Теория комплексных чисел

- «настоящие» только натуральные числа- древнегреческие математики
- Введение отрицательных чисел- китайские математики за 2 века до н.э.
- VII в. индийские ученые сравнивали отрицательные числа с долгом
- XIII-XVI вв. отрицательные числа рассматривались в исключительных случаях- «ложные»
- XVII в. отрицательные числа получили всеобщее распространение

$$x^3 + px = q$$

$$x^3 = px + q$$

$$x^3 + q = px$$

XVI в. изучение кубических уравнений ит. математик Н.Тарталья

$$x^3=px+q$$

Корень уравнения: $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$

где u, v- решение системы уравнений

$$\begin{cases} u+v=q \\ uv=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

пример 1

$x^3 = px + q$

Корень уравнения:

$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$

где u, v- решение системы уравнений

$$\begin{cases} u + v = q \\ uv = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

$x^3 = 9x + 28$

p=9, q=28

$$\begin{cases} u + v = 28 \\ uv = 27 \end{cases}$$

откуда u=27 и v=1

или u=1 и v=27

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} = 3 + 1 = 4$$

пример 2

$x^3=px+q$

Корень уравнения:

$x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$

где u, v- решение системы уравнений

$$\begin{cases} u+v=q \\ uv=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

$x^3=15x+4$

$x=4$- действительный корень

$$\begin{cases} u+v=4 \\ uv=125 \end{cases}$$

$$u=4-v$$

$$(4-v)v=125$$

$$v^2-4v+125=0$$

$$D=16-4\cdot 125=-484$$

$$v_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-484}}{2}$$

Не имеет решения во множестве действительных чисел

- 1545 г. Дж.Кардано (ит.алгебраист)- «чисто отрицательные»
- 1572 г. Р.Бомбелли (ит.алгебраист)- первые правила арифметических операций

- 1637 г. Р.Декарт (фр. математик)- «мнимые числа»

- 1777 г. Л Эйлер (шв. математик) – обозначение *i* от латинского *imaginarius* - «мнимый»

- 1831 г. К.Гаусс (нем. математик)- символ *i* вошел в употребление

В течение XVIII в. были решены многие вопросы и прикладные задачи, связанные

- картография
- гидродинамика
- теория жидкости
- теория упругости
- радиотехника

- электротехника

Применение комплексных чисел в электротехнике

- Для расчета цепей постоянного тока
- Для расчета цепей переменного тока
- Упрощение расчетов
- Для расчета сложных цепей, которые другим путем решить нельзя

Навыки, полученные после изучения темы «комплексные числа»

- Находить модуль и аргумент комплексного числа и комплексное число по его модулю и аргументу
- Переводить комплексное число из одной формы в другую.
- Производить арифметические действия над комплексными числами
- Строить вектор по комплексному числу и определять комплексное число по его вектору

Мнимая единица

- Мнимая единица- это число, квадрат которого равен –1. $i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (-1)} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{2} i$$

Степени мнимой единицы

$$i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^6 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

- если n:4 (ост.0), то $i^n = 1 = i^0$
- если n:4 (ост.1), то $i^n = i = i^1$
- если n:4 (ост.2), то $i^n = -1 = i^2$
- если n:4 (ост.3), то $i^n = -i = i^3$

$i^{28} = 1$ т.к. 28:4=7(ост.0)

$i^{35} = -i$ т.к. 35:4=8(ост.3)

Вычислить: $i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16}$

Ответ: 0

Алгебраическая форма комплексного числа

- Числа вида $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{R}$, i- мнимая единица называются комплексными

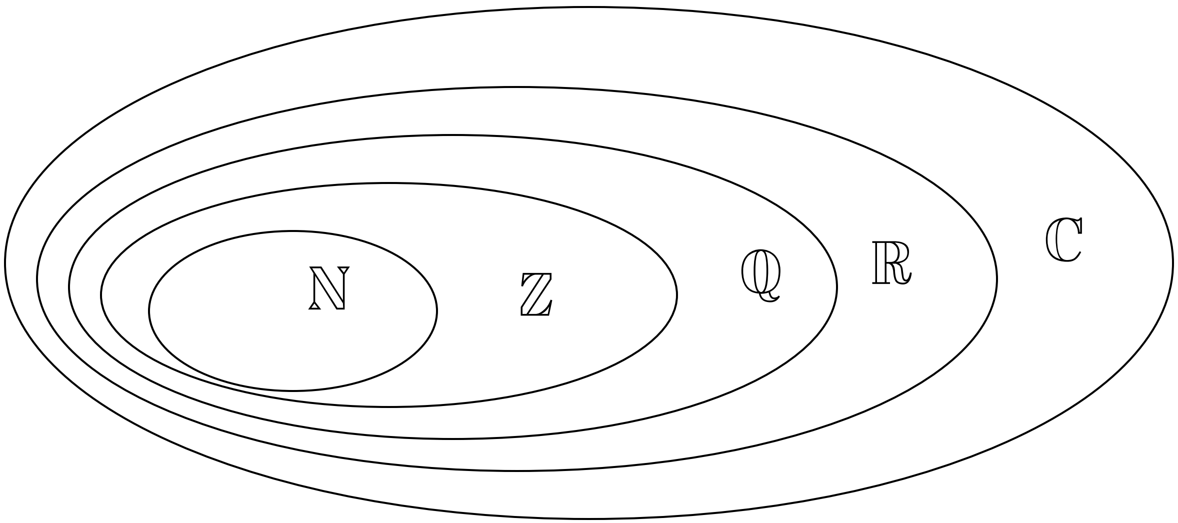
a- *действительная часть компл.числа* $a=Re\ z$

bi- *мнимая часть компл.числа*

b- *коэффициент при мнимой единице* $b=Im\ z$

$z=a+bi$

- Если a=0, то $z=bi$- чисто мнимое
- Если b=0, то $z=a$- действительное
- Если a=0 и b=0, то z=0



$z=a+bi$ - алгебраическая форма комплексного числа

Равенство комплексных чисел

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице:

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad и \quad b = d$$

Пример. Найти x и y: $3y + 5xi = 15 - 7i$

Решение:

$$\begin{cases} 3y = 15 \\ 5x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Операции над комплексными числами

- Определим сумму

$$\left(a_1+b_1 i\right)+\left(a_2+b_2 i\right)=\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)i$$

- Определим разность

$$\left(a_1+b_1 i\right)-\left(a_2+b_2 i\right)=\left(a_1-a_2\right)+\left(b_1-b_2\right)i$$

- Определим произведение

$$\left(a_1+b_1 i\right)\left(a_2+b_2 i\right)=\left(a_1 a_2-b_1 b_2\right)+\left(a_1 b_2+a_2 b_1\right)i$$

Свойства операций

- Коммутативность относительно сложения $z_1+z_2=z_2+z_1$
- Ассоциативность относительно сложения $(z_1+z_2)+z_3= z_1+(z_2+z_3)$
- Для $\forall$ z_1 ,z_2 $\exists$ z: $z_1+z=z_2$. Число z называют разностью чисел z_2 и z_1 и обозначают $z_2-z_1=z$
- Коммутативность относительно умножения $z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1$
- Ассоциативность относительно умножения $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- Для $\forall$ $z_1 \neq 0+0i$, z_2 $\exists$ z: $z_1 \cdot z=z_2$. Число z называют частным чисел z_2 и z_1 и обозначают $z=z_2/z_1$
- Дистрибутивность $z_1 \cdot (z_2+z_3)= z_1 \cdot z_2+z_1 \cdot z_3$

Доказательство 3: Для $\forall$ z_1, z_2 $\exists$ z: $z_1+z=z_2$. Число z называют разностью чисел z_2 и z_1 и обозначают $z_2-z_1=z$

Пусть: $z_1 = a_1 + b_1 i \qquad z_2 = a_2 + b_2 i \qquad z = x + yi$

тогда $z_1 + z = z_2$

$$(a_1 + b_1 i) + (x + yi) = a_2 + b_2 i$$

$$(a_1 + x) + (b + y)i = a_2 + b_2 i$$

$$\begin{cases} a_1 + x = a_2 \\ b + y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a_2 - a_1 \\ y = b_2 - b_1 \end{cases}$$

$$z = x + yi = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i$$

Доказательство 6: Для $\forall$ $z_1 \neq 0+0i$, z_2 $\exists$ z: $z_1 \ z = z_2$.
Число z называют частным чисел z_2 и z_1 и обозначают $z = z_2/z_1$

Пусть: $z_1 = a_1 + b_1 i \qquad z_2 = a_2 + b_2 i \qquad z = x + yi$

тогда $z_1 \cdot z = z_2$

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (x + yi) = a_2 + b_2 i$$

$$(a_1 x - b_1 y) + (a_1 y + b_1 x) i = a_2 + b_2 i$$

$$\begin{cases} a_1 x - b_1 y = a_2 \\ a_1 y + b_1 x = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = a_2 \\ b_1x + a_1y = b_2 \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1{}^2 + b_1{}^2 \neq 0$$

система имеет единственное решение:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a_2 & -b_1 \\ b_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

откуда:

$$x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1{}^2 + b_1{}^2} \qquad y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1{}^2 + b_1{}^2}$$

$$z = x + yi = \frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1{}^2 + b_1{}^2} + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1{}^2 + b_1{}^2}i$$

Доказательство 7:

Дистрибутивность $z_1(z_2+z_3)= z_1z_2+z_1z_3$

Пусть: $z_1 = a_1 + b_1 i$ $z_2 = a_2 + b_2 i$ $z_3 = a_3 + b_3 i$

тогда

$$z_1\left(z_2+z_3\right)=\left(a_1+b_1 i\right)\left(\left(a_2+b_2 i\right)+\left(a_3+b_3 i\right)\right)=\left(a_1+b_1 i\right)\left(\left(a_2+a_3\right)+\left(b_2+b_3\right)i\right)=$$
$$=\left[a_1\left(a_2+a_3\right)-b_1\left(b_2+b_3\right)\right]+\left[a_1\left(b_2+b_3\right)+b_1\left(a_2+a_3\right)\right]i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+\left(a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3\right)i$$

$$z_1z_2+z_1z_3=\left(a_1+b_1 i\right)\left(a_2+b_2 i\right)+\left(a_1+b_1 i\right)\left(a_3+b_3 i\right)=$$
$$=\left[\left(a_1a_2-b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)i\right]+\left[\left(a_1a_3-b_1b_3\right)+\left(a_1b_3+b_1a_3\right)i\right]=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3+\left(a_1b_2+b_1a_2+a_1b_3+b_1a_3\right)i$$

Сложение и умножение комплексных чисел подчиняется тем же законам, что и сложение и умножение действительных чисел!

Пример. Пусть $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 5 - 7i$

Найдем $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = 7 - 4i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = -3 + 10i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 + 15i - 14i - 21i^2 =$$

$$= 10 + 15i - 14i + 21 = 31 + i$$

Сопряженные числа

- Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются сопряженными. (отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью)

$$\frac{a_2+b_2i}{a_1+b_1i}=\frac{(a_2+b_2i)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}i$$

сопряженные

Обозначение: $z=a+bi$ $\quad \bar{z}=a-bi$

Чтобы разделить одно комплексное число на другое, надо числитель и знаменатель домножить на сопряженное знаменателю число

Пример. Вычислить $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{5-7i}{2+3i}$

$$\frac{5-7i}{2+3i} = \frac{(5-7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-14i-15i+21i^2}{4-9i^2} =$$

$$= \frac{10-29i-21}{4+9} = \frac{-11-29i}{13} = -\frac{11}{13} - \frac{29}{13}i$$

Решение квадратных уравнений с D<0

Решить квадратное уравнение: $5x^2 + 6x + 5 = 0$

Решение:

$$D = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = -64$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{-64}}{10} = \frac{-6 + 8i}{10} = -\frac{6}{10} + \frac{8}{10} i = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{-64}}{10} = \frac{-6 - 8i}{10} = -\frac{6}{10} - \frac{8}{10} i = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$$

Ответ. Корнями квадратного уравнения с действительными коэффициентами являются <u>сопряженные</u> комплексные числа!

ЗАДАНИЕ 1 Дано $z_1 = -2 + 3i$ $z_2 = 1 - i$

Найти: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; ${z_2}^6$

Ответ:

$$z_1 + z_2 = -1 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = -3 + 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 1 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

$${z_2}^6 = 8i$$

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить: $\left(i^{63}+i^{17}+i^{12}+i^{81}\right)\left(i^{71}-i^{33}\right)$

Ответ: $2-2i$

ЗАДАНИЕ 3

По корням составить квадратное уравнение: $x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$

Ответ: $x^2 + 2x + 3 = 0$

ЗАДАНИЕ 4

Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: $\left(3-2i\right)x+\left(1+3i\right)y=4+5i$

Ответ: $\left(\dfrac{7}{11};\dfrac{23}{11}\right)$