

# Интегралы

# Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции  $f(x)$  называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается  $\int f(x)dx$  :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad ,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

# Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

# Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат  $XOY$  фигура, ограниченная осью  $OX$ , прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке  $[a;b]$  функции  $y=f(x)$ , называется криволинейной трапецией

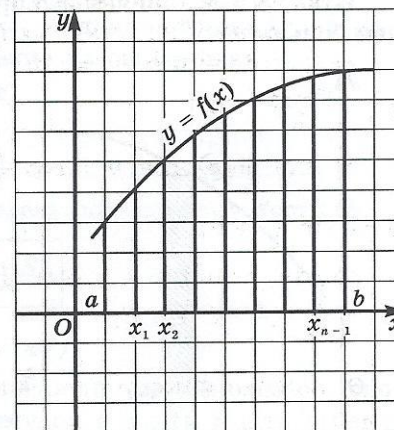


Рис. 224

# Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок  $[a;b]$  на  $n$  равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси  $OY$ . Заданная криволинейная трапеция разобьется на  $n$  частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

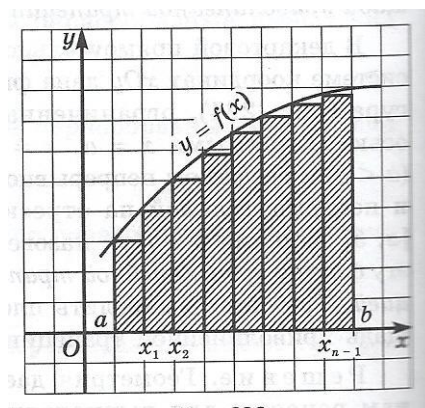
$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , его называют

определенным интегралом от функции

$y=f(x)$  по отрезку  $[a;b]$  и обозначают так:  $\int_a^b f(x) dx$



# Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ .

# Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

# Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

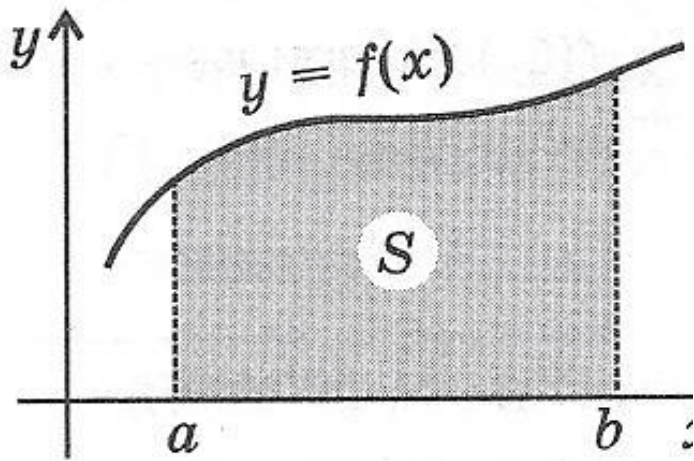
$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$



# Геометрический смысл определенного интеграла

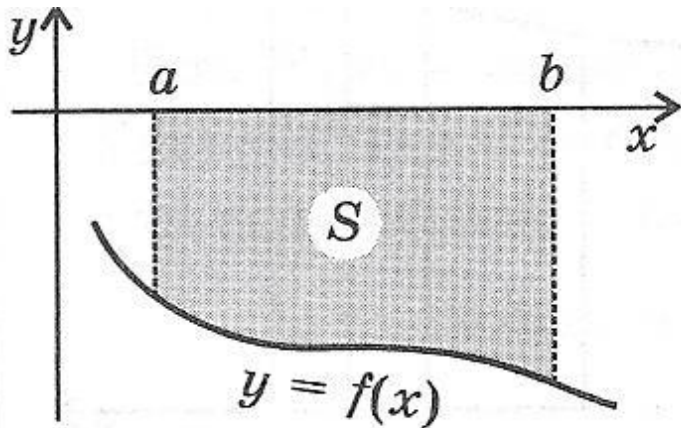
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке  $[a;b]$  функции  $f(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

# Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке  $[a;b]$  функции  $f(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ :

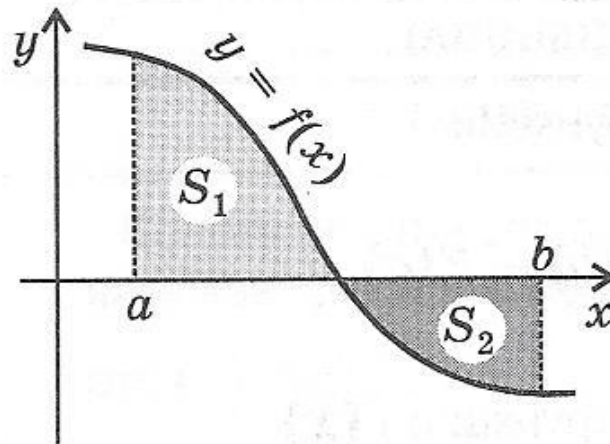


$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

# Геометрический смысл определенного интеграла

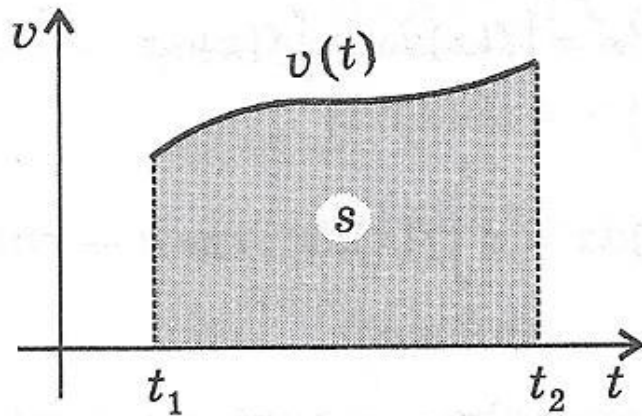
- **Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке  $[a;b]$  , то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx$$



# Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение  $S$  численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости  $v$  от времени  $t$ :



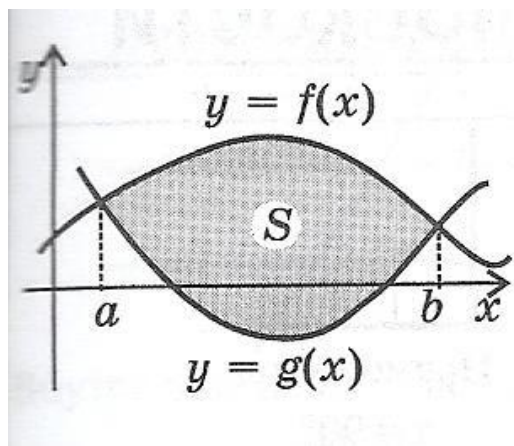
$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

# Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

# Площадь фигуры,

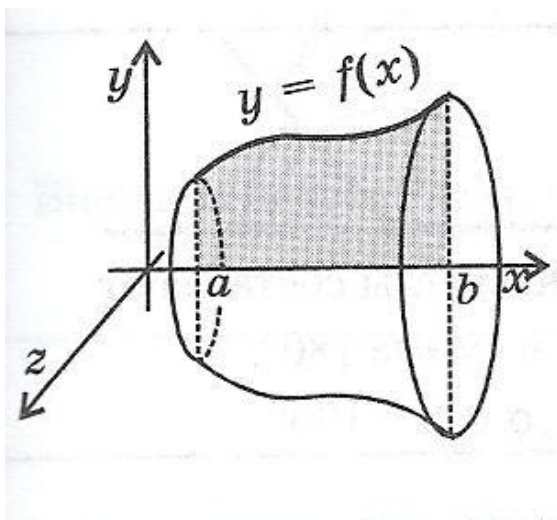
- Ограниченной графиками непрерывных функций  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$  таких, что  $f(x) \geq g(x)$  для любого  $x$  из  $[a;b]$ , где  $a$  и  $b$  – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

# Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси  $X$  криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции  $y=f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ :



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$