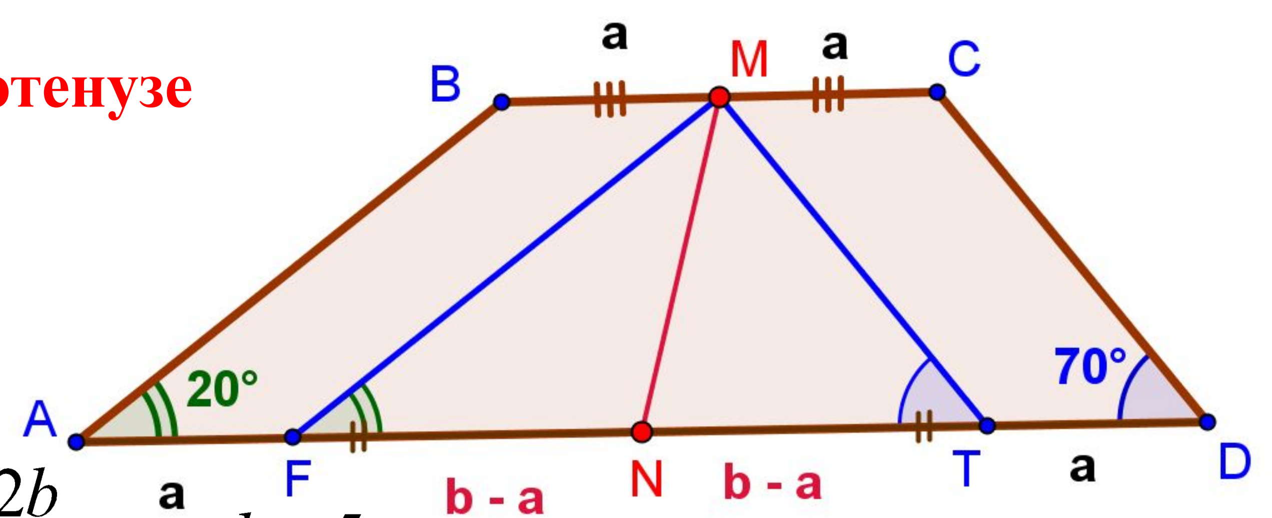


⇒ MN- медиана к гипотенузе

⇒ FT = 2MN = 6

Медиана прямоугольного треугольника к гипотенузе

В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA = 70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.



MN- медиана к гипотенузе

FT = 2MN = 6

FT = 2b – 2a = 6

средняя линия KL

$$KL = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2a + 2b}{2} = a + b = 5$$

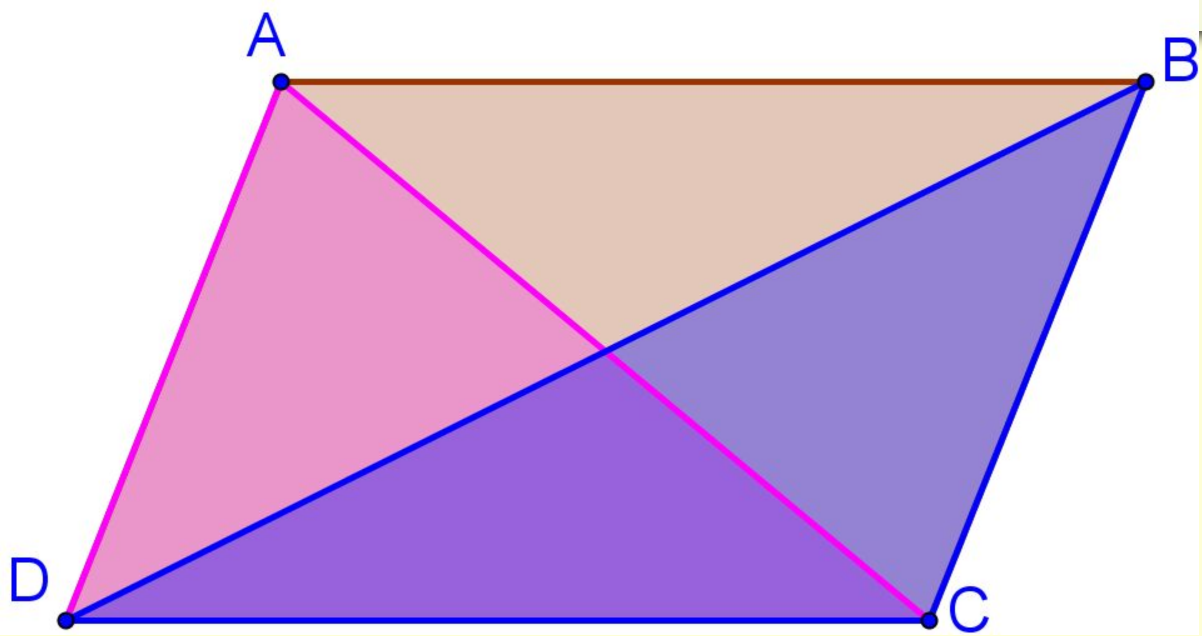
$$\begin{cases} a + b = 5, \\ b - a = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4, \\ a = 1. \end{cases}$$

AD = 2b = 8

Ответ: 8

Метод решения: Переход к равновеликой вспомогательной фигуре

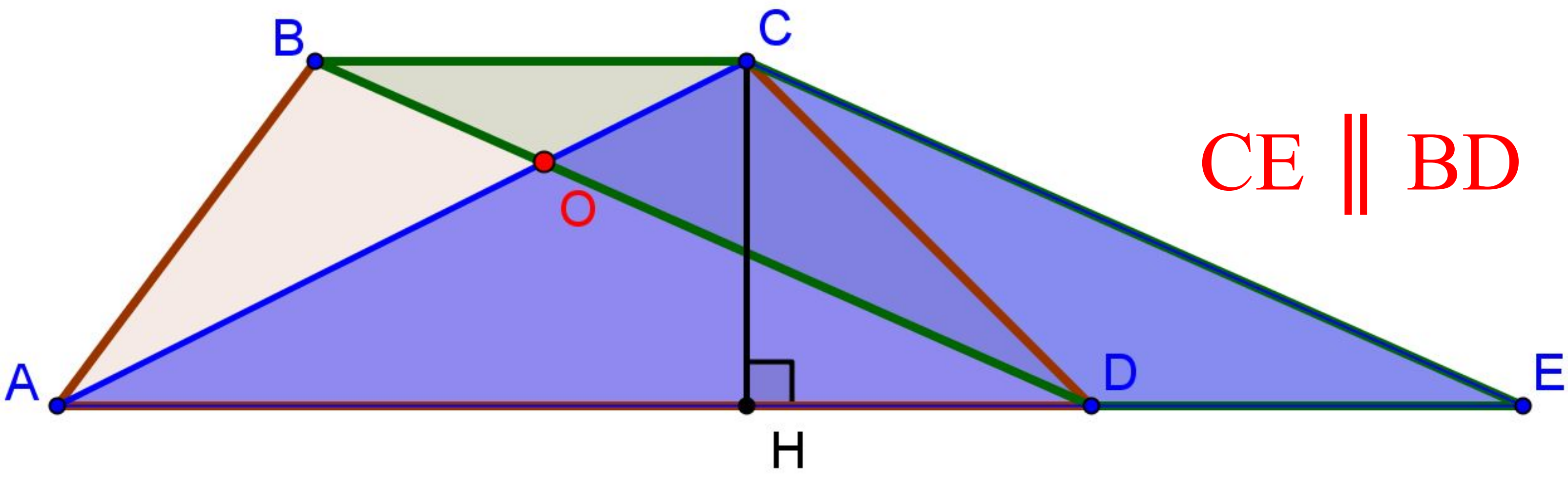
В параллелограмме ABCD площадь треугольника ACD равна площади треугольника DBC



$S_{\Delta DAC} = S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Метод решения: Переход к равновеликой вспомогательной фигуре

Площадь трапеции ABCD равна площади треугольника ACE



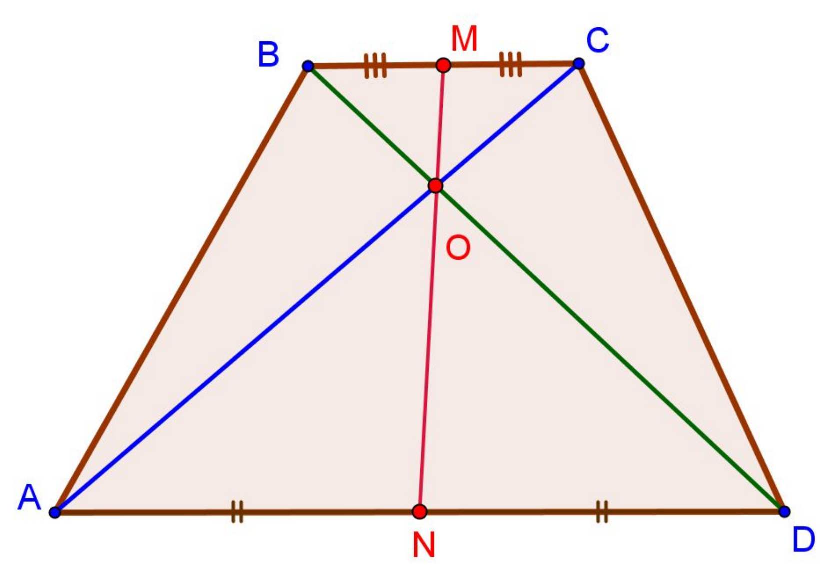
CE ∥ BD

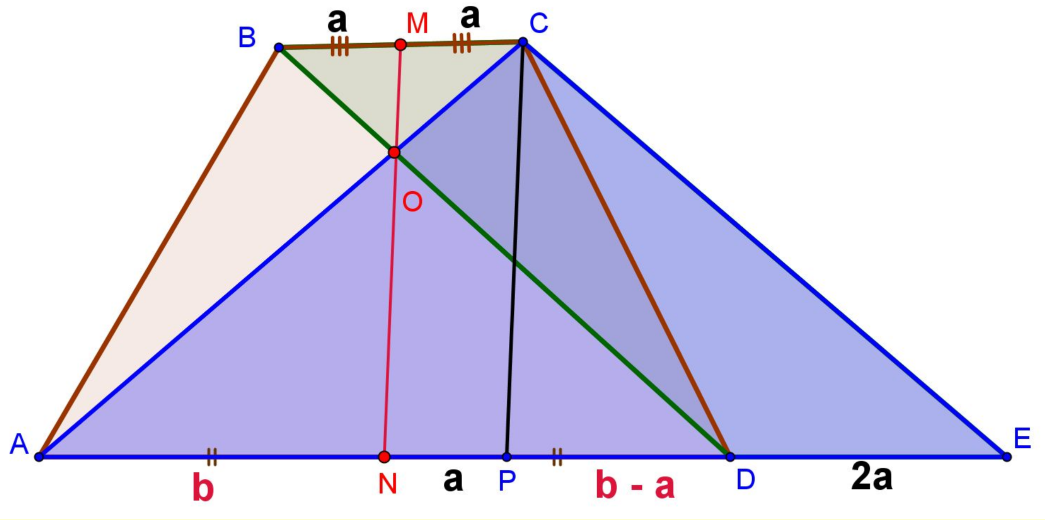
AE = AD + DE =AD + BC

Дополнительные построения в трапеции. Переход к равновеликой вспомогательной фигуре

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

Проведем CE ‖ BD, CP ‖ MN $S_{ABCD} = S_{\Delta ACE}$





Дополнительные построения в трапеции.

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

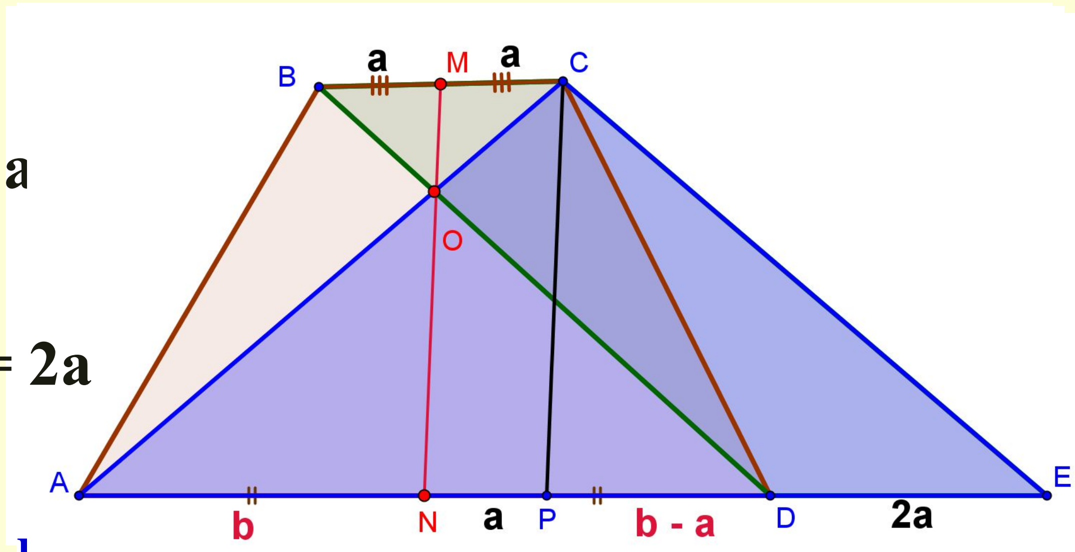
CP – медиана ?

Обозначим BM = MC = a

AN = ND = b

MC = NP = a; BC = DE = 2a

PD = b - a



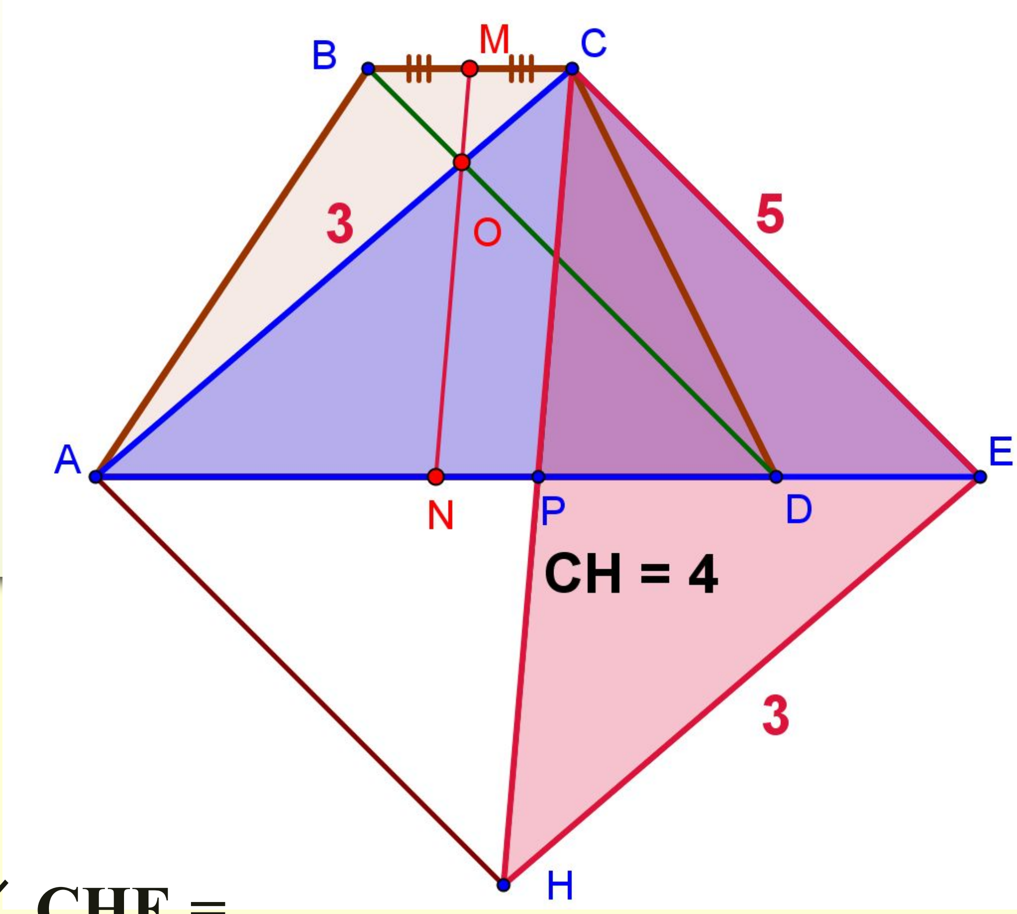
AP = b + a; PE = b – a + 2a = b + a

⇒ CP – медиана к гипотенузе

Применим метод удвоения медианы

Дополнительные построения в трапеции. Метод удвоения медианы. Переход к равновеликой фигуре

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.



CH=2CP= 4

$S_{\Delta CHE} = S_{\Delta ACE} = S_{ABCD}$

CH= 4; CE = 5; HE = 3

$\Rightarrow \Delta CHE$ - прямоугольный, $\angle CHE = 90°$

$S_{ABCD} = S_{\Delta ACE} = S_{\Delta CHE} = \frac{1}{2} CH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

Ответ: 6

Метод площадей

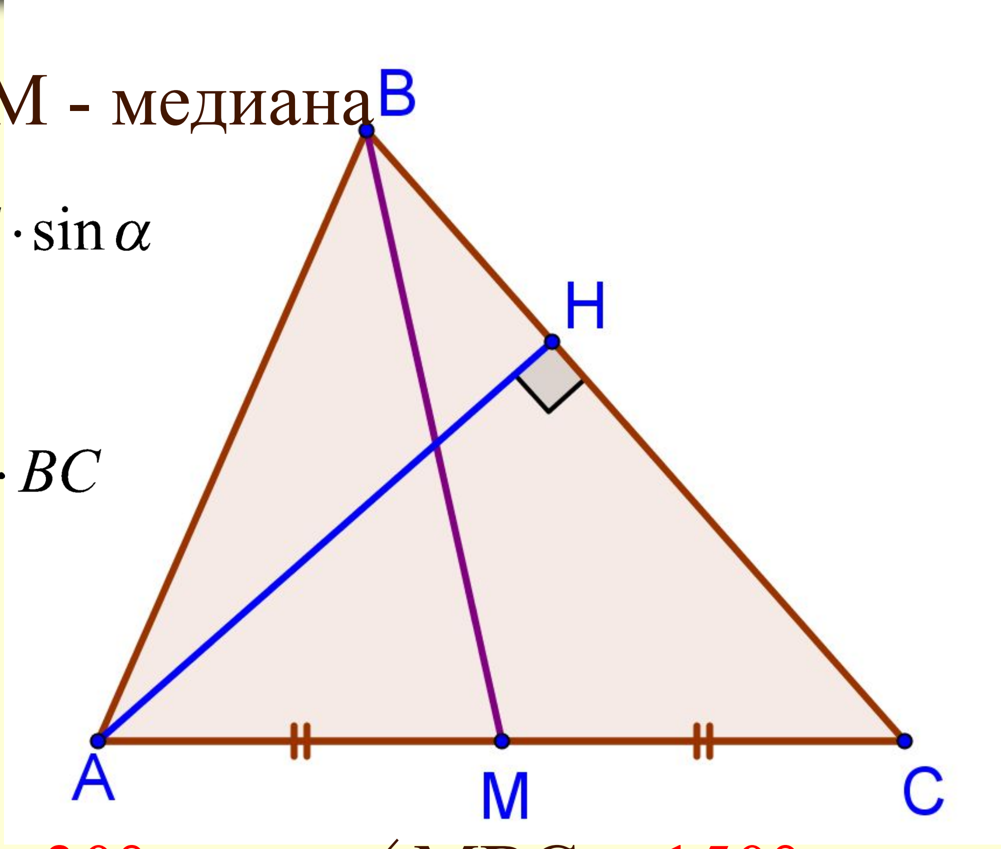
Идея метода: площади фигуры находим, используя различные формулы или различные отрезки и углы. Приравняв эти выражения, получаем уравнение, содержащее известные и искомые величины.

Метод площадей

Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

Пусть $\angle MBC = \alpha$

Т.к. BM - медиана



$$\Rightarrow S_{ABC} = 2 \cdot S_{MBC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = BM \cdot BC \cdot \sin\alpha$$

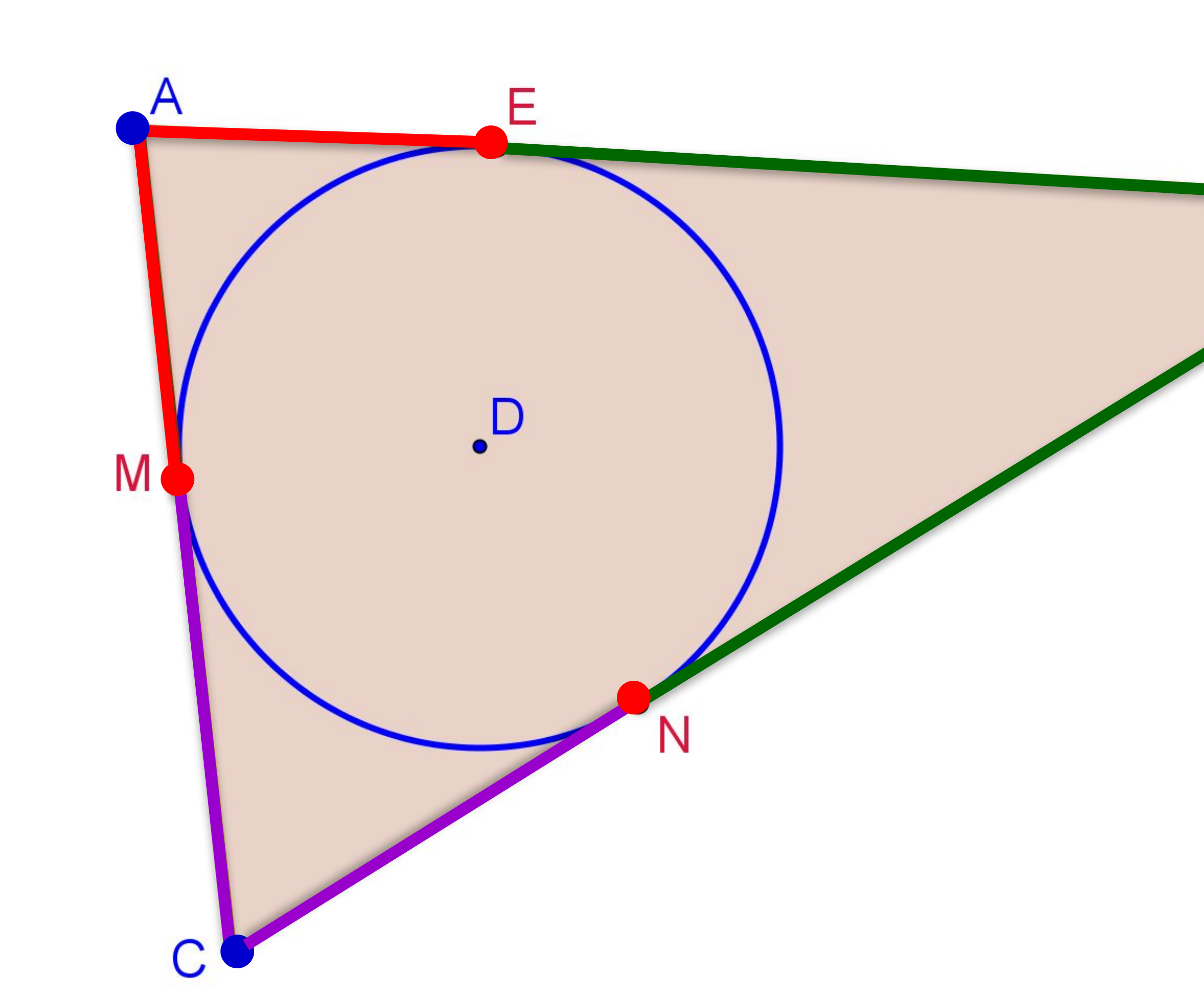
С другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$

$$\Rightarrow BM \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$$

Т. к. AH = BM, то

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle$MBC = α = 30° или $\angle$MBC = 150°

Свойство деления сторон треугольника окружностью, вписанной в него.



AM = AE

BN = BE

CN = CM

Метод площадей

В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

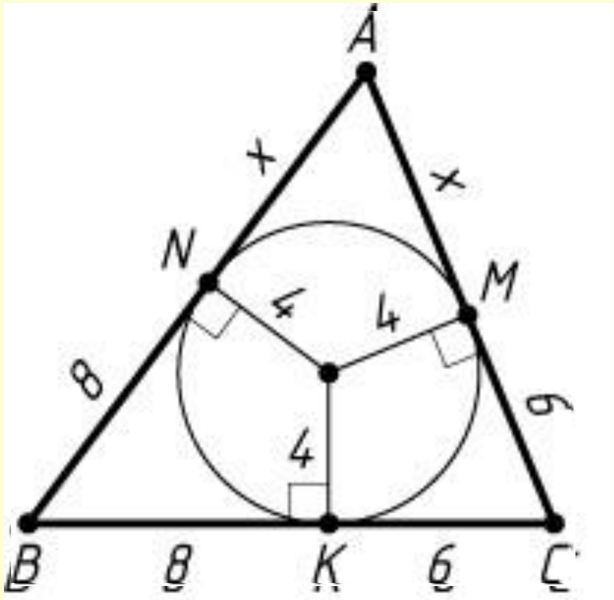
Обозначим $AM = AN = x$ $\qquad S = \frac{1}{2} P \cdot r$

$$\boldsymbol{S_{\triangle ABC} = (8 + 6 + x) \cdot 4 = (14 + x) \cdot 4.}$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{(14 + x) \cdot 8 \cdot 6 \cdot x}$$

$$4 \cdot (14 + x) = \sqrt{(14 + x) \cdot 8 \cdot 6 \cdot x}$$



x = 7 $\qquad \boldsymbol{AC = x + 6 = 13, \quad AB = x + 8 = 15}$

Ответ: 13; 15

Метод решения: **Введение вспомогательной окружности**

Идея метода: ввести в рассмотрение окружность, если это возможно в данной конфигурации, чтобы применить разнообразные свойства отрезков и углов, связанных с ней

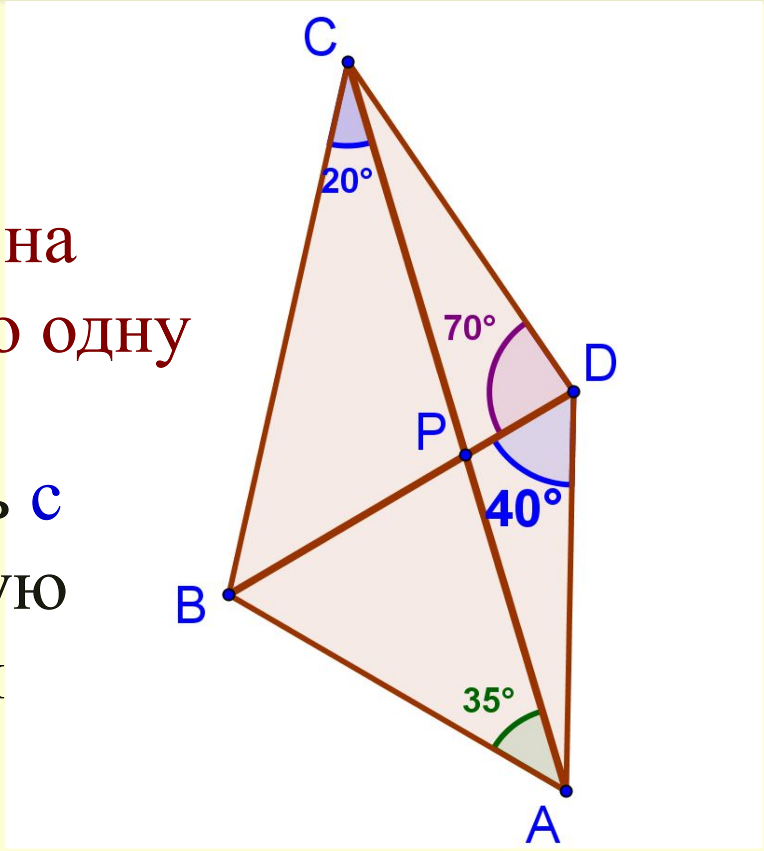
Введение вспомогательной окружности

В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle$ BCA = 20º, $\angle$ BAC = 35º, $\angle$ BDC = 70º, $\angle$ BDA = 40º. Найдите углы между диагоналями этого четырехугольника.

$$20^\circ = \tfrac{1}{2} \cdot 40^\circ$$

$\angle$ BCA и $\angle$ BCA опираются на отрезок BA и лежат от него по одну сторону ⇒

Можно построить окружность с центром в точке D, проходящую через остальные три вершины четырехугольника C; B и D



Введение вспомогательной окружности

В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle$ BCA = 20º, $\angle$ BAC = 35º, $\angle$ BDC = 70º, $\angle$ BDA = 40º. Найдите углы между диагоналями этого четырехугольника.

CD = DA как радиусы одной окружности

$\Rightarrow \Delta$ ACD - равнобедренный

$\angle$ CAD = $\angle$ DCA =

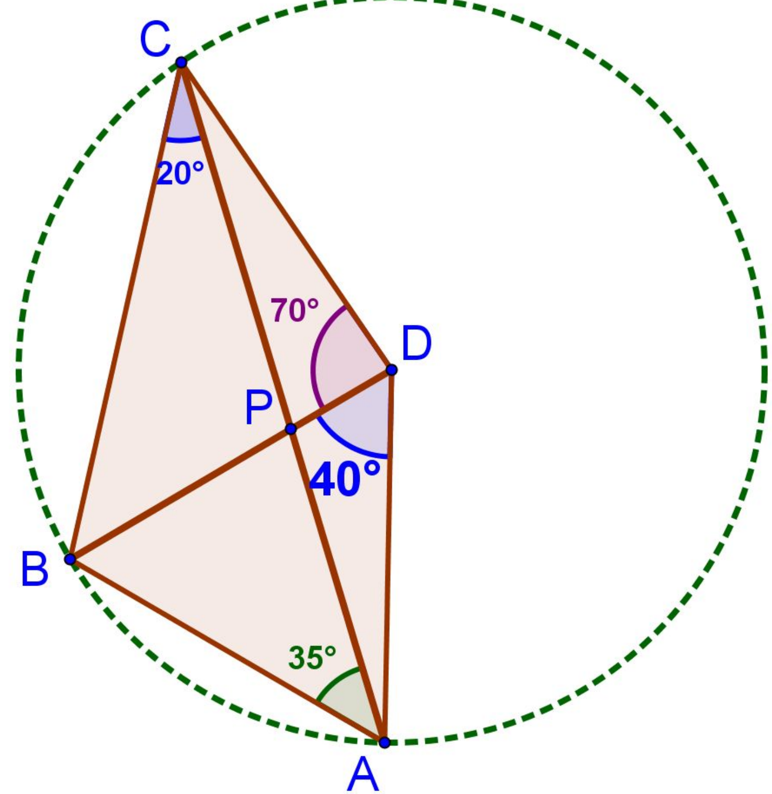
= (180º – 40º – 70º) : 2 = 35º.

Из Δ APD

$\angle$ **APD** = 180º – 40º – 35º = **105º.**

Углы между диагоналями равны

105º и **75º**

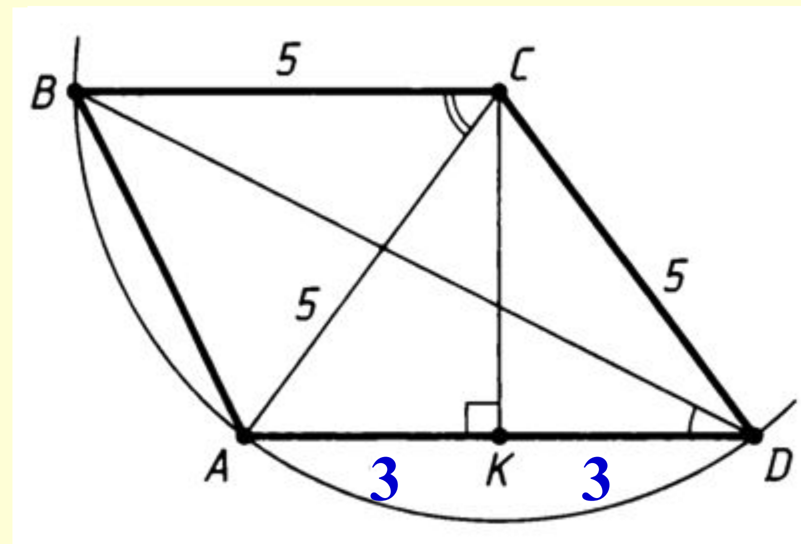


Ответ: 105°; 75°

Введение вспомогательной окружности

В трапеции ABCD (AD || BC) ∠ ADB в два раза меньше ∠ ACB. Известно, что BC = AC = 5 и AD = 6. Найдите площадь трапеции.

∠ ADB = ½ ∠ ACB и углы «опираются» на один отрезок – AB и лежат от него по одну сторону



Можно построить окружность **с центром в точке** C и

R = BC = AC = 5

⇒ CD = 5 ΔACD - равнобедренный

Проведём высоту CK CK = 4

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot CK = \frac{6+5}{2}\cdot 4 = 22.$$

Ответ: 22

Рекомендации учащимся при решении геометрических задач

О чертеже

- Хороший чертеж – помощник
- Все, что «увидено», должно быть обосновано
- Соблюдай пропорции и соотношения
- Используй выносные чертежи

О поиске решения задачи

- Треугольник равнобедренный, следовательно …
- Две касательные проведены из одной точки, следовательно … ,
- Прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, делит угол между касательными пополам, и т. д

Научить решать учащихся геометрические задачи это значит не только подготовить их к хорошей сдаче экзамена, но и научить их логически мыслить, доказательно отстаивать свою точку зрения, уметь творчески подходить к любому делу